Paulo Winterle

VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA

2ª edição

ALWAYS LEARNING

PEARSON

Vetores e Geometria Analítica

2ª edição

Paulo Winterle

PEARSON

Diretor editorial e de conteúdo	Roger Trimer
Gerente editorial	Kelly Tavares
Supervisora de produção editorial	Silvana Afonso
Coordenadora de desenvolvimento editorial	Danielle Sales
Coordenadora de produção gráfica	Tatiane Romano
Editor de aquisições	Vinícius Souza
Editores de desenvolvimento	Rodrigo Manoel e Gisele Gonçalves
Primeira revisão	Maria Dolores D. Sierra Mata
Segunda revisão	Deborah Quintal
Capa	Pedro Gentile e Alberto Vonach Corrêa
Projeto gráfico e diagramação	ERJ Composição Editorial

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Winterle, Paulo
Vetores e geometria analítica / Paulo Winterle. -- 2. ed. -- São Paulo : Pearson Education do Brasil, 2014.

ISBN 978-85-430-0239-2

1. Cálculo vetorial 2. Geometria analítica
3. Matemática I. Título.

CDD-512.5
14-02270 -516.3

Índices para catálogo sistemático:
1. Cálculo vetorial : Matemática 512.5
2. Geometria analítica : Matemática 516.3

2014

Pearson Education do Brasil Ltda.,
uma empresa do grupo Pearson Education
Rua Nelson Francisco, 26
CEP 02712-100 – São Paulo – SP – Brasil
Fone: 11 2178-8686 – Fax: 11 2178-8688
vendas@pearson.com

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da eterna vida e pela vocação na apaixonante carreira docente.

À Lia, minha esposa, pelo amor, paciência e muito apoio nas centenas de horas durante os meses de preparação deste livro.

À Pearson pela valorização do texto concretizada na iniciativa desta edição.

Aos milhares de ex-alunos, com os quais muito aprendi.

Aos colegas pelo incentivo.

Ao colega e grande amigo Nivaldo Almeida Fonseca pela força e valiosas sugestões.

Ao colega Valmir Balbinot, com quem aprendi muito a fazer figuras e que tem sua contribuição neste trabalho.

Ao colega Airton Cabral de Andrade pelas inserções de aplicações na Física.

E, por fim, dois agradecimentos muito especiais. Em primeiro lugar, à colega e querida amiga Vera Regina da Rocha Bauer pelo grande e cuidadoso trabalho de revisão do conteúdo e por suas valiosas contribuições na melhoria deste texto. Um muito obrigado é pouco, Vera. E à colega Rita Maria Silvia Carnevale pela minuciosa revisão do texto e por ótimas sugestões na apresentação deste trabalho. Um abraço bem forte, Rita.

PARA INÍCIO DE CONVERSA...

A experiência adquirida em mais de vinte anos de docência da disciplina me motivou a apresentar este trabalho, cuja ênfase é o aspecto didático. Procurei organizar um texto que permita ao estudante "prosseguir sozinho", se assim o desejar, sem naturalmente prescindir da orientação do professor.

E, para tanto, como este livro foi pensado? O texto está estruturado sobre os dois grandes assuntos, intimamente relacionados, de seu título. Os "personagens" dos quatro primeiros capítulos são os *vetores,* cujo papel é de fundamental importância, não apenas no ensino da Matemática, também na aplicação em outras áreas. No final dos capítulos 2 e 3 encontram-se duas aplicações na Física. No Capítulo 1, a noção de vetor é apresentada de forma intuitiva, e seu estudo é realizado por meio dos *Tratamentos geométrico e algébrico*. Este capítulo mereceu uma atenção muito "carinhosa" e por isso mais delongada, porquanto seu conteúdo facilitará sobremaneira a compreensão do que está pela frente. Os últimos cinco capítulos são dedicados à geometria analítica. O estudo da reta, do plano e das distâncias (capítulos 5, 6 e 7), estruturado sobre vetores, pretende conduzir o estudante a interpretações geométricas de fatos algébricos. No Capítulo 8, curiosidades em torno das cônicas emolduram o assunto, e, finalmente, no Capítulo 9 pretende-se fazer entender a origem das equações das superfícies quádricas, a partir das correspondentes superfícies de revolução.

A par de uma sequência lógica dos assuntos, são apresentados 111 problemas resolvidos, que no texto estão identificados como **Exemplos.** Sua criteriosa seleção objetivou, na maioria das vezes, não só complementar a parte teórica, como preparar para o passo seguinte.

Como estes apaixonantes segmentos da Matemática, *vetores e geometria analítica,* permitem a visualização dos conceitos, são apresentadas 214 **Figuras**, que podem auxiliar em muito sua compreensão.

Além de tudo, um número expressivo e variado de **Problemas propostos** no final de cada capítulo, ao todo 460, proporcionará uma aprendizagem mais consistente.

A elaboração de um livro-texto com a explícita função didática voltada ao desenvolvimento de um trabalho acadêmico propõe-se a atingir dois alvos: o aluno e o professor, tanto dentro quanto fora da sala de aula.

Ao aluno, razão primordial do processo de ensino-aprendizagem, gostaria de me dirigir de um modo todo especial. Às vezes é bom lembrar: *Vetores e geometria analítica* são assuntos de vital importância na compreensão de disciplinas tais como cálculo, álgebra linear, equações diferenciais, e outras, uma vez que, além de relacionarem as representações algébricas com entes geométricos, visam desenvolver habilidades como raciocínio geométrico e visão espacial. Sua aprendizagem, entretanto, será tanto mais segura e consistente quanto maior for o tempo dedicado a atividades extraclasse, principalmente na solução de problemas. Ao tentar resolvê-los, sugere-se não fazê-lo de forma "corrida", e sim saltando de dois em dois, ou de três em três, até o final. Assim se terá passado por todo o conteúdo e experimentado os diversos níveis de dificuldade. E, no caso de ainda sobrar tempo, recomenda-se retornar e resolver aqueles que ficaram de fora, para reforçar o conhecimento do conteúdo. Esses problemas são apresentados na ordem de desenvolvimento do texto, e os últimos oferecem maiores desafios. Finalmente, para permitir a autoavaliação do trabalho, **Respostas** são apresentadas logo a seguir.

Ao professor e colega desejo manifestar a satisfação deste lançamento, colocando em suas mãos um texto, assim espero, facilitador de sua tarefa docente. É claro que este tem a "cara" do autor, e meus ex-alunos certamente nele me identificariam. Da mesma forma, cada professor tem suas peculiaridades (ainda bem!), razão por que não é possível fazer um livro do agrado de todos.

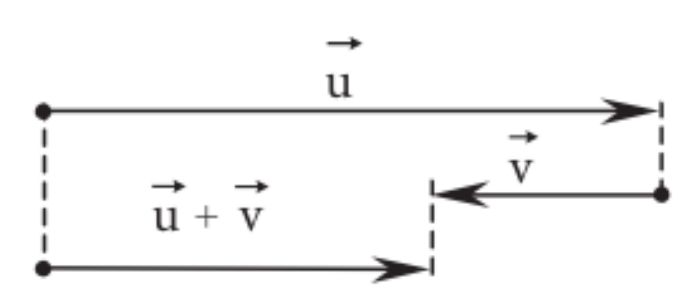
O texto foi planejado para ser desenvolvido em um semestre letivo de quatro aulas semanais. Entretanto, variáveis tais como bagagem do aluno, proposta do curso e objetivos da disciplina podem requerer adaptações. Por esta razão, foi apresentado um número elevado de exercícios, para tornar possível ao professor um maior ou menor aprofundamento da matéria, assim como atendimento diferenciado aos alunos frente a seus interesses e potencialidades. Além disso, os tipos variados de exercícios permitem ao professor sugerir aqueles que melhor se adaptem ao seu gosto, estilo e objetivos.

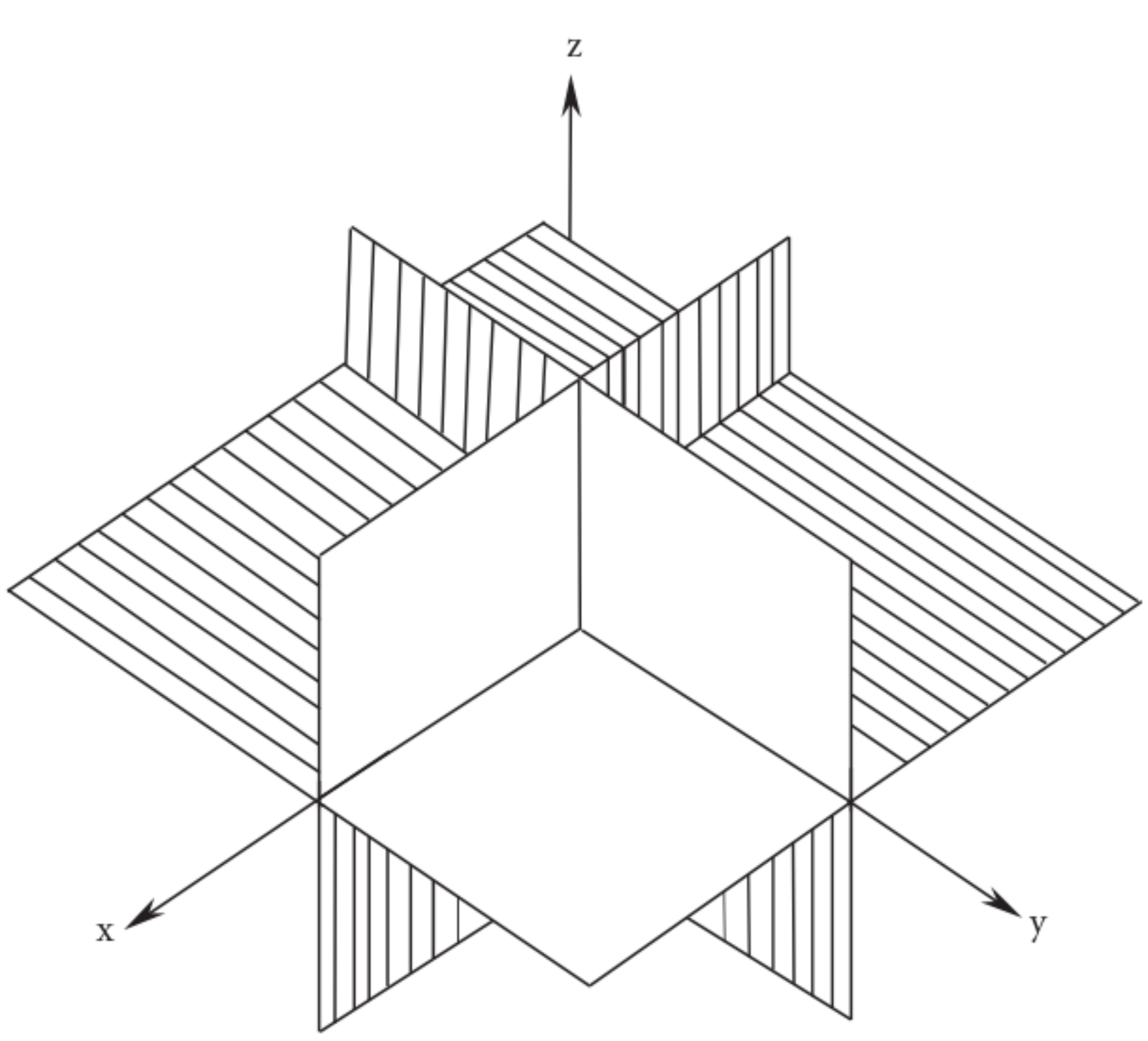
Finalizando, ciente de que o sucesso de toda iniciativa de construção e difusão de conhecimentos muito depende das contribuições daqueles a quem se destina, dirijo este apelo a todo leitor deste texto — seja aluno ou professor: se gostou, diga, por gentileza; e, da mesma forma, se não gostou dele. Opiniões, críticas e sugestões serão bem-vindas, pois, com toda a certeza, contribuirão para o aperfeiçoamento de futuras edições.

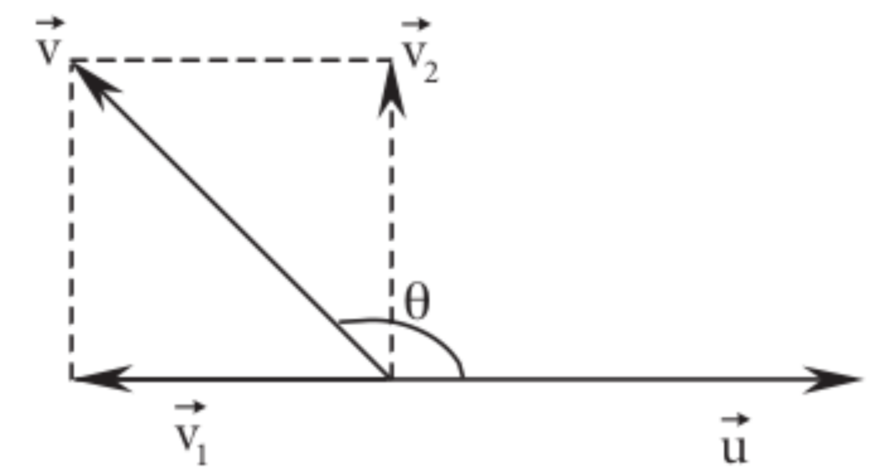
Para suas apreciações, dirija-se diretamente para ***winterlepl@gmail.com***, ou escreva para a Editora, que me repassará as manifestações que receber.

Paulo Winterle

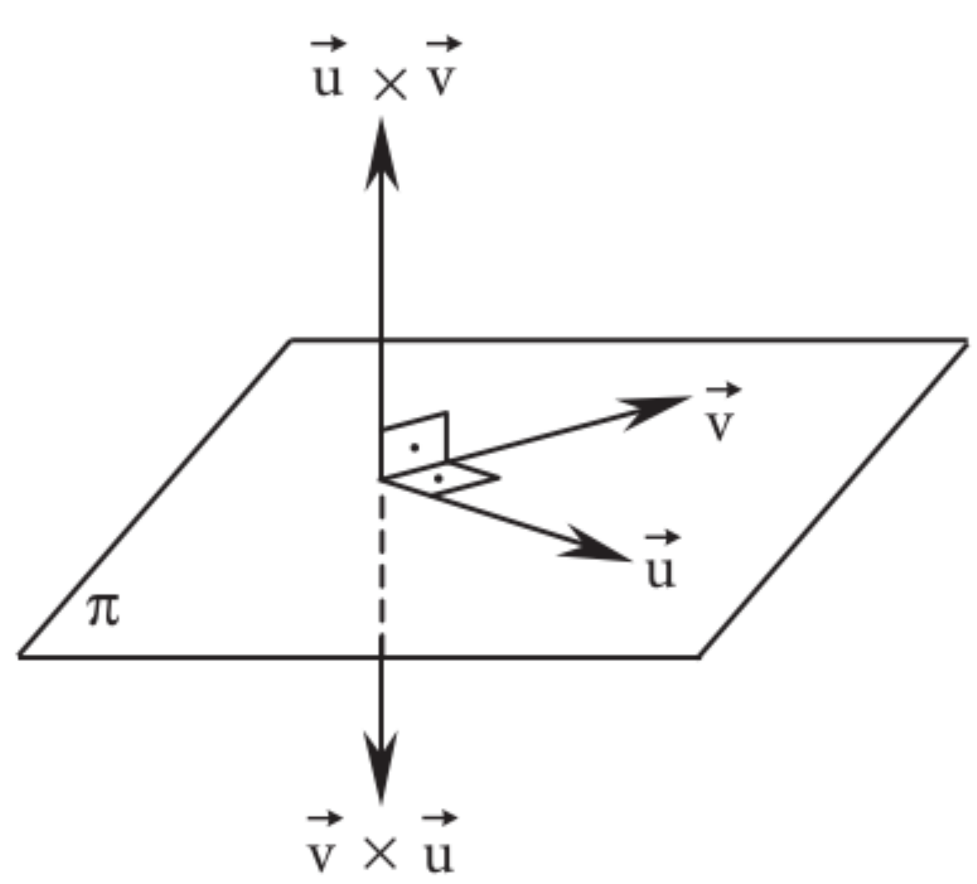
SUMÁRIO



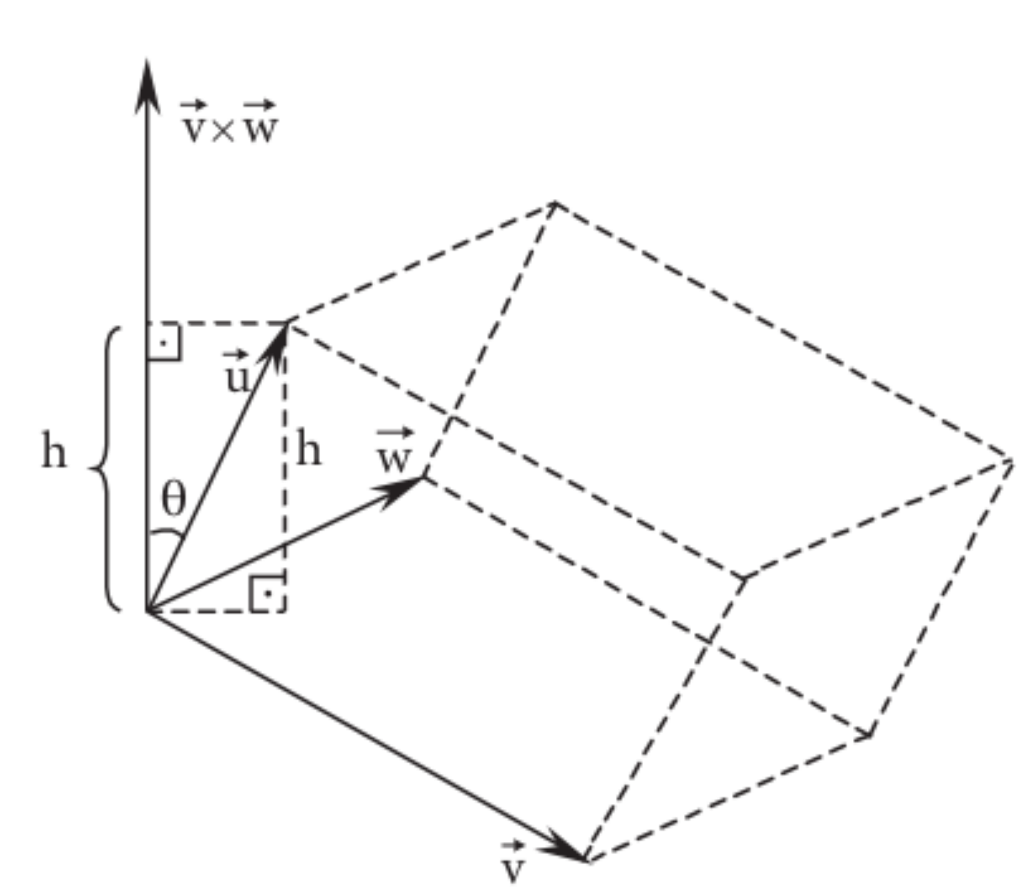




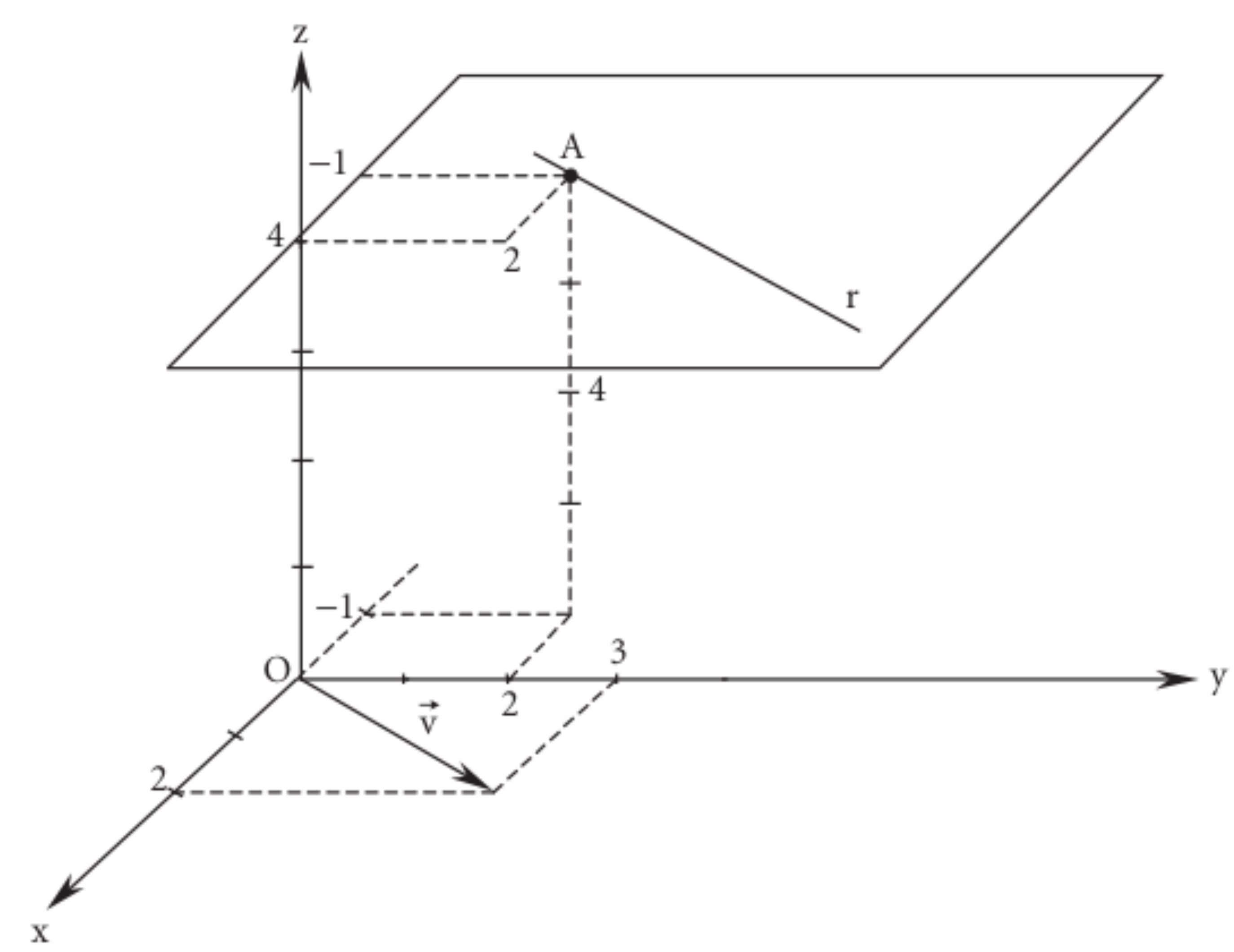
$\vec{v}$
$\vec{v}_2$
θ
$\vec{v}_1$
$\vec{u}$



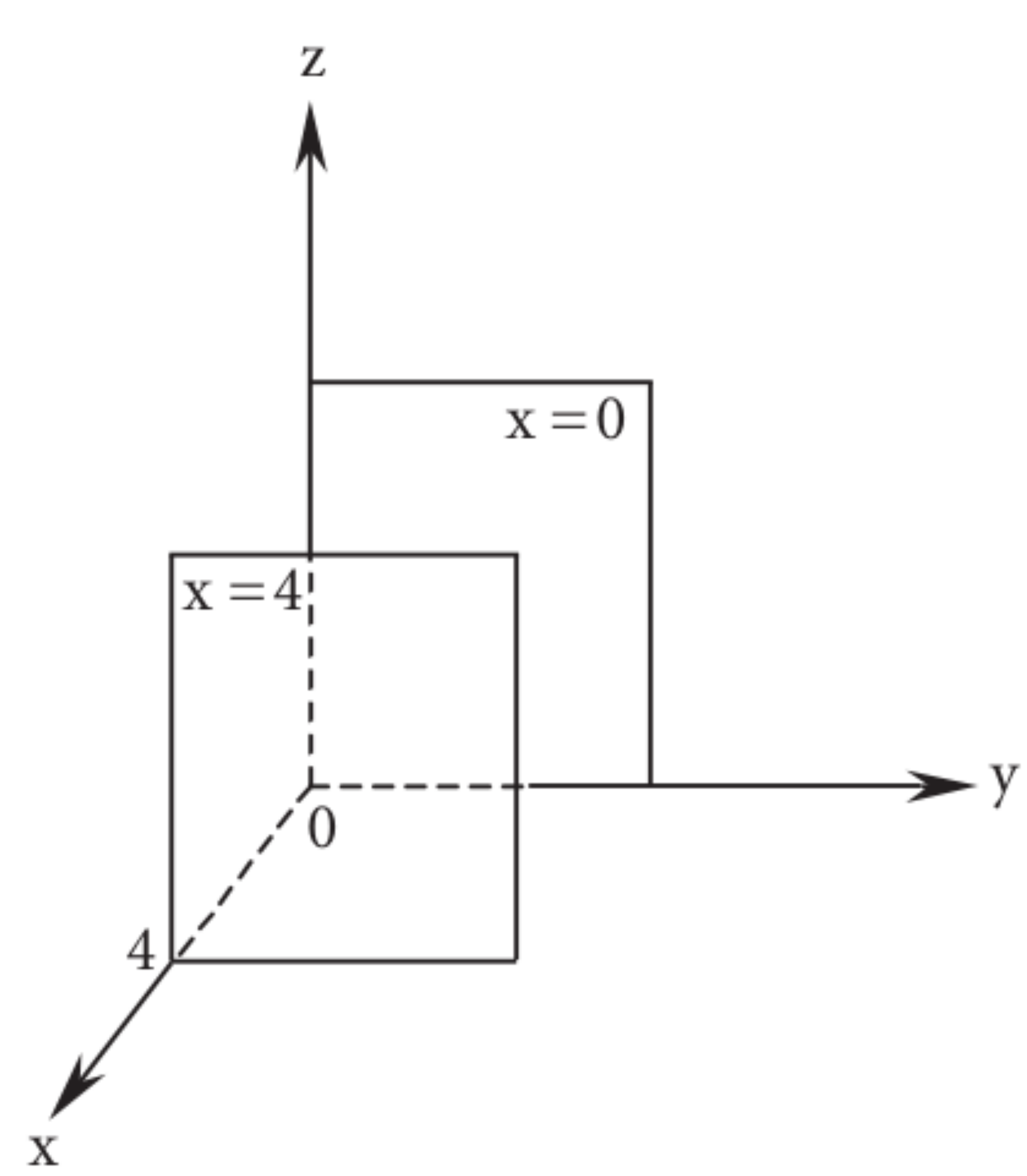
$\vec{u} \times \vec{v}$
$\vec{v}$
$\vec{u}$
π
$\vec{v} \times \vec{u}$



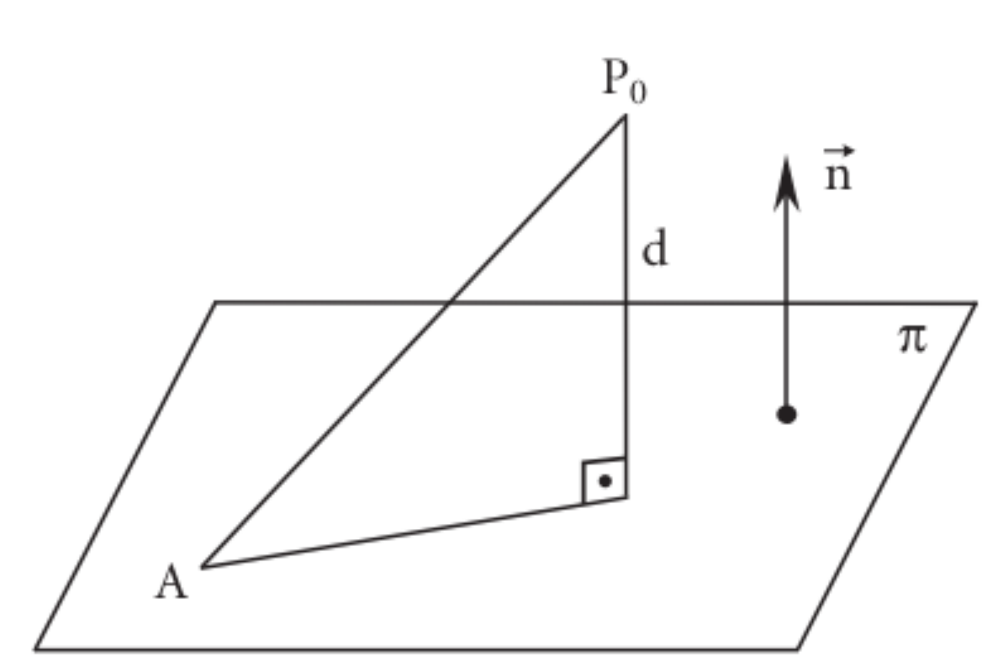
$\vec{v} \times \vec{w}$
$\vec{u}$
h
θ
$\vec{w}$
$\vec{v}$



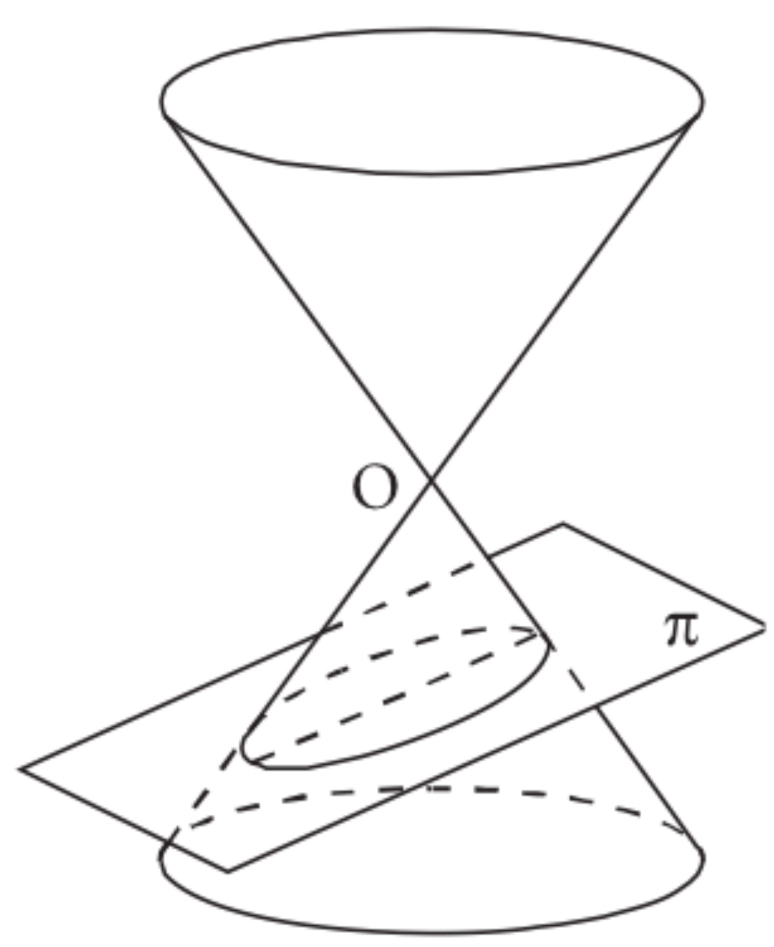
z
A
−1
4
2
r
4
−1
O
3
y
v⃗
2
2
x



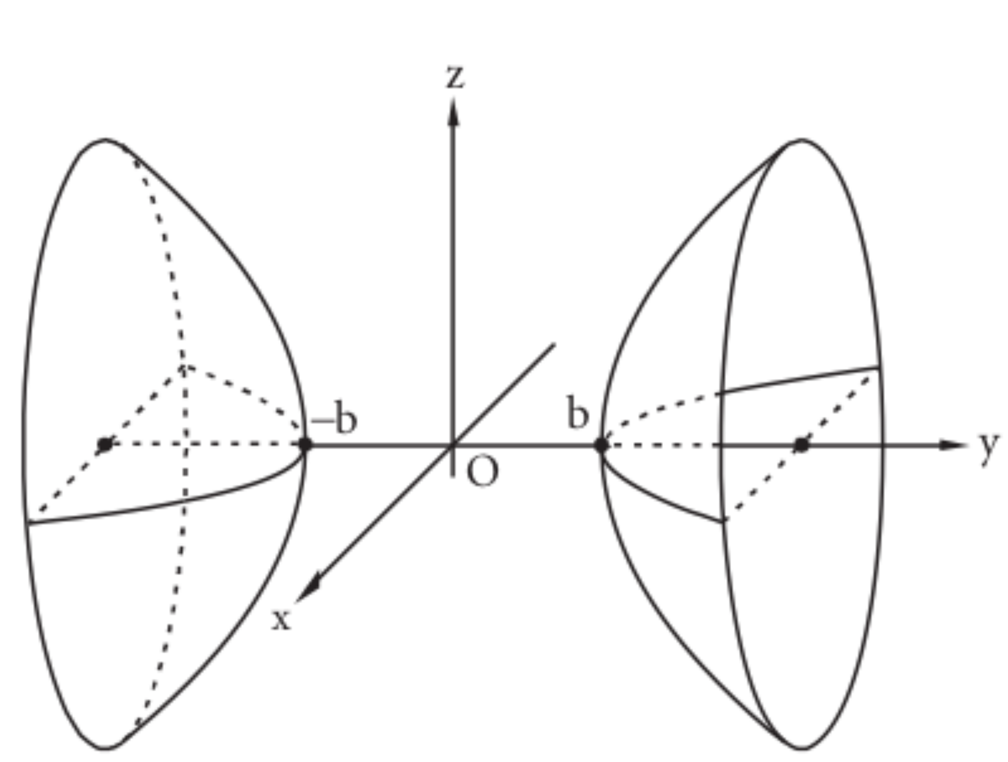
z
x = 0
x = 4
y
0
4
x



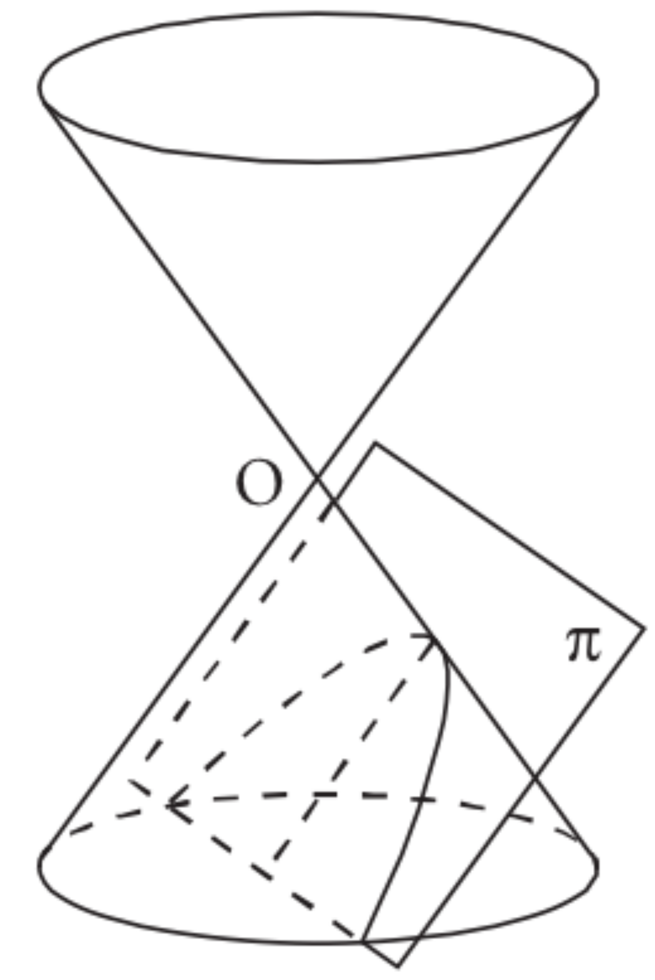
P_0
n⃗
d
π
A



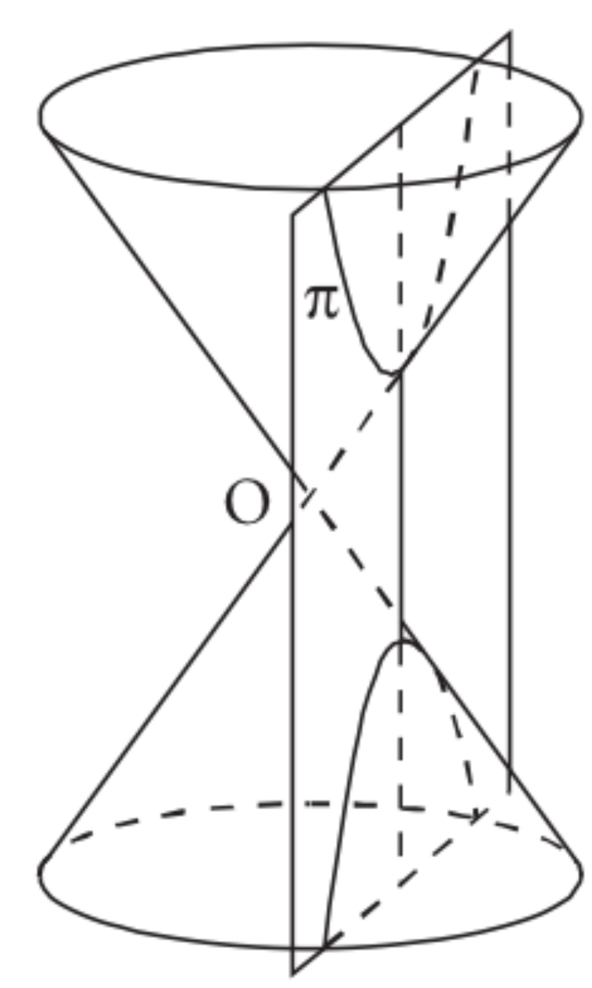
O
π



z
–b
b
O
y
x



O
π



π
O

VETORES

1

Com o propósito de garantir maior clareza para o leitor, a abordagem do estudo de *vetores* é feita por meio de dois tratamentos que se completam: o *geométrico* e o *algébrico*. A grande vantagem da abordagem geométrica é possibilitar, predominantemente, a visualização dos conceitos que são apresentados para estudo, o que favorece seu entendimento. Posteriormente, os mesmos assuntos e ainda outros são abordados sob o ponto de vista algébrico, mais formal e abstrato.

O TRATAMENTO GEOMÉTRICO

Noção intuitiva

Existem dois tipos de grandezas: as escalares e as vetoriais. As *escalares* são aquelas que ficam completamente definidas por apenas um número real (acompanhado de uma unidade adequada). Comprimento, área, volume, massa, temperatura, densidade, são exemplos de grandezas escalares. Assim, quando dizemos que uma mesa tem 3 m de comprimento, que o volume de uma caixa é de 10 dm^3 ou que a temperatura ambiente é de 30 °C, determinamos perfeitamente essas grandezas.

Existem, no entanto, grandezas que não são completamente definidas apenas por seu módulo, ou seja, pelo número com sua unidade correspondente. Falamos das grandezas *vetoriais,* que, para serem perfeitamente caracterizadas, necessitamos conhecer seu *módulo* (ou comprimento ou intensidade), sua *direção* e seu *sentido*. Força, velocidade, aceleração, são exemplos de grandezas vetoriais.

Antes de apresentar um exemplo mais palpável de grandeza vetorial, precisamos ter bem presente as ideias de *direção* e de *sentido*. A Figura 1.1(a) apresenta três retas. A reta r_1 determina, ou define, *uma direção*. A reta r_2 determina outra direção, diferente da direção de r_1. Já a reta r_3, por ser paralela a r_1, possui a mesma direção de r_1. Assim, a noção de direção é dada por uma reta e por todas as que lhe são paralelas. Quer dizer, *retas paralelas têm a mesma direção*.

Na Figura 1.1(b) a direção é definida pela reta que passa pelos pontos A e B. O deslocamento de uma pessoa nessa mesma direção pode ser feito de duas maneiras: no sentido de A para B ou no sentido contrário, de B para A. Portanto, a cada direção podemos associar dois sentidos. Fica claro, então, que só podemos falar em "sentidos iguais" ou em "sentidos contrários" caso estejamos diante da mesma direção.

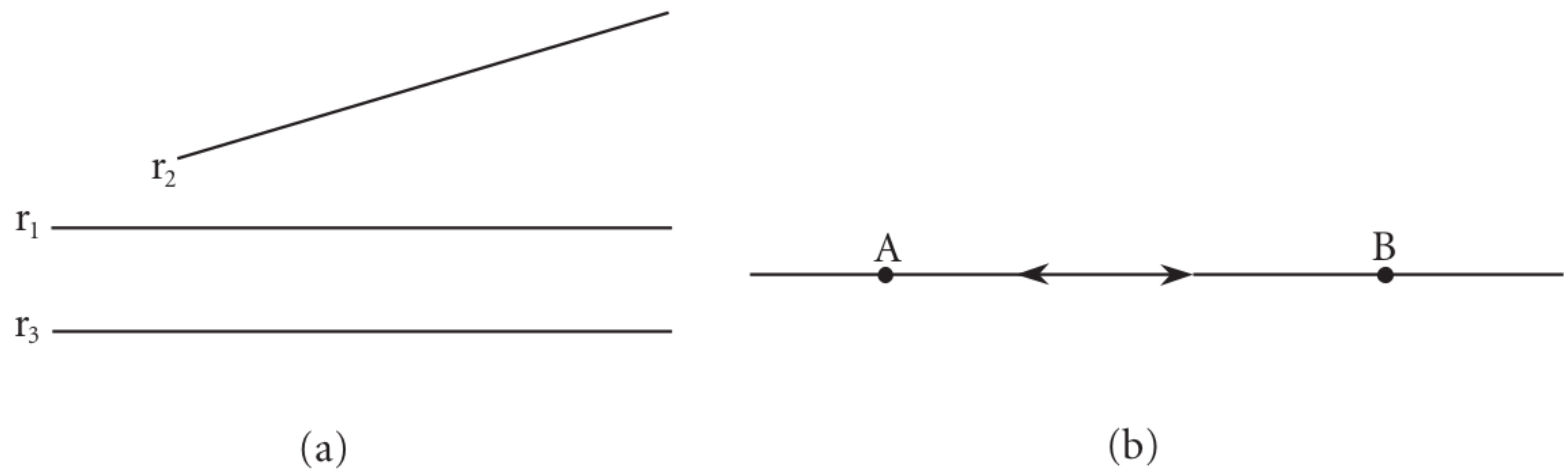


Figura 1.1

Agora vamos a um exemplo de grandeza vetorial. Consideremos um avião com a velocidade constante de 400 km/h, deslocando-se para o nordeste, sob um ângulo de 40° (na navegação aérea, as direções são dadas pelo ângulo considerado a partir do norte (N), em sentido horário). Esta grandeza (velocidade) seria representada por um *segmento orientado* (uma seta – Figura 1.2), sendo o seu módulo dado pelo comprimento do segmento (no caso, 4 cm, e cada 1 cm corresponde a 100 km/h), com a direção e o sentido definidos pelo ângulo de 40°. O sentido será indicado por uma seta na extremidade superior do segmento.

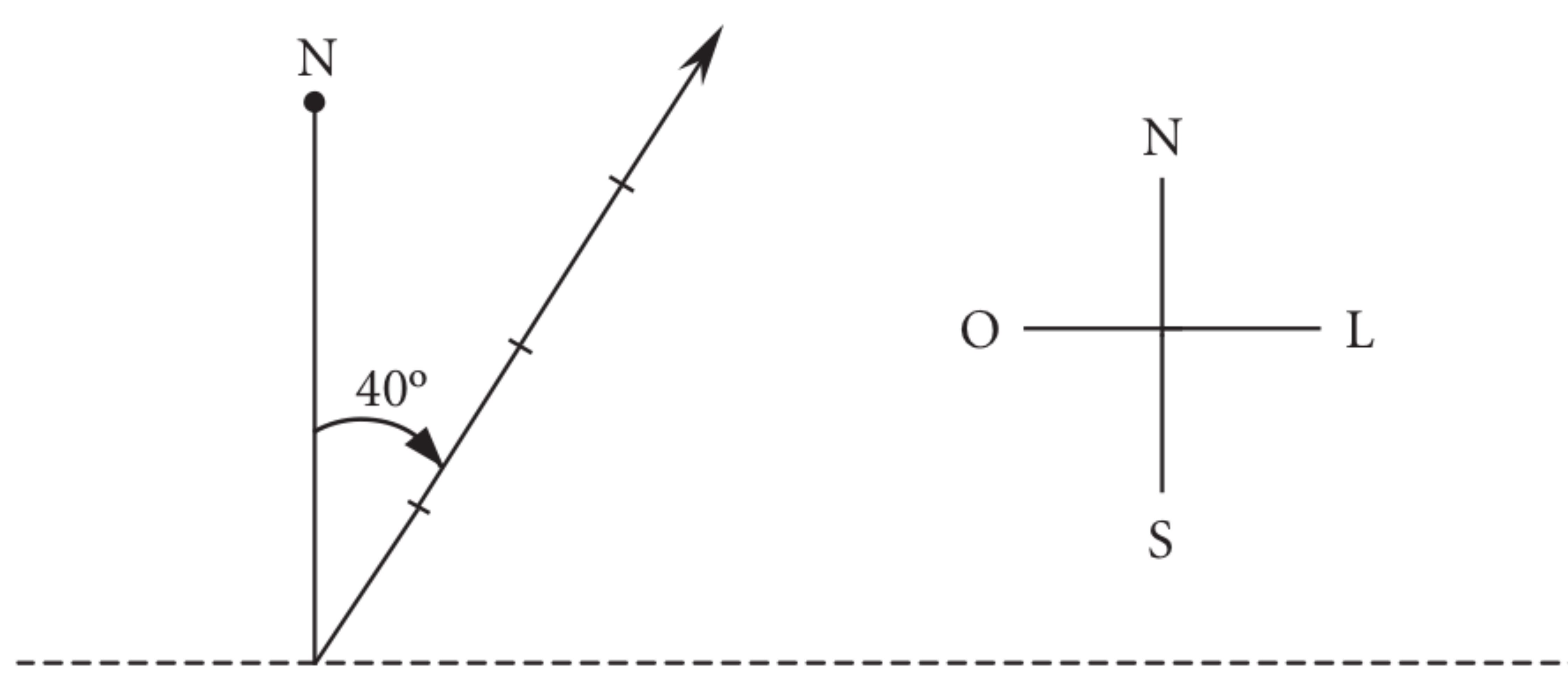


Figura 1.2

Observemos que no caso de o ângulo ser 220° (40° + 180°), a direção continua sendo a mesma, porém, o sentido é o oposto. Este exemplo de grandeza vetorial sugere a noção de *vetor*.

Abstendo-se da ideia de grandezas vetoriais, diríamos que o vetor é representado por um *segmento orientado* (um segmento está orientado quando nele há um sentido de percurso, considerado positivo).

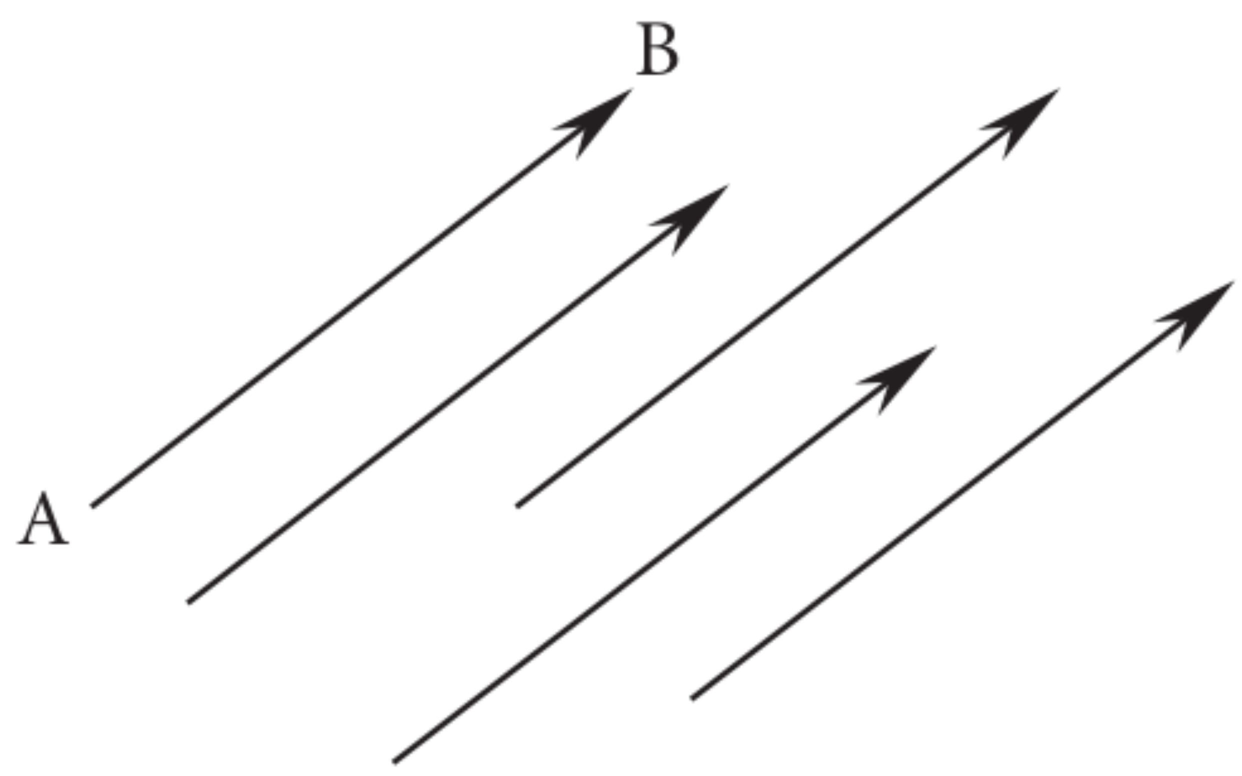


Figura 1.3

Dois ou mais segmentos orientados de mesmo comprimento, mesma direção (são paralelos ou colineares) e mesmo sentido são *representantes* de um mesmo vetor. Na Figura 1.3 todos os segmentos orientados paralelos, de mesmo sentido e mesmo comprimento de AB, representam o mesmo vetor, que será indicado por

$$\overrightarrow{AB} \quad \text{ou} \quad B - A$$

em que A é a origem e B a extremidade do segmento. O vetor também costuma ser indicado por uma letra minúscula encimada por uma seta, tal como $\vec{v}$.

Quando escrevemos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ (Figura 1.4), afirmamos que o vetor $\vec{v}$ é determinado pelo segmento orientado AB. Porém, qualquer outro segmento de mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido de AB representa também o mesmo vetor $\vec{v}$. Assim, cada ponto do espaço pode ser considerado como orgem de um segmento orientado que é representante do vetor $\vec{v}$. Essa é a razão de o vetor também ser chamado de *vetor livre*, no sentido de que o representante pode ter sua origem colocada em qualquer ponto.

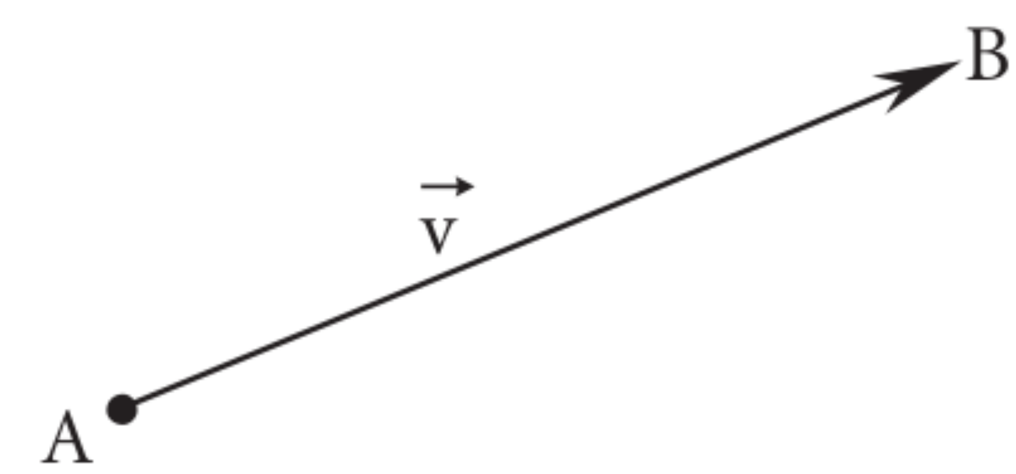


Figura 1.4

Ainda, dados um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e um ponto P, existe um só ponto Q (Figura 1.5) tal que o segmento orientado PQ tenha o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido de AB. Portanto, temos também $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$, o que reforça o fato de que um representante de $\vec{v}$ pode ter sua origem em qualquer ponto P do espaço.

O módulo, a direção e o sentido de um vetor $\vec{v}$ é o módulo, a direção e o sentido de qualquer um dos seus representantes. Indica-se o módulo de $\vec{v}$ por $|\vec{v}|$ ou $||\vec{v}||$.

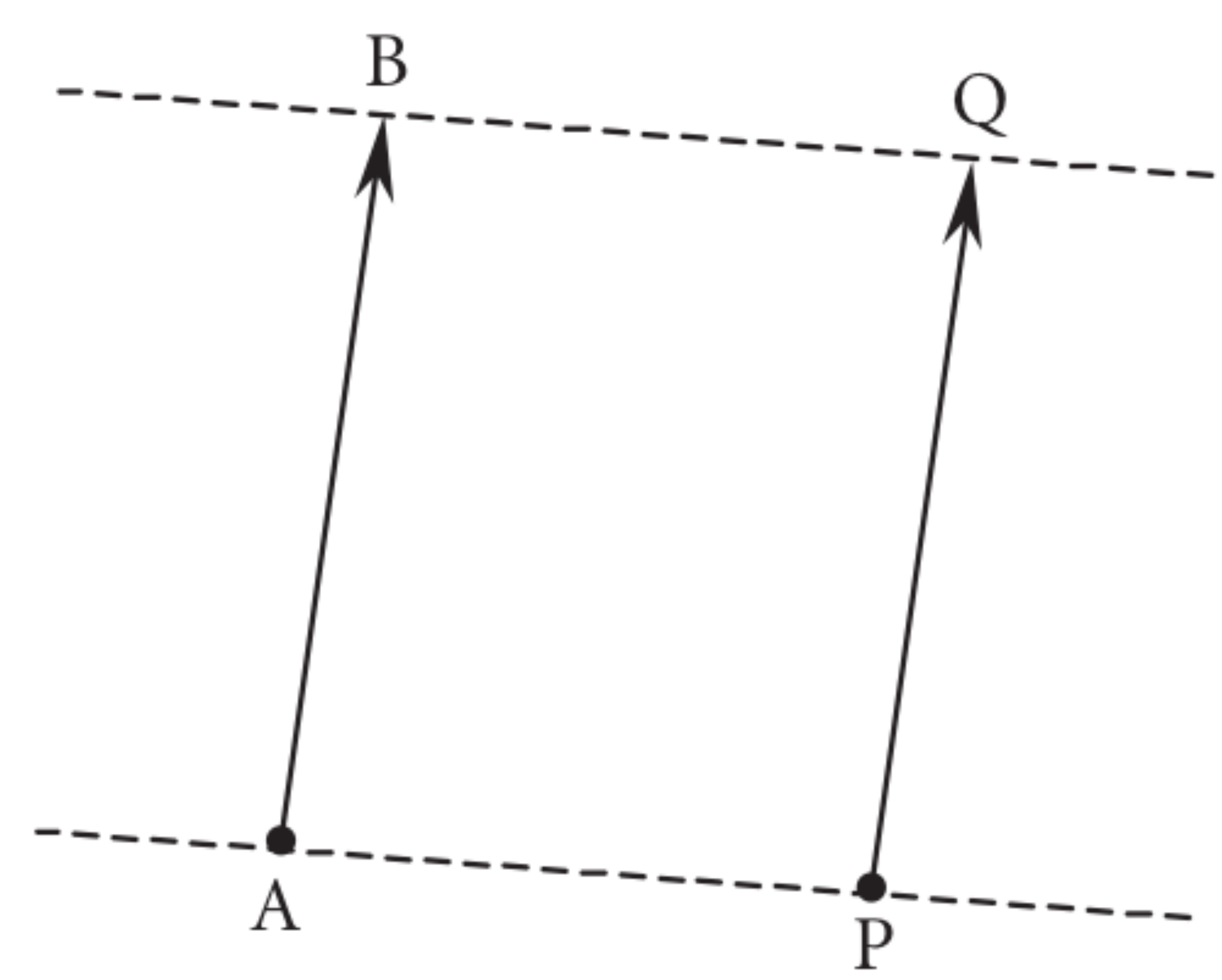


Figura 1.5

Casos particulares de vetores

a) Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *paralelos*, e indica-se por $\vec{u}//\vec{v}$, se os seus representantes tiverem a mesma direção. Na Figura 1.6, tem-se $\vec{u}//\vec{v}//\vec{w}$, na qual $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm o mesmo sentido, enquanto $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm sentido contrário ao de $\vec{w}$.

b) Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *iguais*, e indica-se por $\vec{u} = \vec{v}$, se tiverem iguais o módulo, a direção e o sentido.

c) Qualquer ponto do espaço é representante do vetor *zero* (ou vetor nulo), que é indicado por $\vec{0}$ ou $\overrightarrow{AA}$ (a origem coincide com a extremidade). Pelo fato de esse vetor não possuir direção e sentido definidos, considera-se o vetor zero paralelo a qualquer vetor.

d) A cada vetor não nulo $\vec{v}$ corresponde um vetor *oposto* $-\vec{v}$, de mesmo módulo e mesma direção de $\vec{v}$, porém, de sentido contrário (Figura 1.7). Se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, o vetor $\overrightarrow{BA}$ é o oposto de $\overrightarrow{AB}$, ou seja, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

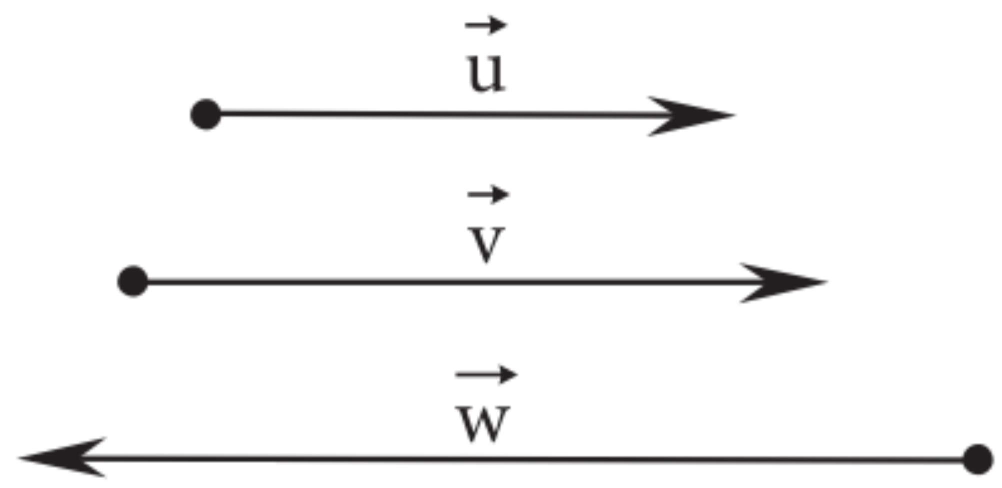


Figura 1.6

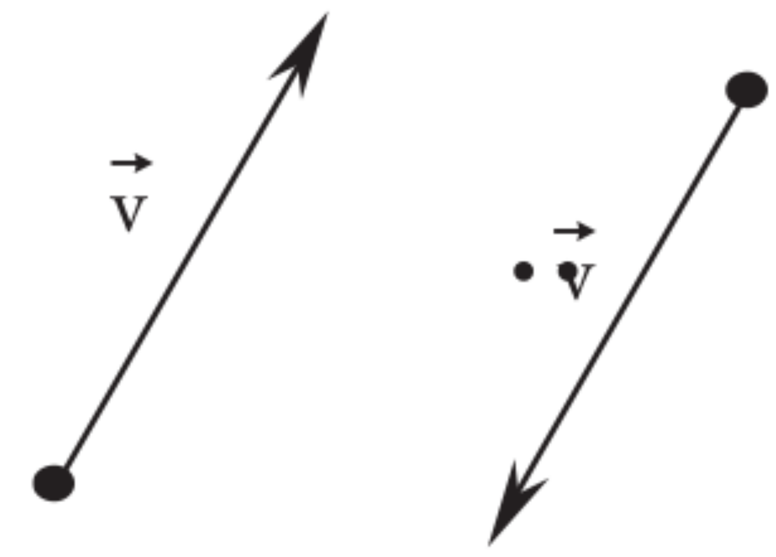


Figura 1.7

e) Um vetor $\vec{u}$ é unitário se $|\vec{u}| = 1$.

A cada vetor $\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, é possível associar dois vetores unitários de mesma direção de $\vec{v}$: $\vec{u}$ e $-\vec{u}$ (Figura 1.8). Nesta figura, tem-se $|\vec{v}| = 3$ e $|\vec{u}| = |-\vec{u}| = 1$. O vetor $\vec{u}$ que tem o mesmo sentido de $\vec{v}$ é chamado *versor* de $\vec{v}$. Na verdade o vetor $\vec{u}$ não é versor só de $\vec{v}$, mas sim de todos os vetores paralelos e de mesmo sentido de $\vec{v}$ e medidos com a mesma unidade.

f) Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (Figura 1.9(a)) são *ortogonais*, e indica-se por $\vec{u} \perp \vec{v}$, se algum representante de $\vec{u}$ formar ângulo reto com algum representante de $\vec{v}$.

A Figura 1.9(b) apresenta dois representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com origem no ponto A, formando ângulo reto.

Considera-se o vetor zero ortogonal a qualquer vetor.

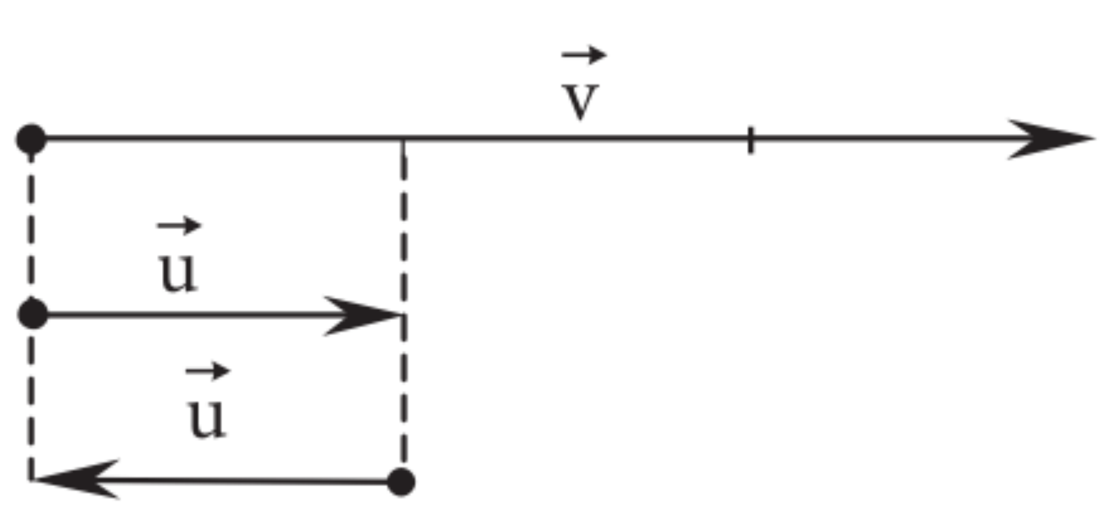


Figura 1.8

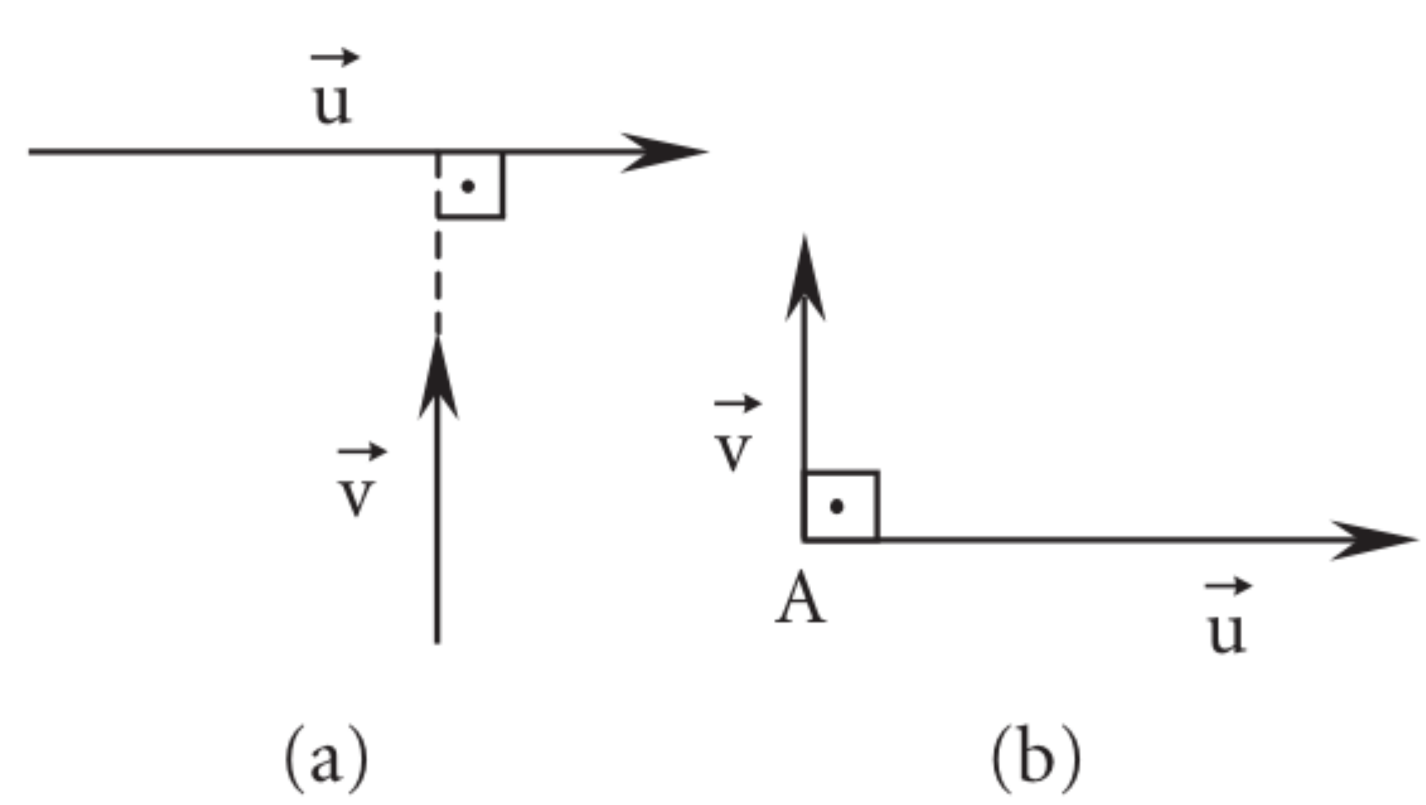


Figura 1.9

g) Dois ou mais vetores são *coplanares* se existir algum plano no qual esses vetores estão representados. É importante observar que *dois vetores* $\vec{u}$ e $\vec{v}$ *quaisquer são sempre coplanares*, pois basta considerar um ponto P no espaço e, com origem nele, traçar os dois representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pertencendo ao plano π (Figura 1.10) que passa por aquele ponto.

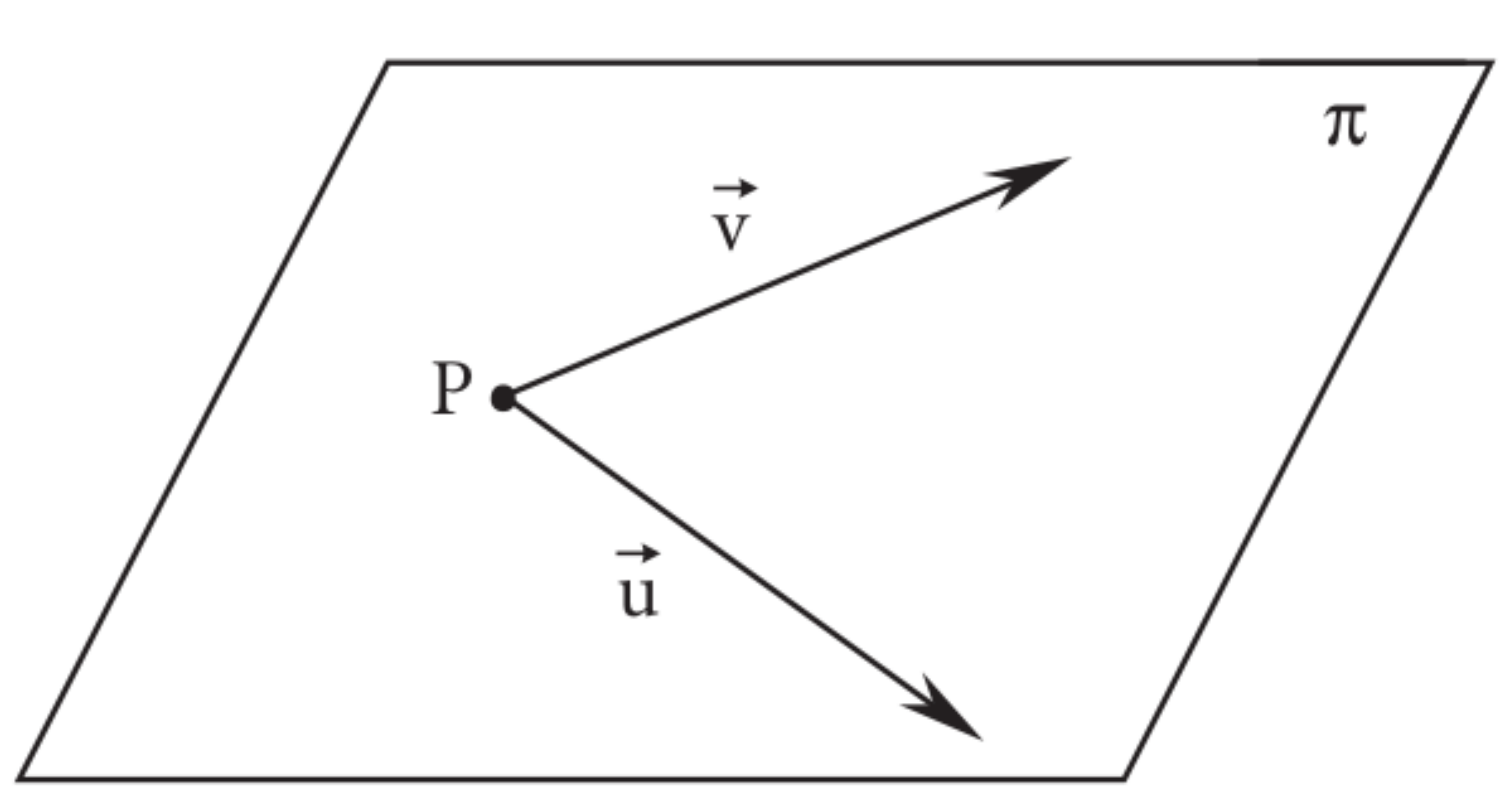
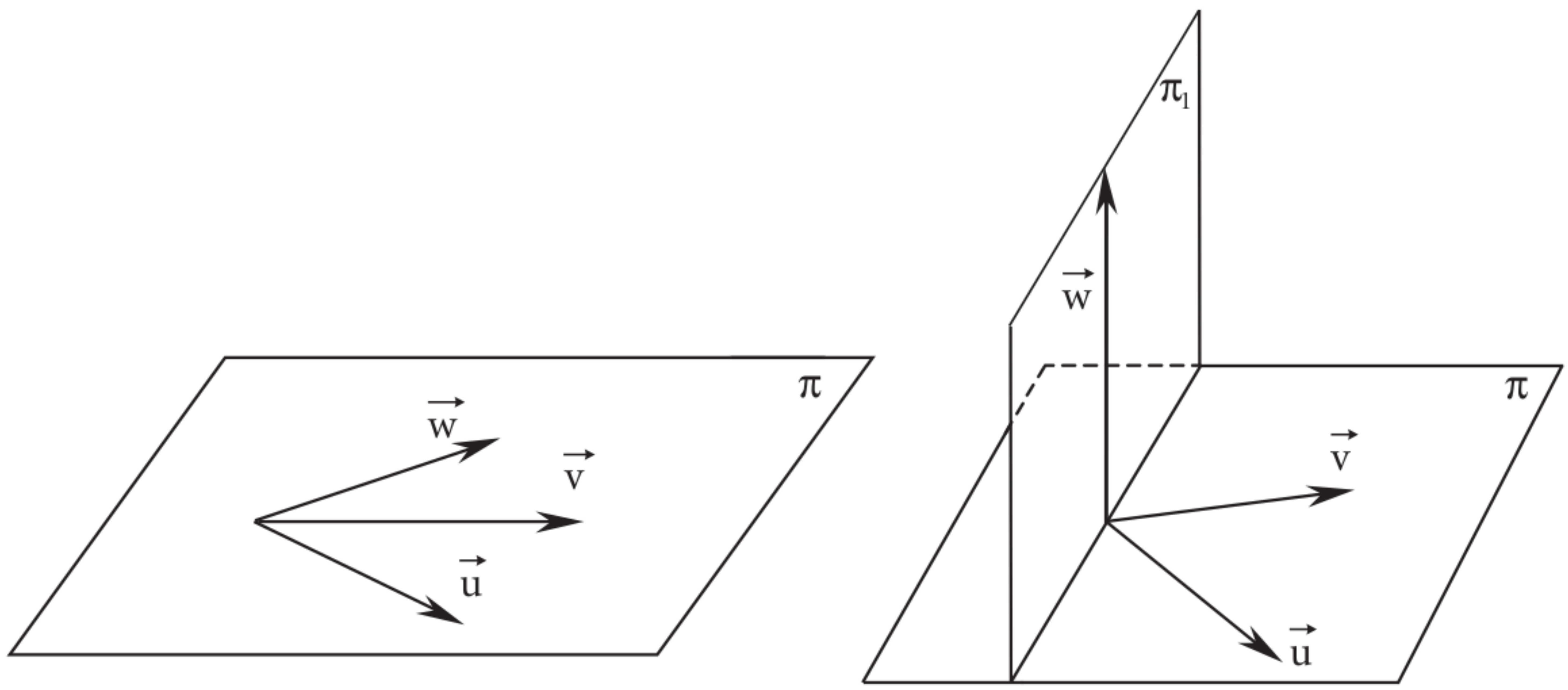


Figura 1.10

No caso de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serem não paralelos, como nessa figura, esses vetores determinam a "direção" do plano π, que é a mesma de todos os planos que lhe são paralelos.

Três vetores podem ser coplanares (Figura 1.11(a)) ou não (Figura 1.11(b)).



(a) (b)

Figura 1.11

Exemplos

1. A Figura 1.12 é constituída de nove quadrados congruentes (de mesmo tamanho). Decidir se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

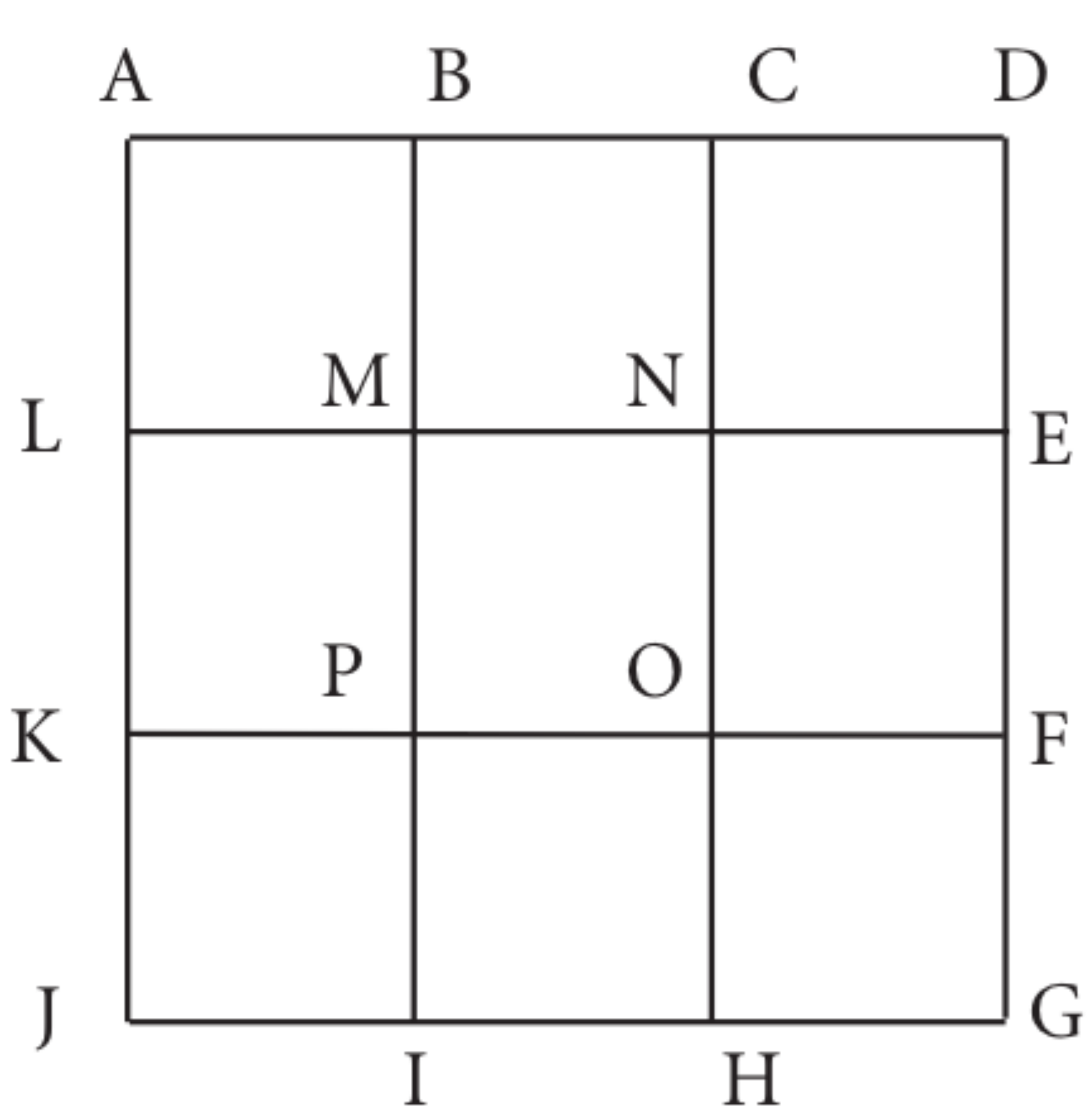


Figura 1.12

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OF}$

b) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PH}$

c) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OP}$

d) $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{MC}$

e) $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{ED}$

f) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{MG}$

g) $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{FI}$

h) $\overrightarrow{AC} \,//\, \overrightarrow{HI}$

i) $\overrightarrow{JO} \,//\, \overrightarrow{LD}$

j) $\overrightarrow{AJ} \,//\, \overrightarrow{FG}$

k) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{EG}$

l) $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BL}$

m) $\overrightarrow{PE} \perp \overrightarrow{EC}$

n) $\overrightarrow{PN} \perp \overrightarrow{NB}$

o) $\overrightarrow{PN} \perp \overrightarrow{AM}$

p) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{FP}|$

q) $|\overrightarrow{IF}| = |\overrightarrow{MF}|$

r) $|\overrightarrow{AJ}| = |\overrightarrow{AC}|$

s) $|\overrightarrow{AO}| = 2\,|\overrightarrow{NP}|$

t) $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BL}|$

Respostas

a) V	**d)** F	**g)** F	**j)** V	**m)** F	**p)** V	**s)** V
b) V	**e)** V	**h)** V	**k)** V	**n)** V	**q)** V	**t)** V
c) F	**f)** V	**i)** F	**l)** V	**o)** V	**r)** F	

2. A Figura 1.13 representa um paralelepípedo retângulo. Decidir se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações:

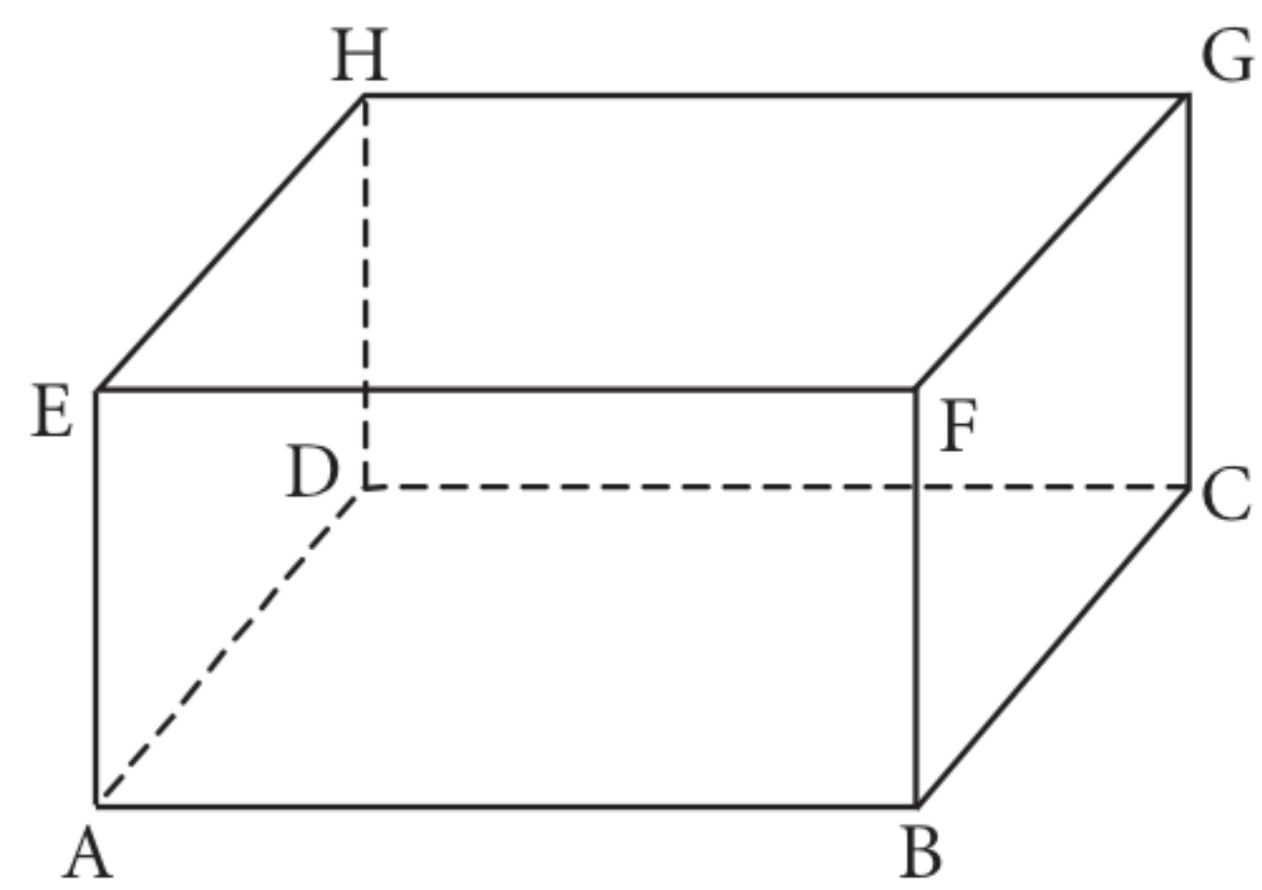


Figura 1.13

a) $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$

b) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{HG}$

c) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CG}$

d) $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{BC}$

e) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{HF}|$

f) $|\overrightarrow{AG}| = |\overrightarrow{DF}|$

g) $\overrightarrow{BG} \,//\, \overrightarrow{ED}$

h) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CG}$ são coplanares

i) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FG}$ e $\overrightarrow{EG}$ são coplanares

j) $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{HF}$ são coplanares

k) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$ e $\overrightarrow{FG}$ são coplanares

l) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BG}$ e $\overrightarrow{CF}$ são coplanares

m) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{CF}$ são coplanares

n) $\overrightarrow{AE}$ é ortogonal ao plano ABC

o) $\overrightarrow{AB}$ é ortogonal ao plano BCG

p) $\overrightarrow{DC}$ é paralelo ao plano HEF

Respostas

a) V	**d)** V	**g)** F	**j)** V	**m)** V	**p)** V
b) F	**e)** V	**h)** F	**k)** V	**n)** V	
c) V	**f)** V	**i)** V	**l)** F	**o)** V	

OPERAÇÕES COM VETORES

Adição de vetores

Consideremos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, cuja soma $\vec{u} + \vec{v}$ pretendemos encontrar. Tomemos um ponto A qualquer (Figura 1.14) e, com origem nele, tracemos um segmento orientado AB representante do vetor $\vec{u}$. Utilizemos a extremidade B para traçar o segmento orientado BC representante de $\vec{v}$. O vetor representado pelo segmento orientado de origem A e extremidade C é, por definição, o vetor *soma* de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja,

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

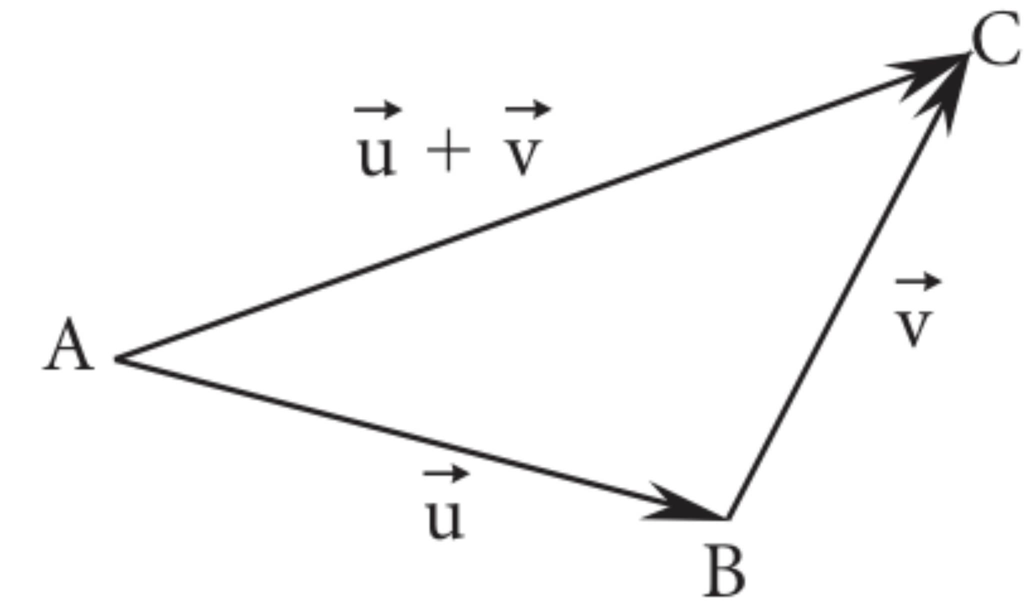
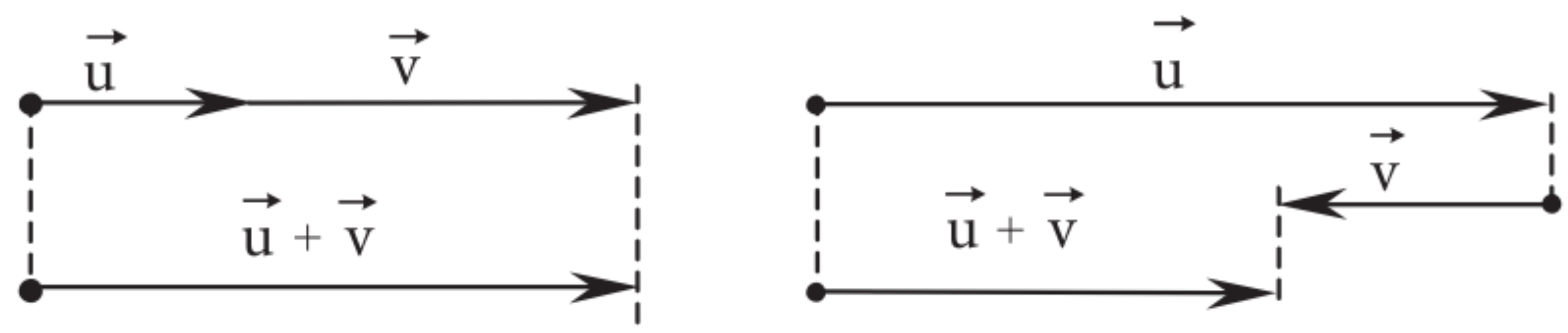


Figura 1.14

Sendo $\vec{u} \,//\, \vec{v}$, a maneira de obter o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ é a mesma e está ilustrada na Figura 1.15(a) ($\vec{u}$ e $\vec{v}$ de mesmo sentido) e na Figura 1.15(b) ($\vec{u}$ e $\vec{v}$ de sentidos contrários).



(a) (b)

Figura 1.15

No caso de os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não serem paralelos, há outra maneira de encontrar o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$. Representam-se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ por segmentos orientados de mesma origem A. Completa-se o paralelogramo ABCD (Figura 1.16), e o segmento orientado de origem A, que corresponde à diagonal do paralelogramo, é o vetor $\vec{u} + \vec{v}$, ou seja,

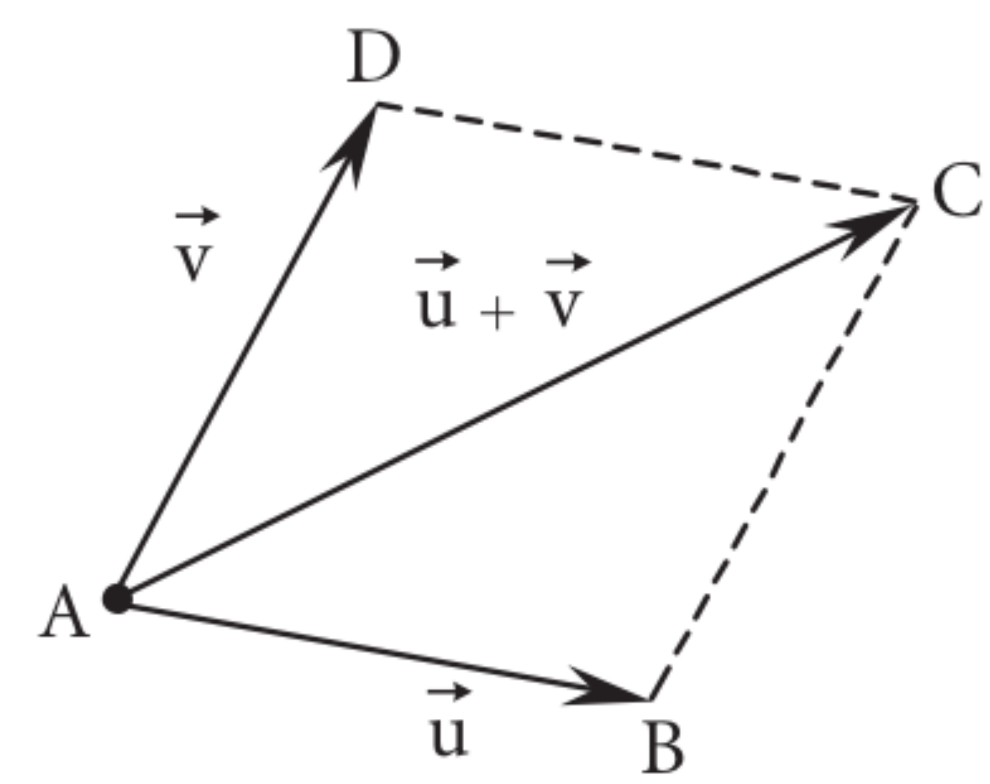
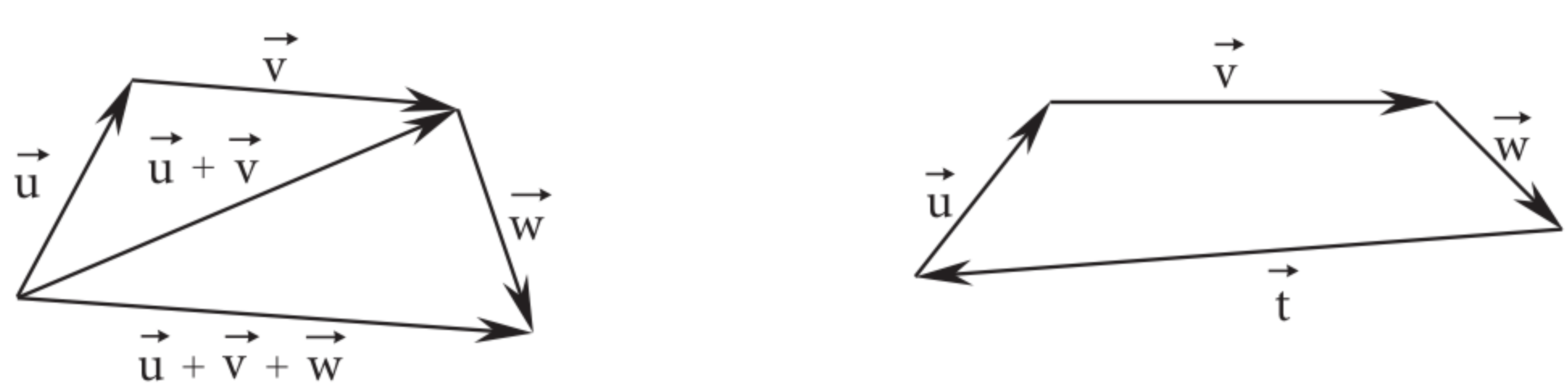


Figura 1.16

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

Para o caso de determinar a soma de três vetores ou mais, o procedimento é análogo (Figura 1.17(a)) e, em particular, se a extremidade do representante do último vetor coincidir com a origem do representante do primeiro (Figura 1.17(b)), a soma será o vetor zero ($\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{t} = \vec{0}$).



(a) (b)

Figura 1.17

Sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores quaisquer, a adição admite as seguintes propriedades:

I) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

II) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

III) Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

IV) Elemento oposto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

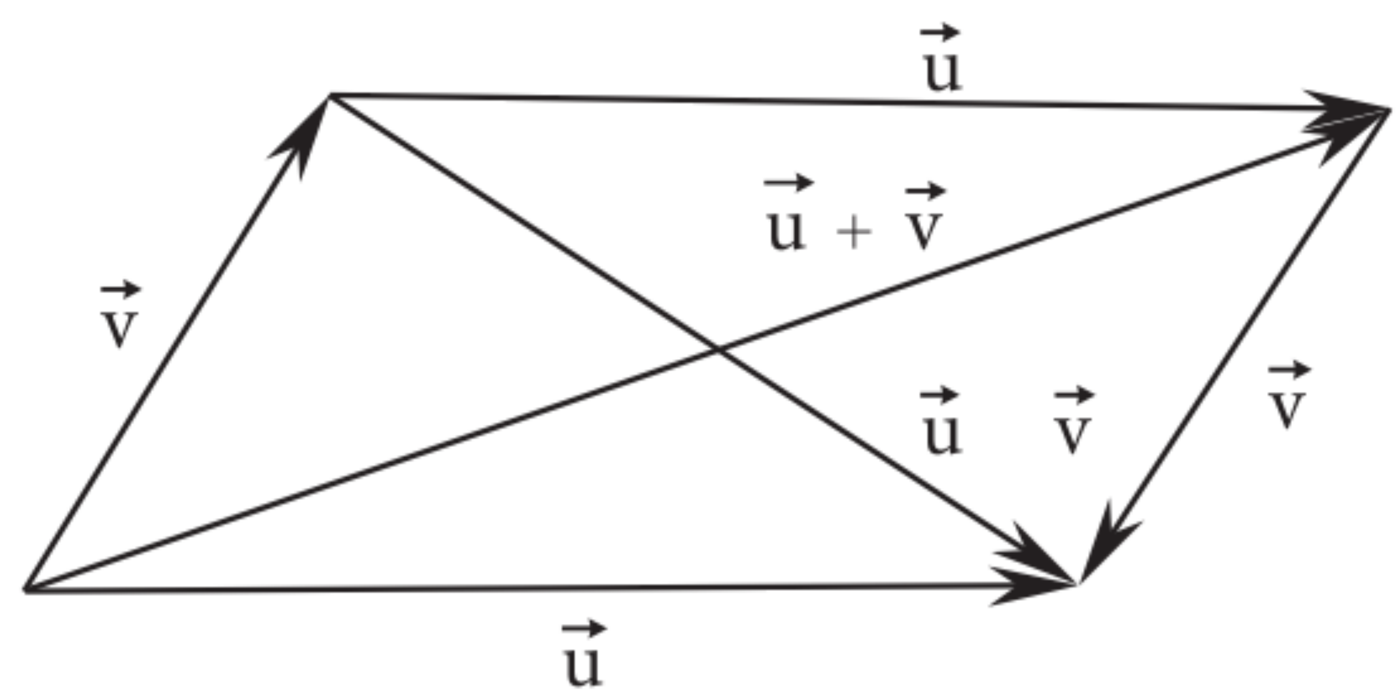


Figura 1.18

O vetor $\vec{u} + (-\vec{v})$, escreve-se $\vec{u} - \vec{v}$, é chamado de *diferença* entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Observemos que no paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (Figura 1.18), verifica-se que a soma $\vec{u} + \vec{v}$ é representada por uma das diagonais, enquanto a diferença $\vec{u} - \vec{v}$ pela outra diagonal.

Exemplos

1. Com base na Figura 1.12, determinar os vetores a seguir, expressando-os com origem no ponto A:

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$

d) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AK}$

e) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EO}$

f) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BL}$

g) $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AN}$

h) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OE}$

i) $\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{NP}$

j) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CB}$

k) $\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NF}$

l) $\overrightarrow{BL} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{PB}$

Solução

a) $\overrightarrow{AN}$ **c)** $\overrightarrow{AB}$ **e)** $\overrightarrow{AM}$ **g)** $\overrightarrow{AH}$ **i)** $\overrightarrow{AC}$ **k)** $\overrightarrow{AE}$

b) $\overrightarrow{AD}$ **d)** $\overrightarrow{AO}$ **f)** $\overrightarrow{AK}$ **h)** $\overrightarrow{AI}$ **j)** $\overrightarrow{AC}$ **l)** $\overrightarrow{AA} = 0$

2. Com base na Figura 1.13, determinar os vetores a seguir, expressando-os com origem no ponto A:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG}$

b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$

c) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EH}$

d) $\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{BC}$

e) $\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH}$

f) $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{FB}$

g) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

h) $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{FH}$

Solução

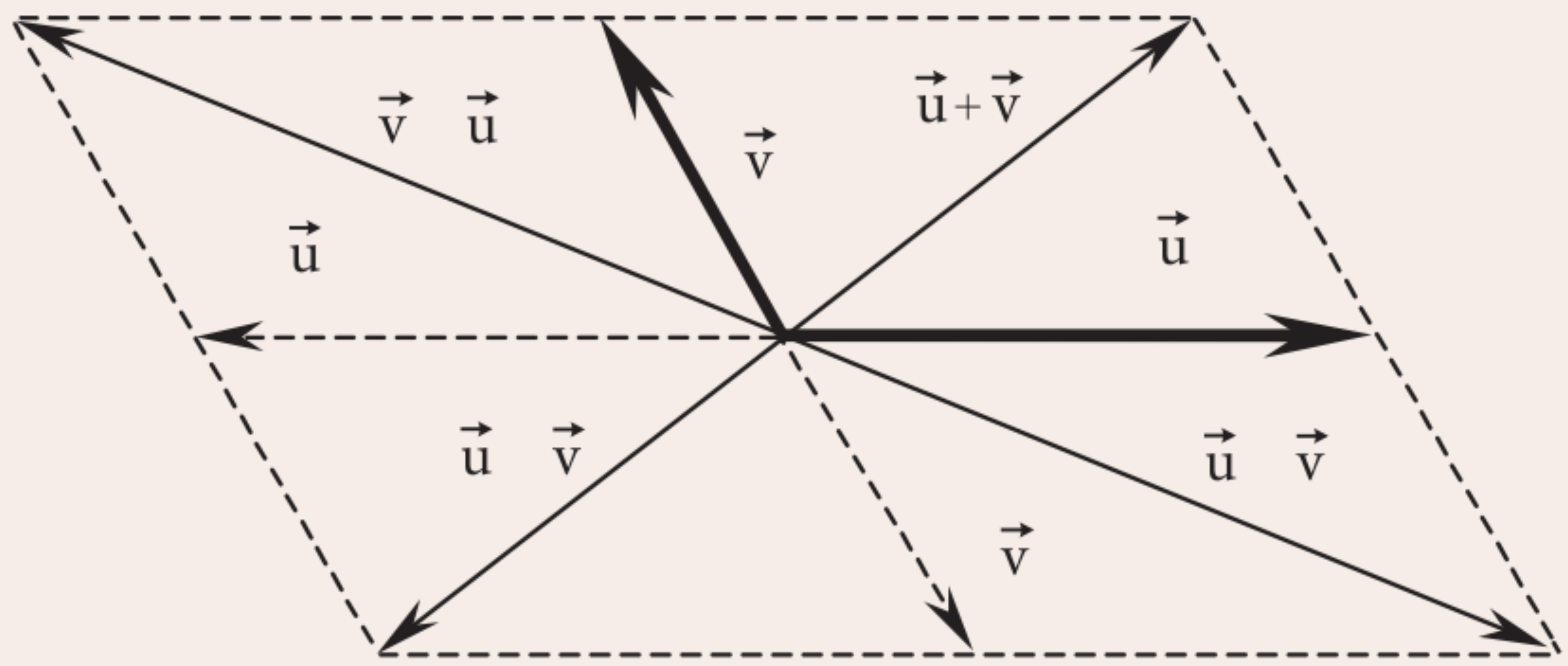
a) $\overrightarrow{AF}$ **c)** $\overrightarrow{AH}$ **e)** $\overrightarrow{AH}$ **g)** $\overrightarrow{AG}$

b) $\overrightarrow{AE}$ **d)** $\overrightarrow{AB}$ **f)** $\overrightarrow{AF}$ **h)** $\overrightarrow{AD}$

3. Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não paralelos, construir no mesmo gráfico os vetores $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $\vec{v}-\vec{u}$ e $-\vec{u}-\vec{v}$, todos com origem em um mesmo ponto.

Solução

Para os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da figura, tem-se:



4. Provar que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.

Solução

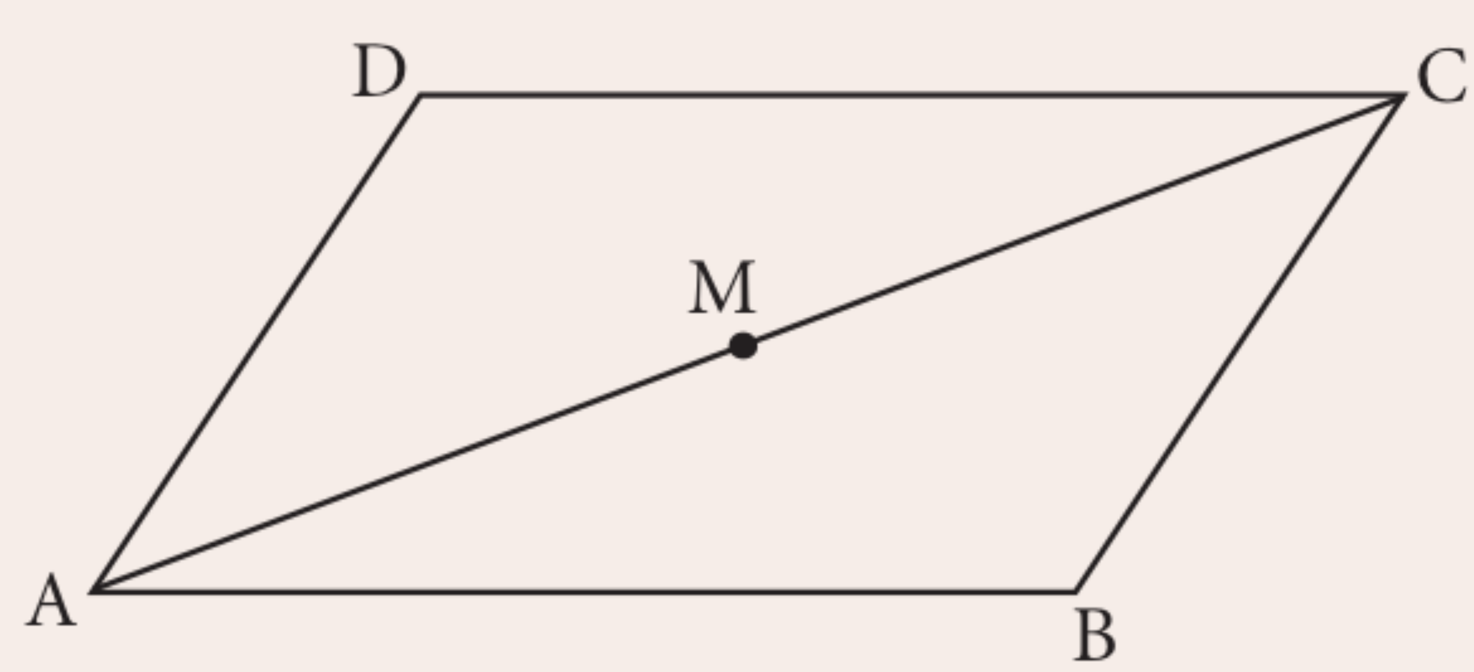


Figura 1.19

Consideremos o paralelogramo ABCD de diagonais AC e BD e seja M o ponto médio de AC (Figura 1.19), equivale dizer que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$. Vamos provar que M é também ponto médio de BD. Pela figura, tem-se

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM} \text{ (definição de soma)}\\ &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MA} \text{ (igualdade de vetores)}\\ &= \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD} \text{ (propriedade comutativa)}\\ &= \overrightarrow{MD} \text{ (definição de soma)}\end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MD}$, conclui-se que M é ponto médio de $\overrightarrow{BD}$.

Multiplicação de número real por vetor

Dado um vetor $\vec{v}\neq\vec{0}$ e um número real $\alpha\neq 0$, chama-se *produto do número real* α *pelo vetor* $\vec{v}$, o vetor $\alpha\vec{v}$ tal que:

a) módulo: $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$, ou seja, o comprimento $\alpha\vec{v}$ é igual ao comprimento de $\vec{v}$ multiplicado por $|\alpha|$;

b) direção: $\alpha\vec{v}$ é paralelo a $\vec{v}$;

c) sentido: $\alpha\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm o mesmo sentido se $\alpha > 0$ e contrário se $\alpha < 0$.

Se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha\vec{v} = \vec{0}$.

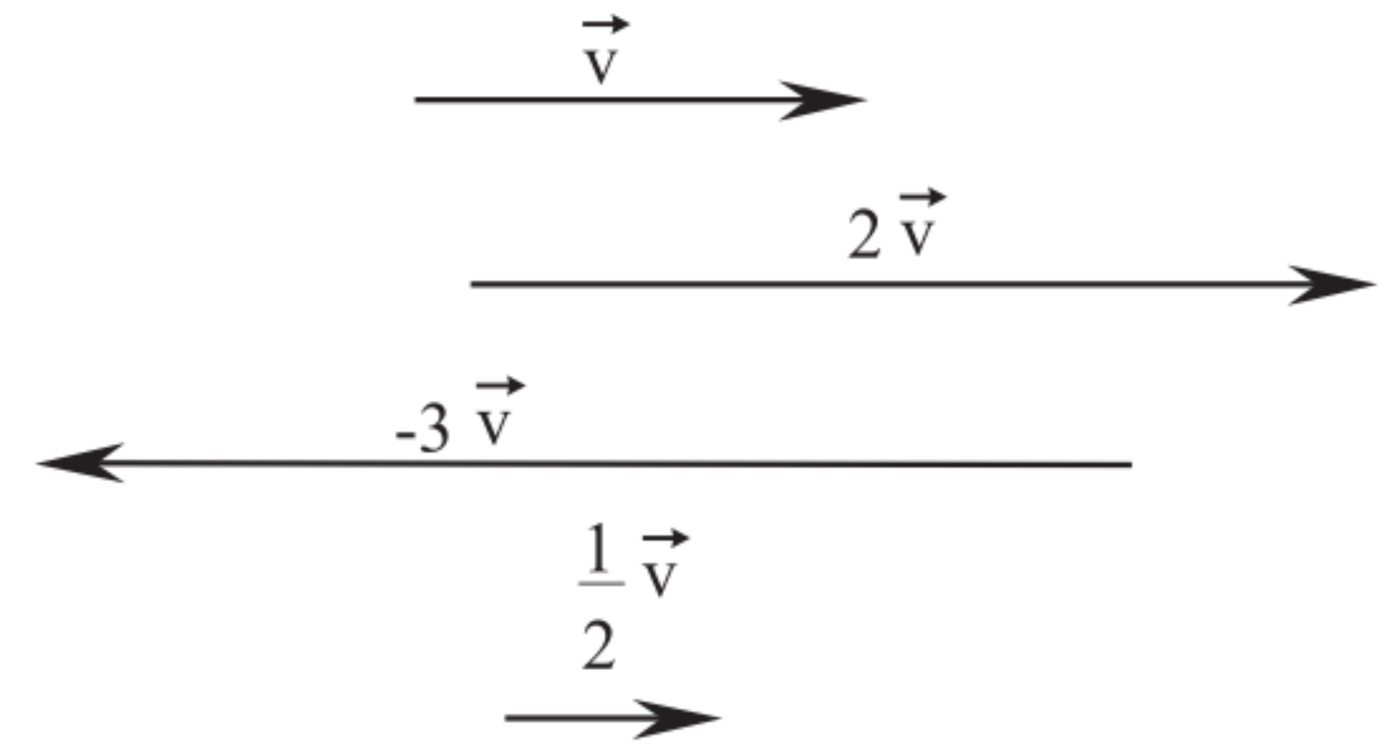


Figura 1.20

A Figura 1.20 apresenta o vetor $\vec{v}$ e alguns de seus múltiplos.

Observações

a) Considerando o ponto O como origem de $\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e de todos os vetores $\alpha\vec{v}$ que lhe são paralelos (Figura1.21), se fizermos α assumir todos os valores reais, teremos representados em uma só reta todos os vetores paralelos a $\vec{v}$.

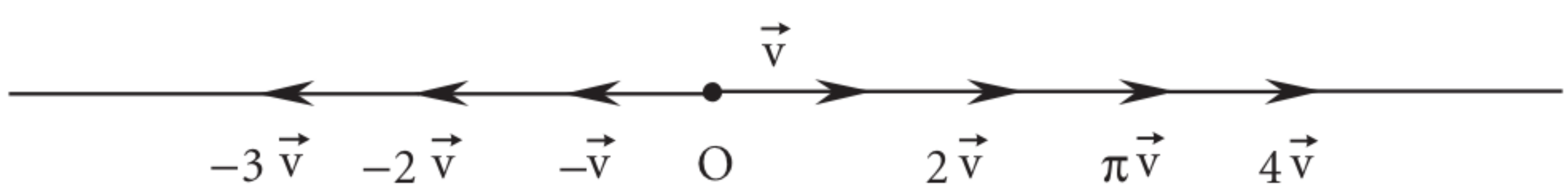


Figura 1.21

Por outro lado, supondo $\vec{u} \,//\, \vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, sempre existe um número real α tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$. Por exemplo, na Figura 1.22, na qual DC está dividido em cinco segmentos congruentes (de mesmo comprimento), em relação ao vetor $\overrightarrow{AB}$ ($|\overrightarrow{AB}| = 2$), tem-se

$$\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CD} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$$

Figura 1.22

b) Vimos em *Casos Particulares de Vetores*, Figura 1.8, que a cada vetor $\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, é possível associar dois vetores unitários paralelos a $\vec{v}$. O vetor unitário $\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$ ou $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ de mesmo sentido de $\vec{v}$ é o *versor* de $\vec{v}$.

Por exemplo,

se $|\vec{v}| = 5$, o versor de $\vec{v}$ é $\frac{\vec{v}}{5}$;

se $|\vec{v}| = \frac{1}{3}$, o versor de $\vec{v}$ é $3\vec{v}$;

se $|\vec{v}| = 10$, o versor de $-\vec{v}$ é $-\frac{\vec{v}}{10}$.

Exemplo

Seja o vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$. Determinar o vetor paralelo a $\vec{v}$ tal que:

a) tenha o mesmo sentido de $\vec{v}$ e módulo 5;

b) tenha sentido contrário ao de $\vec{v}$ e módulo 10.

Solução

A partir de um vetor arbitrário $\vec{v} \neq \vec{0}$ (Figura 1.23), é sempre possível associar os dois vetores paralelos e unitários: $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ (mesmo sentido de $\vec{v}$) e $-\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ (sentido contrário ao de $\vec{v}$). Logo, tem-se as soluções:

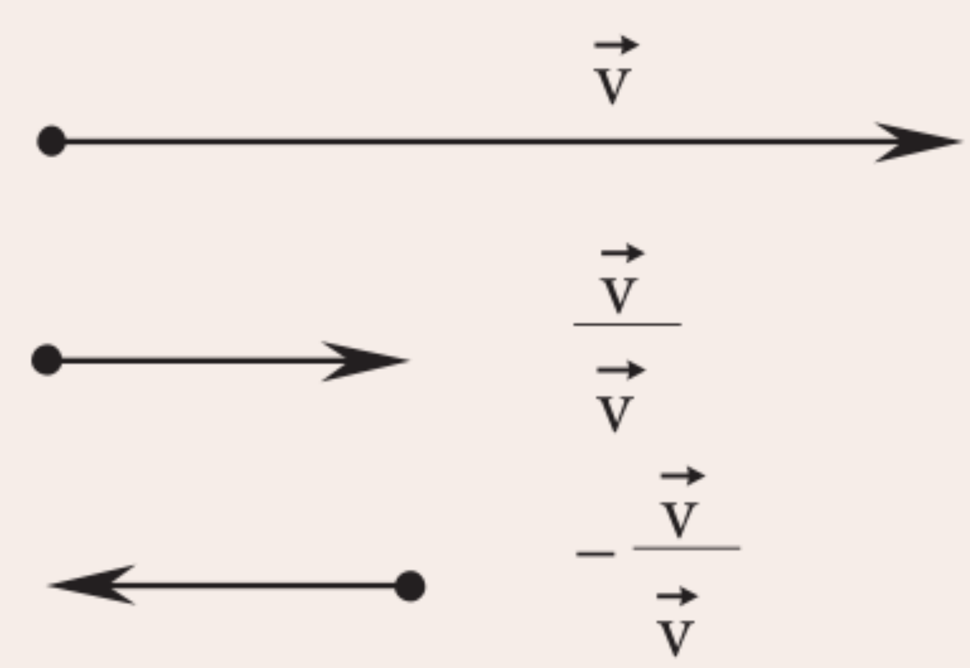


Figura 1.23

a) $\frac{5\vec{v}}{|\vec{v}|}$ e b) $-\frac{10\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores quaisquer e α e β números reais, a multiplicação de número real por vetor admite as propriedades:

I) $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$

II) $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$

III) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

IV) $1\vec{v} = \vec{v}$

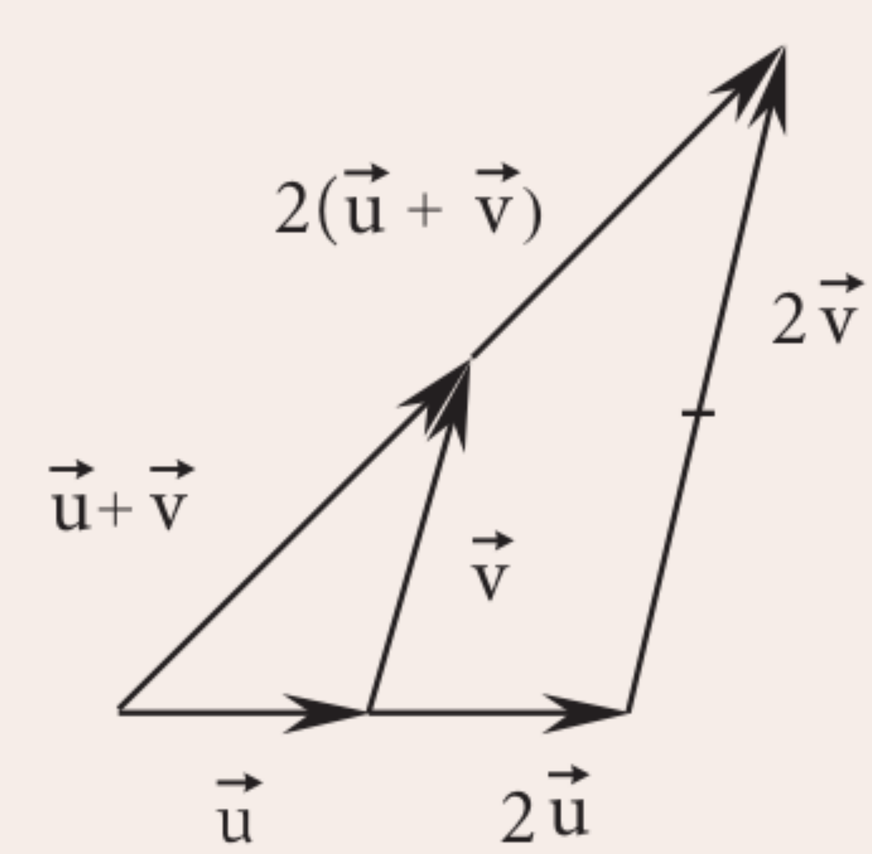


Figura 1.24

A Figura 1.24 ilustra a propriedade III para $\alpha = 2$, ou seja, $2(\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$.

Exemplos

1. Representados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ como na Figura 1.25(a), obter graficamente o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{x} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$.

Solução

Figura 1.25(b)

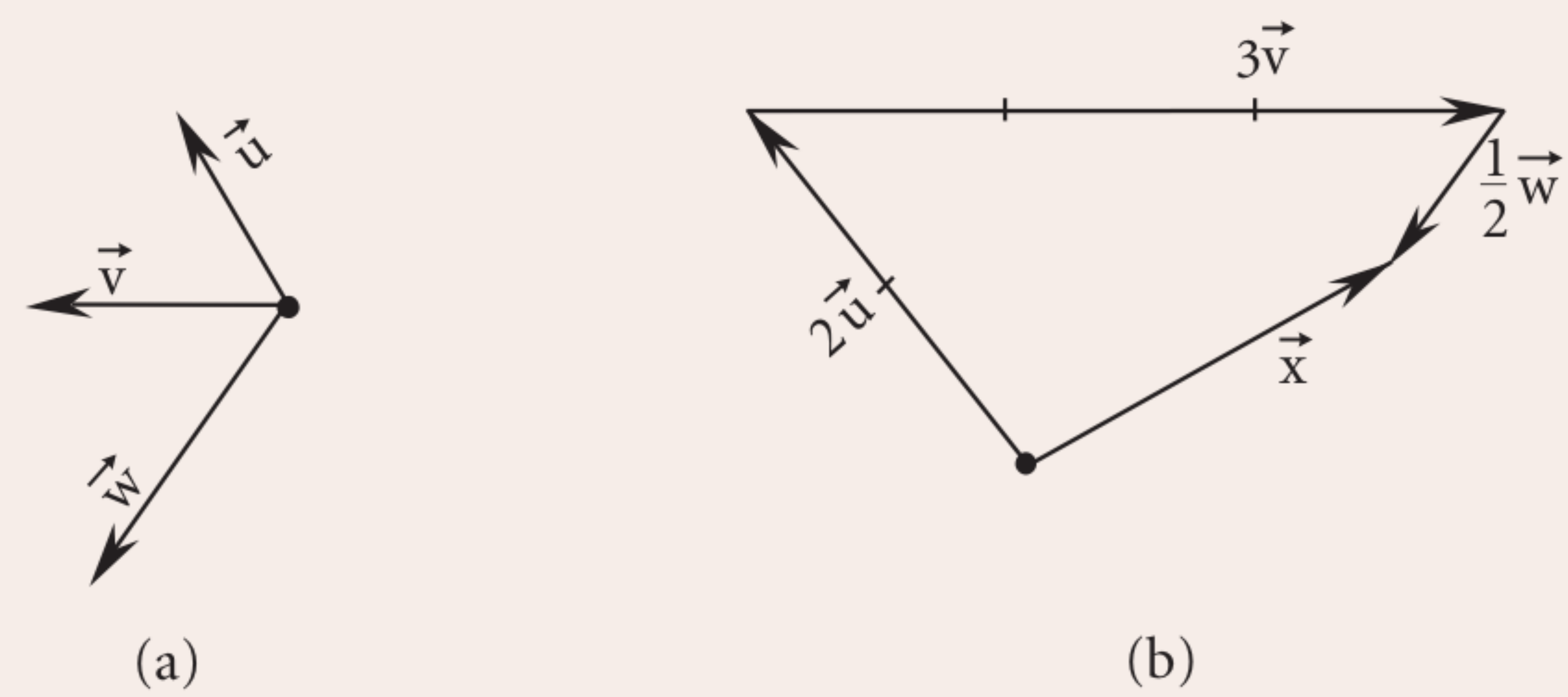


Figura 1.25

2. Demonstrar que o segmento cujos extremos são os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

Solução

Seja o triângulo ABC e M e N os pontos médios dos lados CA e CB, respectivamente (Figura 1.26).
Pela figura, tem-se

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

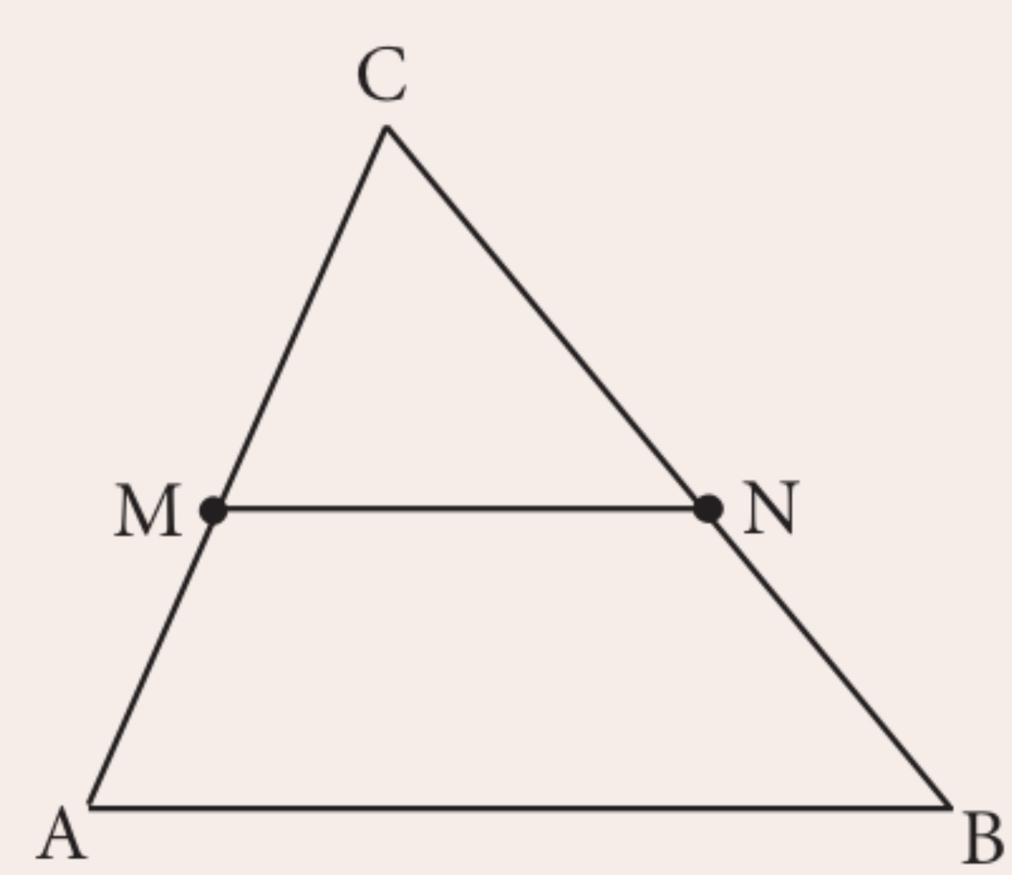


Figura 1.26

Portanto, $\overrightarrow{MN}$ // $\overrightarrow{AB}$ e $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$.

Ângulo de dois vetores

O *ângulo entre os vetores não nulos* $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o ângulo θ formado por duas semirretas OA e OB de mesma origem O (Figura 1.27), na qual $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ e $0 \le \theta \le \pi$ (θ em radianos) ou $0° \le \theta \le 180°$.

Se $\vec{u} // \vec{v}$ e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm o mesmo sentido, então $\theta = 0$. É o que ocorre, por exemplo, com os vetores $\vec{u}$ e $2\vec{u}$ que têm o mesmo sentido (Figura 1.28(a)).

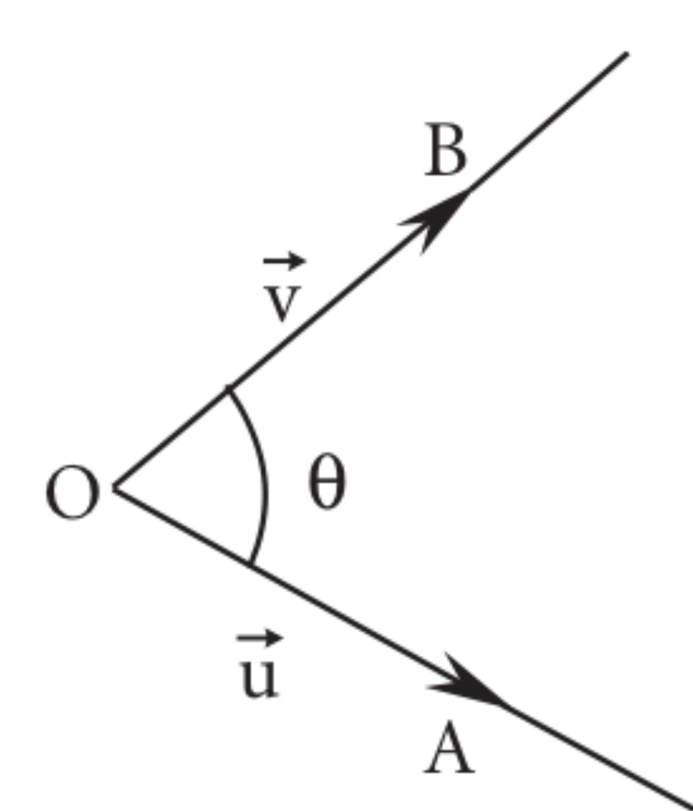


Figura 1.27

Se $\vec{u}//\vec{v}$ e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários, então $\theta = \pi$. É o caso de $\vec{u}$ e $-3\vec{u}$ (Figura 1.28(b)).

Figura 1.28

Problemas propostos

1. A Figura 1.29 apresenta o losango EFGH inscrito no retângulo ABCD, sendo O o ponto de interseção das diagonais desse losango. Decidir se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

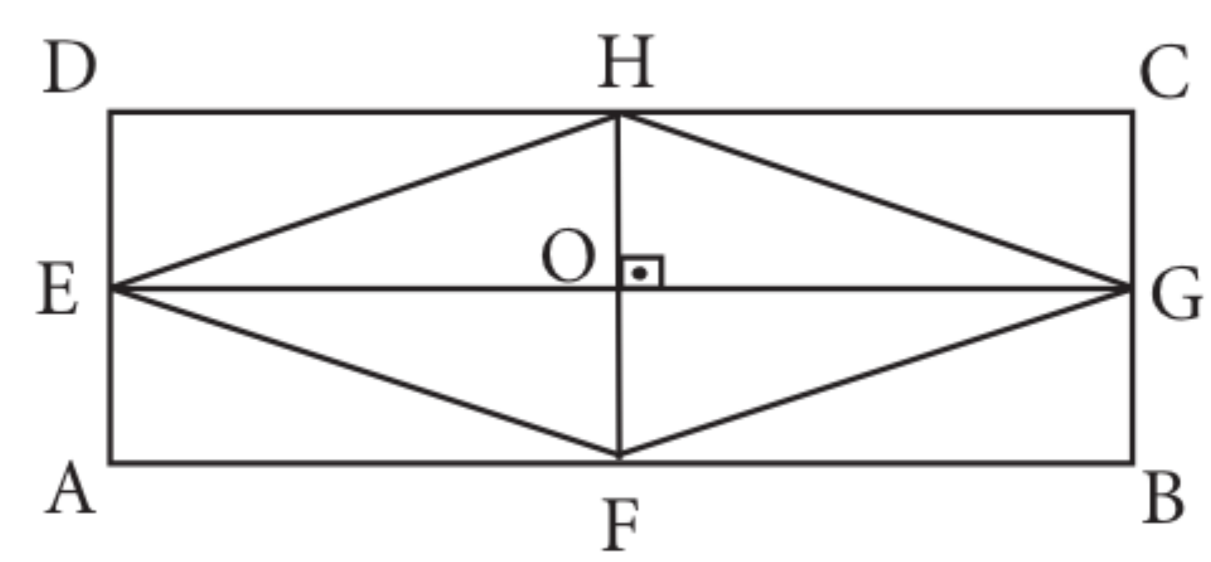


Figura 1.29

a) $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OG}$

b) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CH}$

c) $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{HG}$

d) $|C - O| = |O - B|$

e) $|H - O| = |H - D|$

f) $H - E = O - C$

g) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$

h) $|\overrightarrow{OA}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{DB}|$

i) $\overrightarrow{AF}$ // $\overrightarrow{CD}$

j) $\overrightarrow{GF}$ // $\overrightarrow{HG}$

k) $\overrightarrow{AO}$ // $\overrightarrow{OC}$

l) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OH}$

m) $\overrightarrow{EO} \perp \overrightarrow{CB}$

n) $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{HF}$

o) $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{FE}$

2. Decidir se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações:

a) Se $\vec{u} = \vec{v}$, então $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

b) Se $|\vec{u}| = |\vec{v}|$, então $\vec{u} = \vec{v}$.

c) Se $\vec{u}$ // $\vec{v}$, então $\vec{u} = \vec{v}$.

d) Se $\vec{u} = \vec{v}$, então $\vec{u}$ // $\vec{v}$.

e) Se $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, então $|\vec{w}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

f) $|\vec{w}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$, então $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos.

g) Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, então ABCD (vértices nesta ordem) é paralelogramo.

h) $|5\vec{v}| = |-5\vec{v}| = 5|\vec{v}|$.

i) Os vetores $3\vec{v}$ e $-4\vec{v}$ são paralelos e de mesmo sentido.

j) Se $\vec{u}$ // $\vec{v}$, $|\vec{u}| = 2$ e $|\vec{v}| = 4$, então $\vec{v} = 2\vec{u}$ ou $\vec{v} = -2\vec{u}$.

k) Se $|\vec{v}| = 3$, o versor de $-10\vec{v}$ é $-\frac{\vec{v}}{3}$.

3. Com base na Figura 1.29, determinar os vetores a seguir, expressando-os com origem no ponto A:

a) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CH}$

b) $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FG}$

c) $2\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AF}$

d) $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF}$

e) $\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{BG}$

f) $2\overrightarrow{OE} + 2\overrightarrow{OC}$

g) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}$

h) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}$

i) $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{HO}$

j) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{AO}$

4. O paralelogramo ABCD (Figura 1.30) é determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, sendo M e N pontos médios dos lados DC e AB, respectivamente. Determinar:

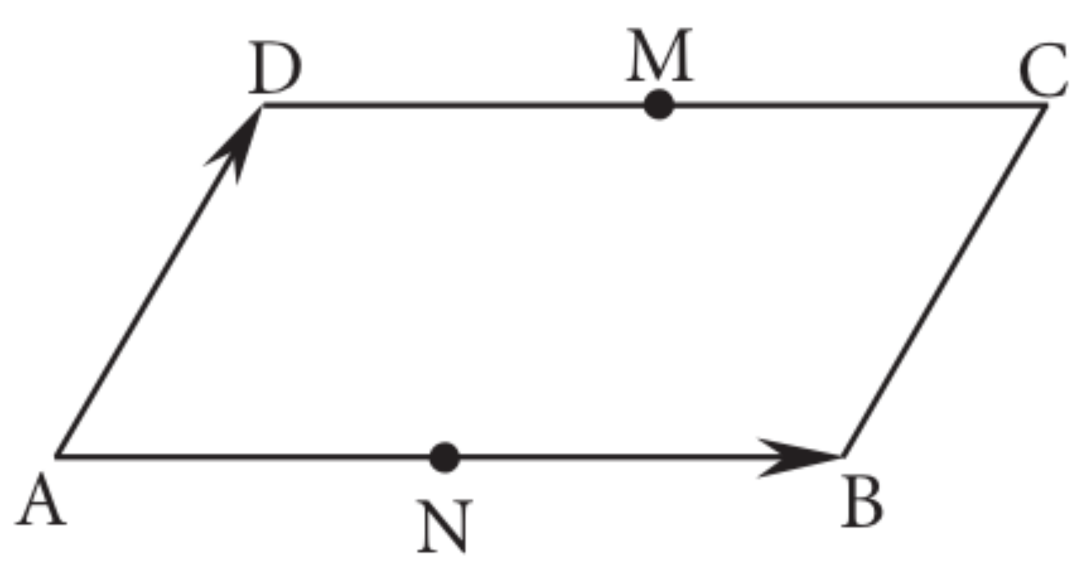


Figura 1.30

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$

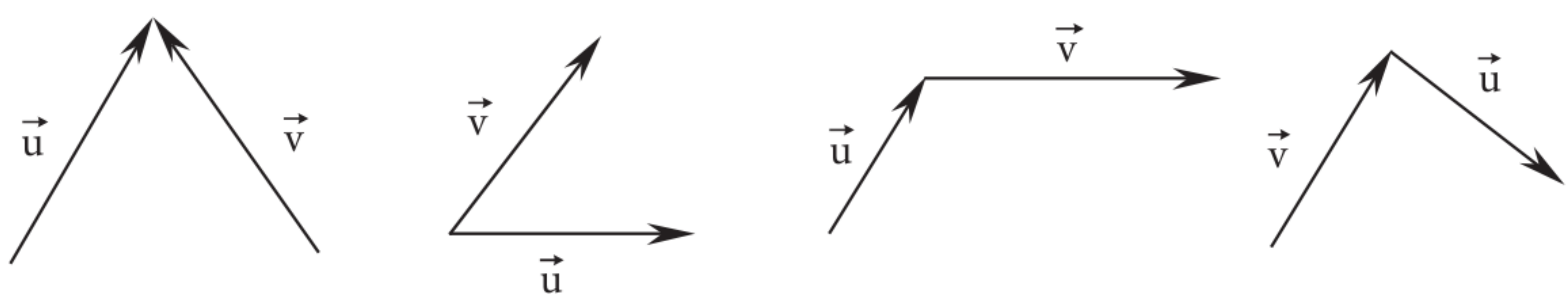
c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BC}$

e) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}$

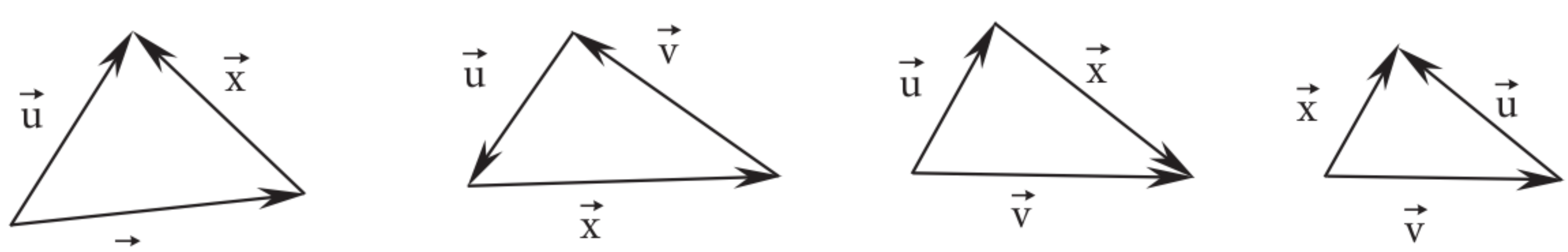
f) $\overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

5. Apresentar, graficamente, um representante do vetor $\vec{u} - \vec{v}$ nos casos:



(a) (b) (c) (d)

6. Determinar o vetor $\vec{x}$ nas figuras:



(a) (b) (c) (d)

7. Dados três pontos A, B e C não colineares, como na Figura 1.31, representar o vetor $\vec{x}$ nos casos:

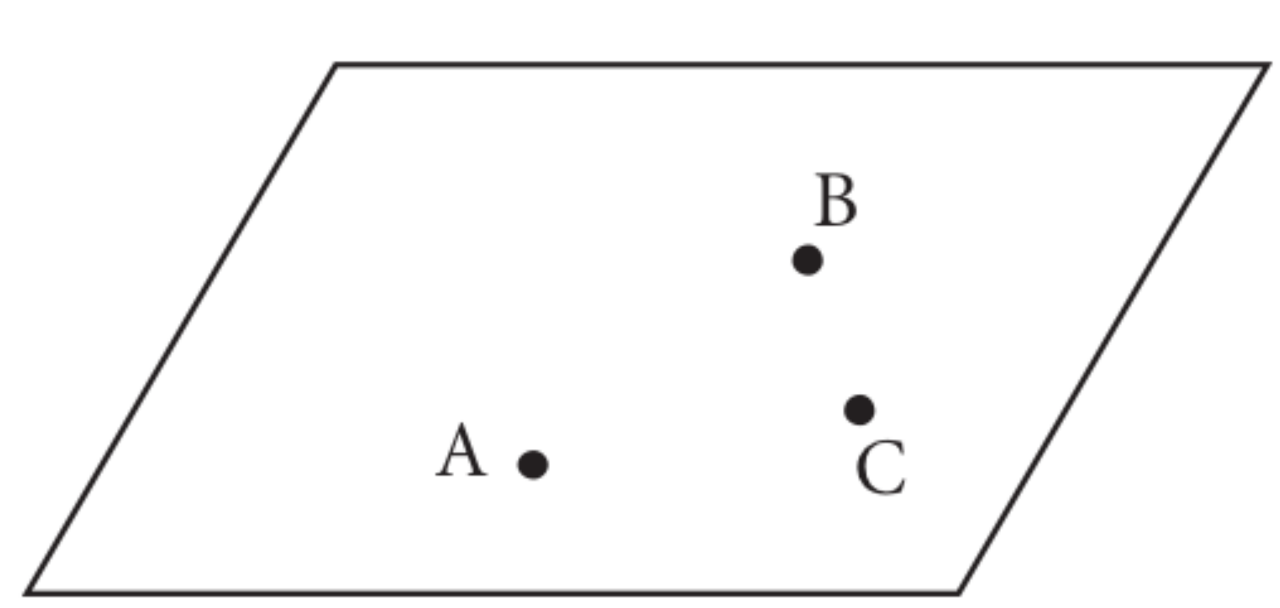


Figura 1.31

a) $\vec{x} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$

b) $\vec{x} = 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BA}$

c) $\vec{x} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$

d) $\vec{x} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CB}$

8. Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da Figura 1.32, mostrar, em um gráfico, um representante do vetor

a) $\vec{u} - \vec{v}$

b) $\vec{v} - \vec{u}$

c) $-\vec{v} - 2\vec{u}$

d) $2\vec{u} - 3\vec{v}$

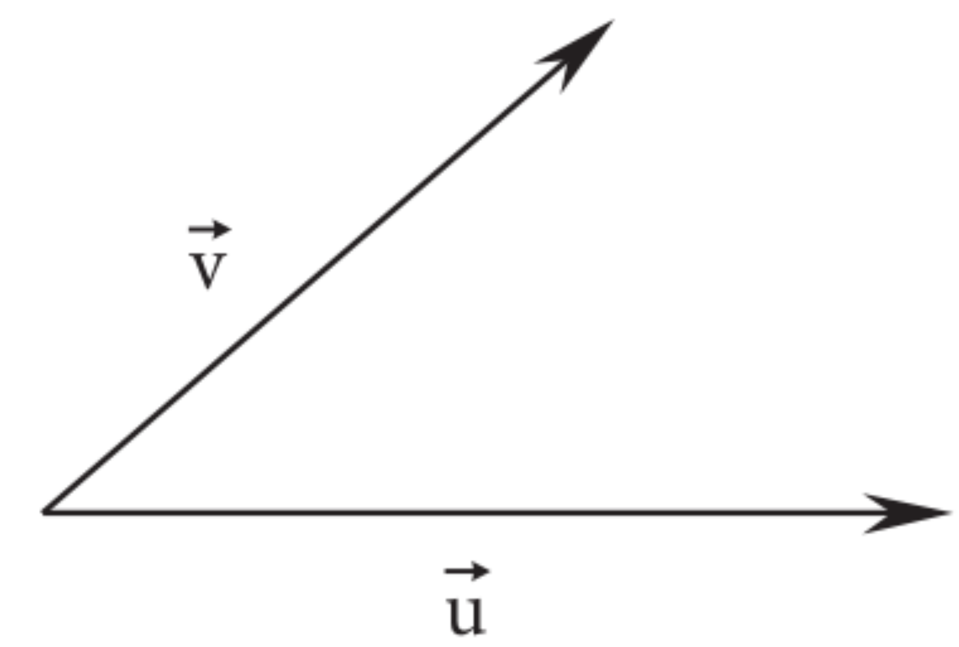


Figura 1.32

9. No triângulo ABC (Figura 1.33), seja $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ e $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Construir um representante de cada um dos vetores

a) $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

b) $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$

c) $\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$

d) $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

e) $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

f) $\frac{1}{3}\vec{a} - 2\vec{b}$

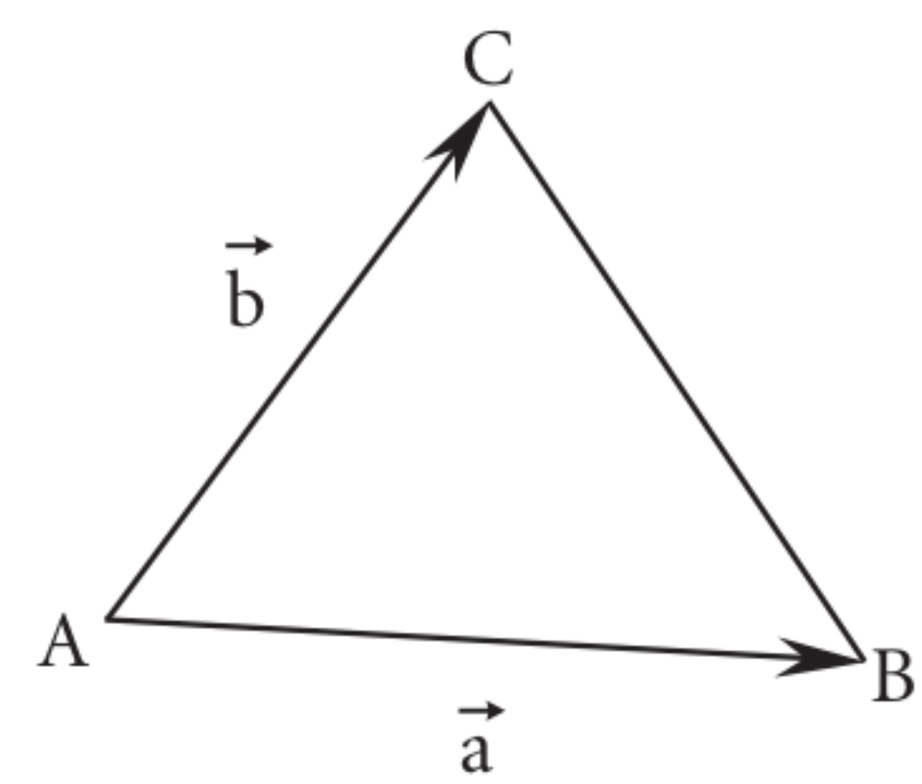


Figura 1.33

10. Dados os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ (Figura 1.34), apresentar graficamente um representante do vetor $\vec{x}$ tal que

a) $\vec{x} = 4\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$

b) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \vec{x} = \vec{0}$

c) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{x} = 2\vec{b}$

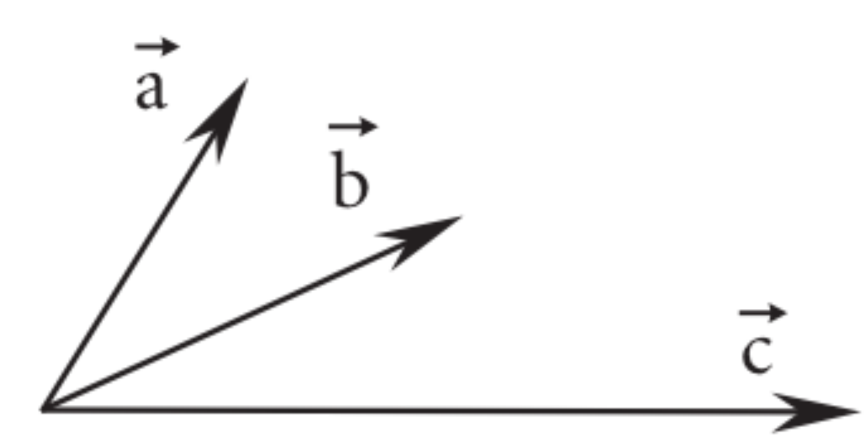


Figura 1.34

11. Na Figura 1.35 estão representados os vetores coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Indicar, na própria figura, os vetores

a) $a\vec{v}$ e $b\vec{w}$ tal que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$

b) $\alpha\vec{u}$ e $\beta\vec{w}$ tal que $\vec{v} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}$

Seria possível realizar este exercício no caso de os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ serem *não* coplanares?

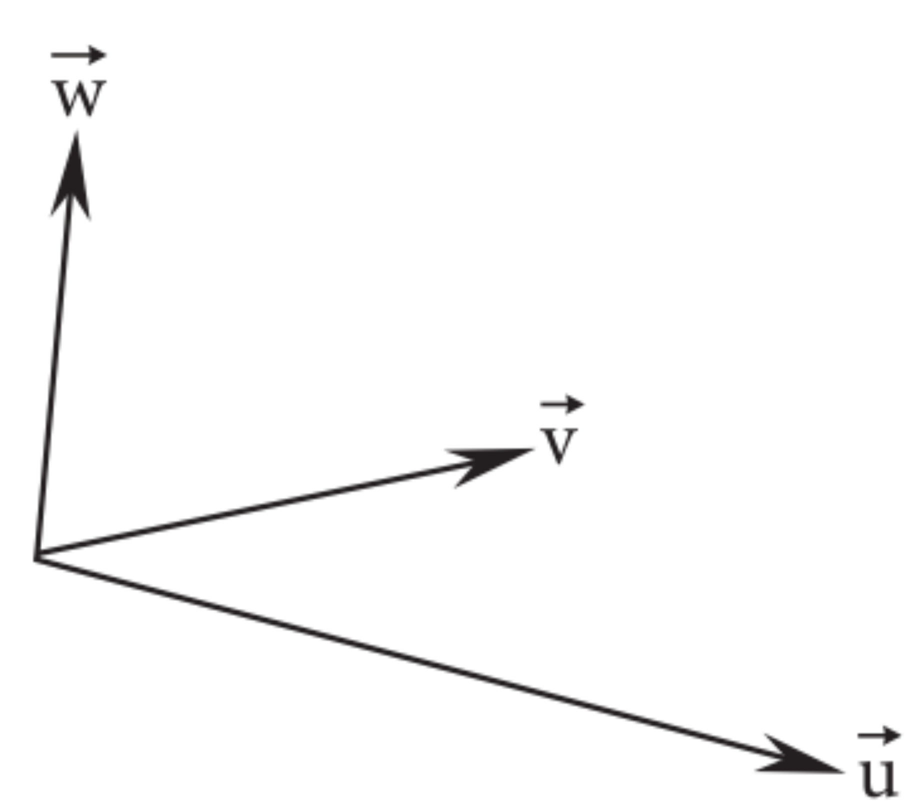


Figura 1.35

12. Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60°, determinar o ângulo formado pelos vetores

a) $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ **b)** $-\vec{u}$ e $2\vec{v}$ **c)** $-\vec{u}$ e $-\vec{v}$ **d)** $3\vec{u}$ e $5\vec{v}$

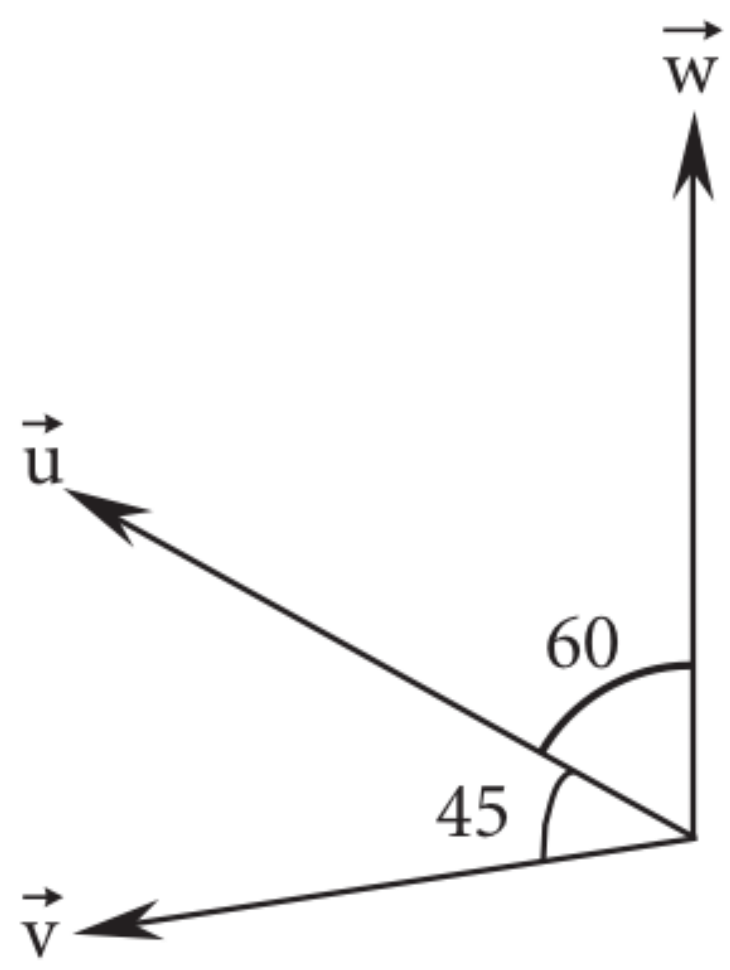


Figura 1.36

13. Dados os vetores coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ representados na Figura 1.36, determinar

a) um representante do vetor $\vec{x} + \vec{y}$, sendo $\vec{x} = \vec{u} + 2\vec{v}$ e $\vec{y} = \vec{v} - 2\vec{u}$;

b) o ângulo entre os vetores $-3\vec{v}$ e $\vec{w}$;

c) o ângulo entre os vetores $-2\vec{u}$ e $-\vec{w}$.

14. Demonstrar que os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo.

15. Demonstrar que o segmento de extremos nos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e igual à sua semissoma.

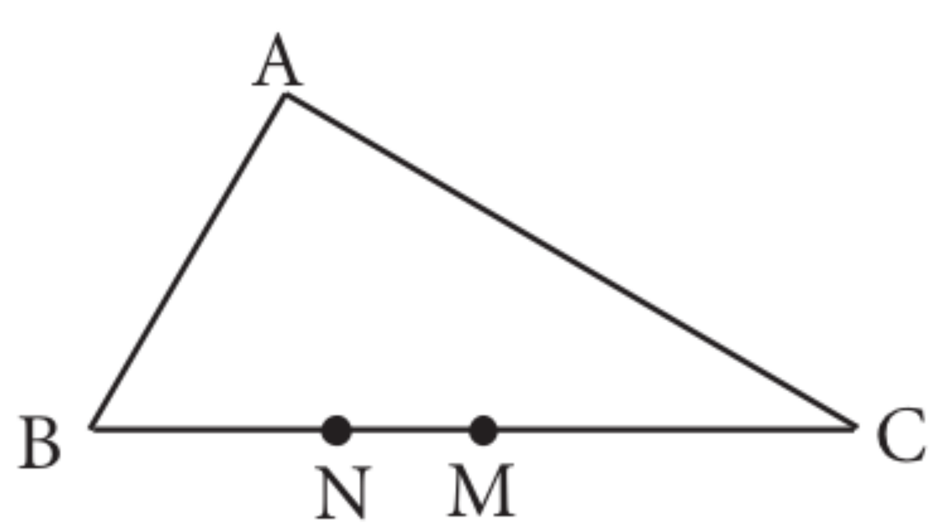


Figura 1.37

16. No triângulo ABC (Figura 1.37), tem-se $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Expressar os vetores $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{AN}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Respostas de problemas propostos

1. **a)** V **b)** F **c)** V **d)** V **e)** F **f)** F **g)** V **h)** V **i)** V **j)** F **k)** V **l)** V **m)** V **n)** F **o)** V

2. **a)** V **b)** F **c)** F **d)** V **e)** F **f)** V **g)** V **h)** V **i)** F **j)** V **k)** V

3. **a)** $\overrightarrow{AE}$ **b)** $\overrightarrow{AE}$ **c)** $\overrightarrow{AE}$ **d)** $\overrightarrow{AB}$ **e)** $\overrightarrow{AE}$ **f)** $\overrightarrow{AE}$ **g)** $\overrightarrow{AH}$ **h)** $\overrightarrow{AE}$ **i)** $\overrightarrow{AE}$ **j)** $\overrightarrow{AC}$

4. **a)** $\overrightarrow{AE}$ **b)** $\overrightarrow{AE}$ **c)** $\overrightarrow{AE}$ **d)** $\overrightarrow{AE}$ **e)** $\overrightarrow{AE}$ **f)** $\overrightarrow{AE}$

6. **a)** $\vec{u} - \vec{v}$ **b)** $-\vec{u} - \vec{v}$ **c)** $\vec{v} - \vec{u}$ **d)** $\vec{u} + \vec{v}$

11. Não

12. **a)** 120° **b)** 120° **c)** 60° **d)** 60°

13. **b)** 75° **c)** 60°

16. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ e $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

O TRATAMENTO ALGÉBRICO

Vetores no plano

Consideremos dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não paralelos, representados com a origem no mesmo ponto O, sendo r_1 e r_2 retas contendo esses representantes, respectivamente, (Figura 1.38).

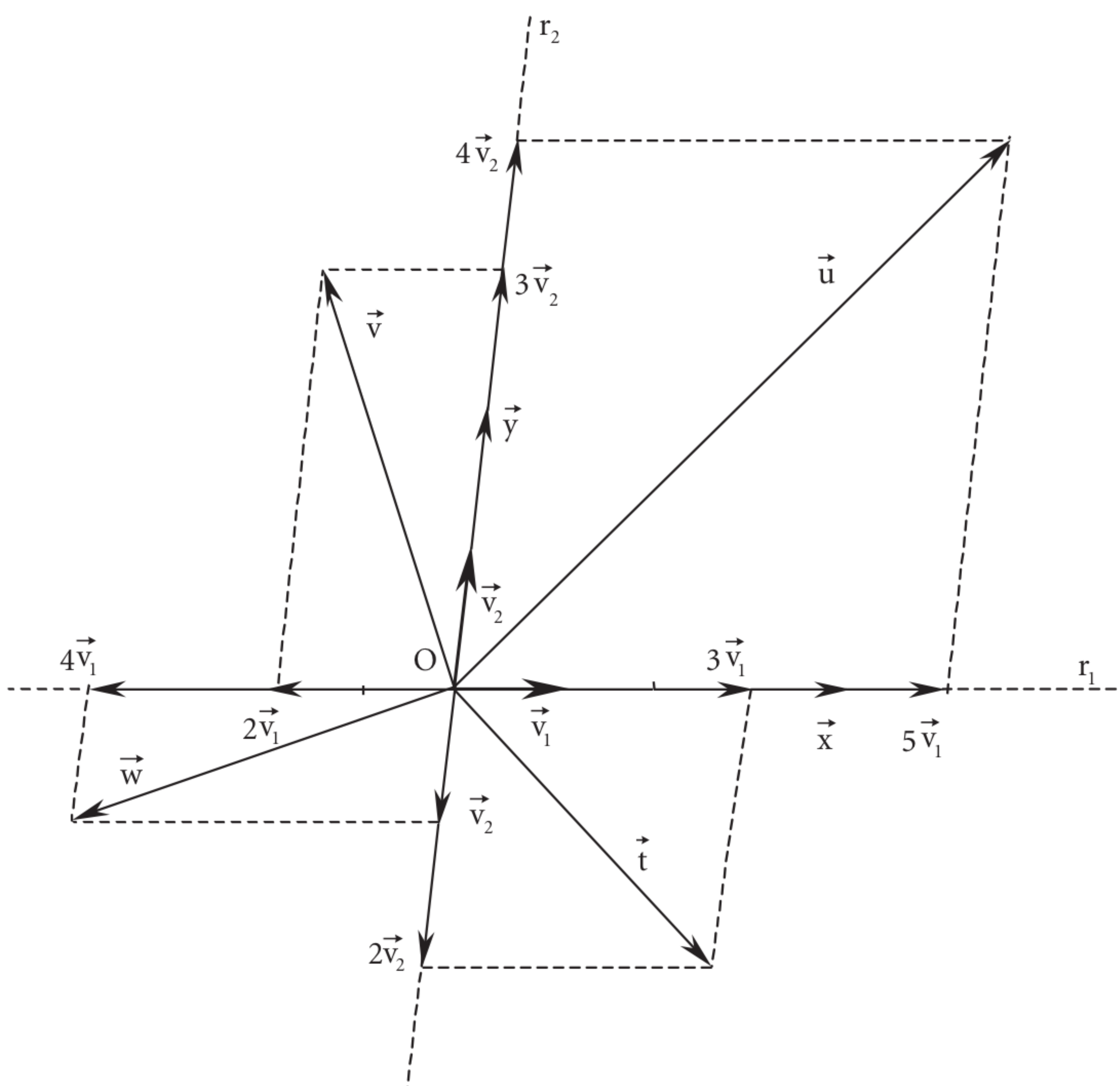


Figura 1.38

Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{t}$, $\vec{x}$ e $\vec{y}$, representados na figura, são expressos em função de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ por

$$\vec{u} = 5\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2 \qquad \vec{t} = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$$
$$\vec{v} = -2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 \qquad \vec{x} = 4\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2$$
$$\vec{w} = -4\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 \qquad \vec{y} = 0\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$$

De modo geral, dados dois vetores quaisquer $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não paralelos, para cada vetor $\vec{v}$ representado no mesmo plano de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, existe uma só dupla de números reais a_1 e a_2 tal que

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \qquad \textbf{(1)}$$

A Figura 1.39 ilustra essa situação, na qual $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são vetores não paralelos quaisquer e $\vec{v}$ é um vetor arbitrário do plano determinado por $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$

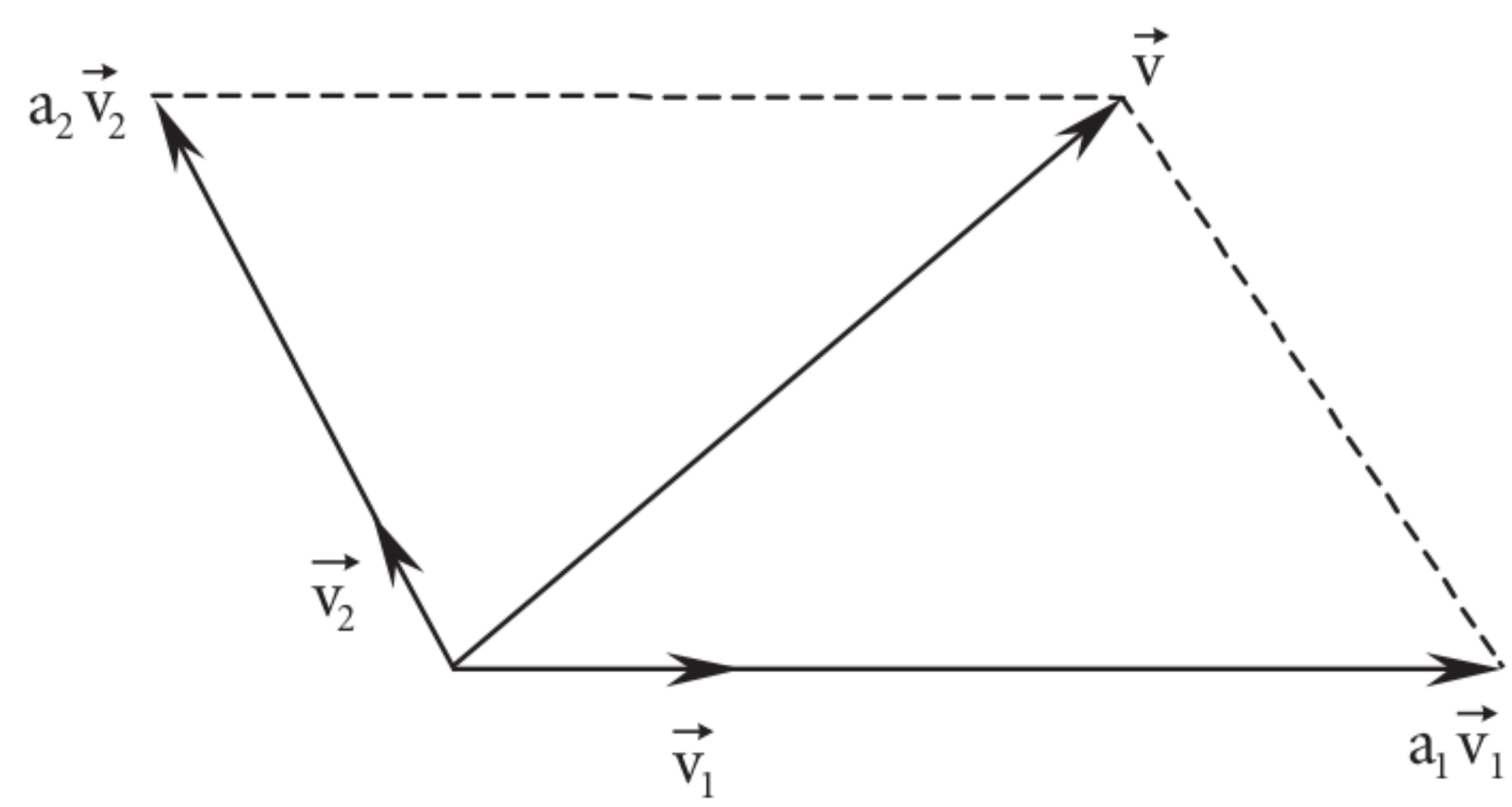


Figura 1.39

Quando o vetor $\vec{v}$ é expresso como em **(1)**, diz-se que $\vec{v}$ é *combinação linear* de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. O conjunto $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é chamado *base no plano*. Aliás, qualquer conjunto de dois vetores não paralelos constitui uma *base no plano*. Embora estejamos simbolizando a base como um conjunto, a pensamos como um conjunto ordenado. Então, dada uma base qualquer no plano, todo vetor desse plano é combinação linear dos vetores dessa base, de modo único.

Os números a_1 e a_2 da igualdade **(1)** são chamados *componentes* ou *coordenadas* de $\vec{v}$ na base B (a_1 é a primeira componente, e a_2, a segunda).

O vetor $\vec{v}$ da igualdade **(1)** pode ser representado também por $\vec{v} = (a_1, a_2)_B$ ou $\vec{v}_B = (a_1, a_2)$.

Na prática, as bases mais utilizadas são as *ortonormais.*

Uma base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ é dita ortonormal se seus vetores forem ortogonais e unitários, ou seja, se $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ e $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$.

Entre as infinitas bases ortonormais no plano, uma delas é particularmente importante. Trata-se da base que *determina o conhecido sistema cartesiano ortogonal* xOy. Os vetores ortogonais e unitários, neste caso, são simbolizados por $\vec{i}$ e $\vec{j}$ ambos com origem em O e extremidades em (1, 0) e (0, 1), respectivamente (Figura 1.40), sendo a base $C = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ chamada *canônica*. Portanto, $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$.

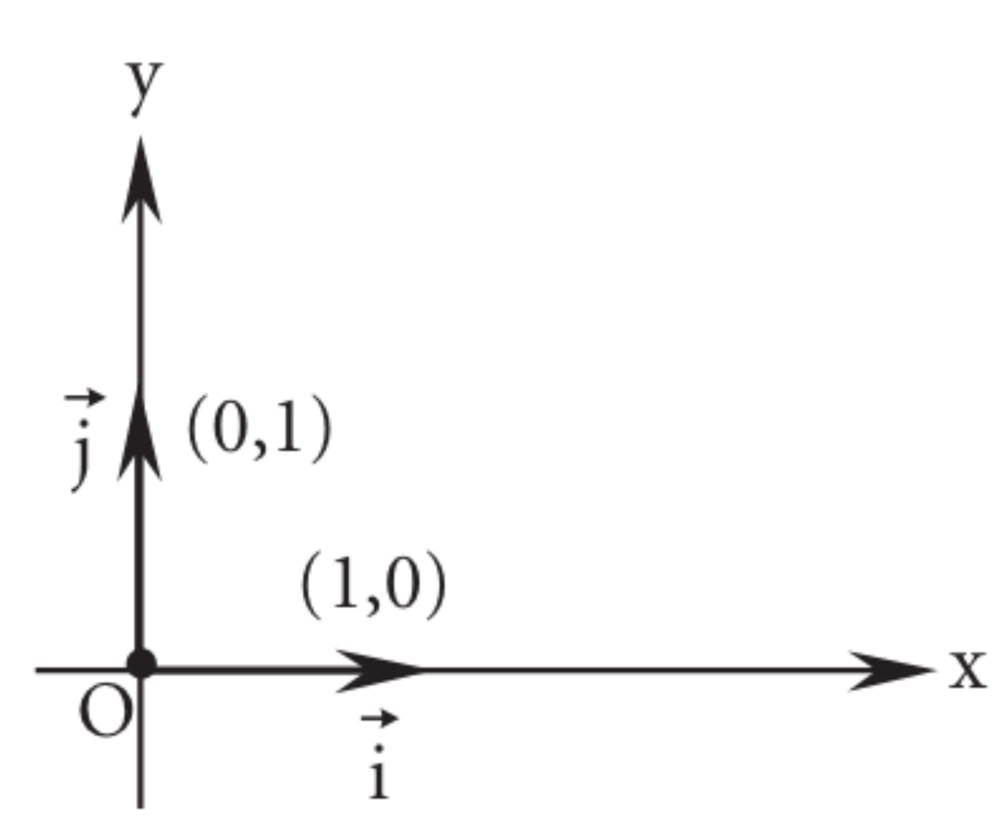


Figura 1.40

Daqui por diante, trataremos somente da base canônica.

Dado um vetor $\vec{v}$ qualquer do plano (Figura 1.41), existe uma só dupla de números x e y tal que

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} \qquad \textbf{(2)}$$

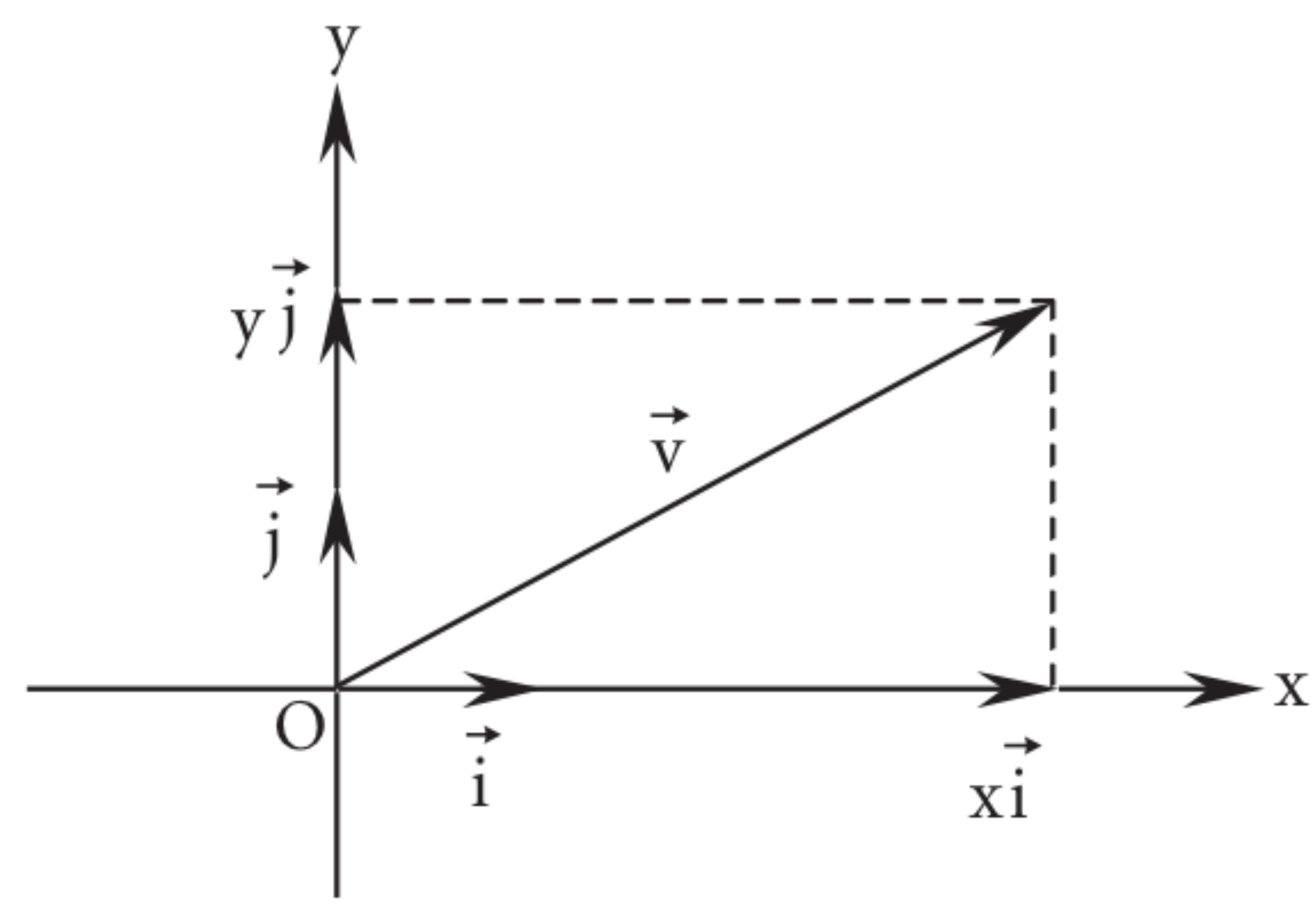


Figura 1.41

Os números x e y são as *componentes de* $\vec{v}$ *na base canônica.* A primeira componente é chamada *abscissa* de $\vec{v}$, e a segunda componente y é a *ordenada* de $\vec{v}$.

O vetor $\vec{v}$ em **(2)** é também representado por

$$\vec{v} = (x\,,\,y) \qquad \textbf{(3)}$$

dispensando-se a referência à base canônica C.

A igualdade **(3)** sugere a definição:

Vetor no plano é um par ordenado (x, y) de números reais.

O par (x, y) é chamado *expressão analítica* de $\vec{v}$. Para exemplificar, veja a seguir alguns vetores e suas correspondentes expressões analíticas:

$3\vec{i} - 5\vec{j} = (3, -5)$ $\qquad$ $-4\vec{i} = (-4, 0)$

$3\vec{j} = (0, 3)$ $\qquad$ $\vec{0} = (0, 0)$

Observação

A escolha proposital da base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ deve-se exclusivamente à simplificação. A cada ponto P(x, y) do plano xOy corresponde o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (Figura 1.42). Quer dizer que as coordenadas do ponto extremo P são as próprias componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$ na base canônica. Em geral, deixa-se de indicar nos eixos os vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ como se vê na figura.

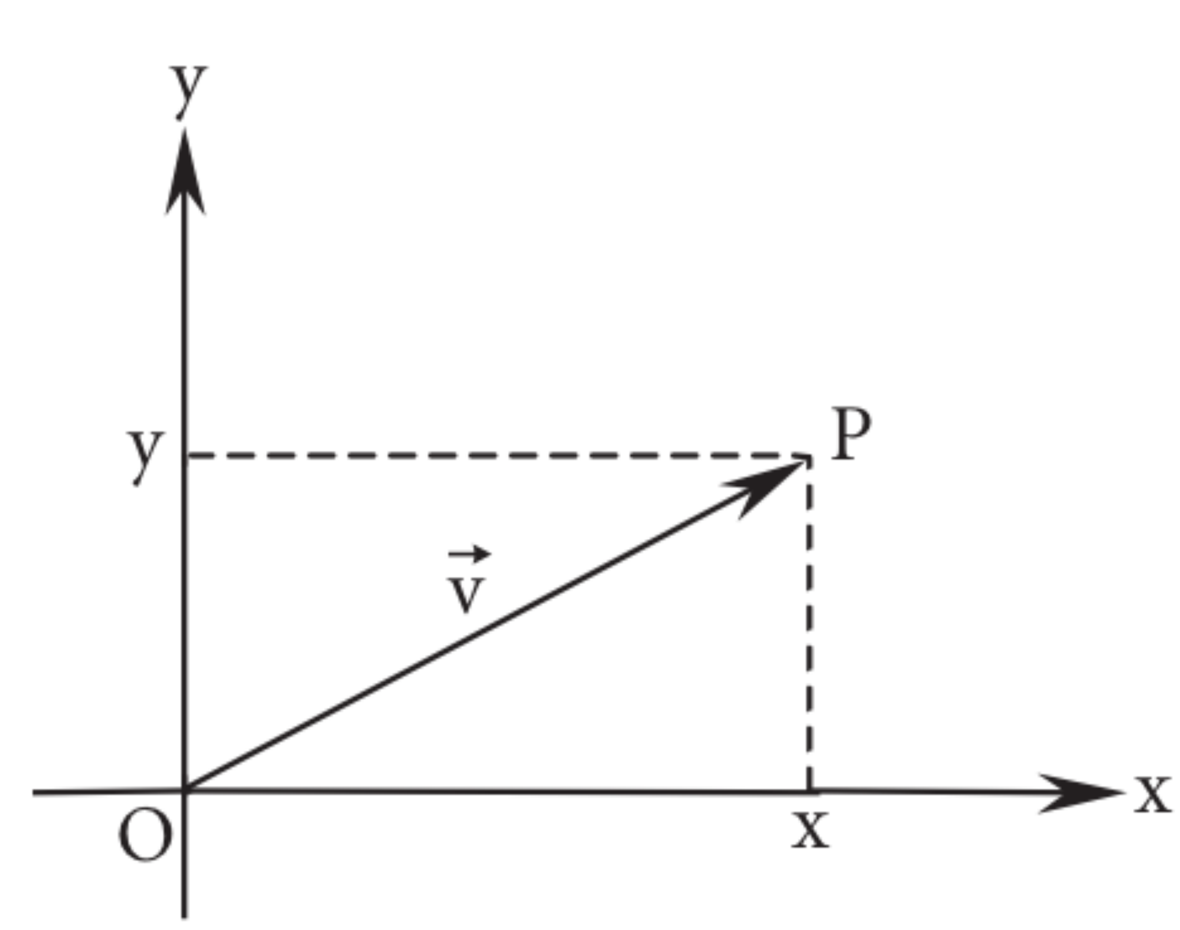


Figura 1.42

De acordo com as considerações feitas, o plano pode ser encarado como um conjunto de pontos ou um conjunto de vetores.

Igualdade de vetores

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, escrevendo-se $\vec{u} = \vec{v}$.

Exemplo

O vetor $\vec{u} = (x + 1, 4)$ é igual ao vetor $\vec{v} = (5, 2y - 6)$ se $x + 1 = 5$ e $2y - 6 = 4$ ou $x = 4$ e $y = 5$. Assim, se $\vec{u} = \vec{v}$, então $x = 4$, $y = 5$ e $\vec{u} = \vec{v} = (5, 4)$.

Operações com vetores

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Define-se:

1) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

2) $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

Portanto, para somar dois vetores, somam-se as correspondentes coordenadas, e para multiplicar um número real por um vetor, multiplica-se cada componente do vetor por este número.

As Figuras 1.43(a) e 1.43(b) ilustram as definições das operações dadas anteriormente.

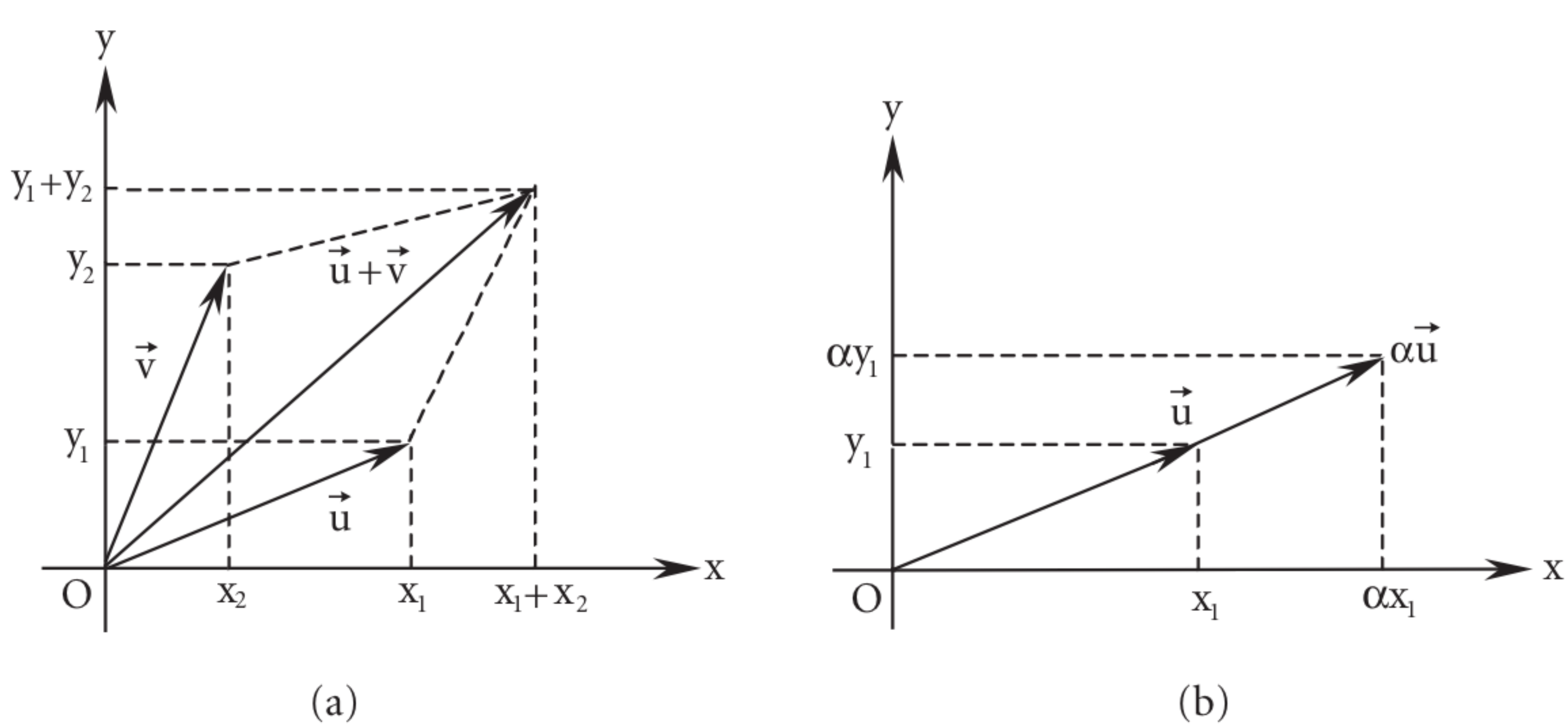


Figura 1.43

Considerando esses mesmos vetores, tem-se ainda:

$-\vec{u} = (-1)\vec{u} = (-x_1, -y_1)$

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

As definições anteriores e as operações algébricas dos números reais permitem demonstrar as propriedades:

a) para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, tem-se

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ $\qquad$ $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ $\qquad$ $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

b) para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e os números reais α e β, tem-se

$\alpha(\beta\vec{v})\ r = (\alpha\beta)\vec{v}$ $\qquad$ $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ $\qquad$ $1\vec{v} = \vec{v}$

Sugerimos, como exercício ao leitor, demonstrar essas propriedades.

Exemplos

1. Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (-1, 4)$, determinar $3\vec{u} + 2\vec{v}$ e $3\vec{u} - 2\vec{v}$.

Solução

$$3\vec{u} + 2\vec{v} = 3(2\,, -3) + 2(-1, 4) = (6, -9) + (-2, 8) = (6 - 2, -9 + 8) = (4, -1)$$

$$3\vec{u} - 2\vec{v} = 3(2\,, -3) - 2(-1, 4) = (6, -9) + (2, -8) = (6 + 2, -9 - 8) = (8, -17)$$

2. Determinar o vetor $\vec{x}$ na igualdade $3\vec{x} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{x}$, sendo dados $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-2, 4)$.

Solução

Esta equação, em vista das propriedades das operações com vetores expostas anteriormente, pode ser resolvida como uma equação numérica:

$$6\vec{x} + 4\vec{u} = \vec{v} + 2\vec{x}$$
$$6\vec{x} - 2\vec{x} = \vec{v} - 4\vec{u}$$
$$4\vec{x} = \vec{v} - 4\vec{u}$$
$$\vec{x} = \frac{1}{4}\vec{v} - \vec{u}$$

Substituindo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nesta equação, vem

$$\vec{x} = \frac{1}{4}(-2, 4) - (3, -1)$$
$$= (-\frac{1}{2}, 1) + (-3, 1)$$
$$= (-\frac{1}{2} - 3, 1 + 1)$$
$$= (-\frac{7}{2}, 2)$$

3. Encontrar os números a_1 e a_2 tais que

$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$, sendo $\vec{v} = (10, 2)$, $\vec{v}_1 = (3, 5)$ e $\vec{v}_2 = (-1, 2)$.

Solução

Substituindo os vetores na igualdade anterior, temos

$(10, 2) = a_1(3, 5) + a_2(-1, 2)$

$(10, 2) = (3a_1, 5a_1) + (-a_2, 2a_2)$

$(10, 2) = (3a_1 - a_2, 5a_1 + 2a_2)$

Da condição de igualdade de dois vetores, conclui-se que

$$\begin{cases} 3a_1 - a_2 = 10 \\ 5a_1 + 2a_2 = 2 \end{cases}$$

sistema cuja solução é dada por $a_1 = 2$ e $a_2 = -4$. Logo, $\vec{v} = 2\vec{v}_1 - 4\vec{v}_2$.

É conveniente observar que esse sistema sempre terá solução única no caso de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ formarem base do plano, o que realmente acontece.

Vetor definido por dois pontos

Consideremos o vetor $\overrightarrow{AB}$ de origem no ponto $A(x_1, y_1)$ e extremidade em $B(x_2, y_2)$ (Figura 1.44).

De acordo com o que foi visto em **(3)**, os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ têm expressões analíticas:

$\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$.

Por outro lado, do triângulo OAB da figura, vem

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

donde

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

ou

$\overrightarrow{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$

e

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)}$$

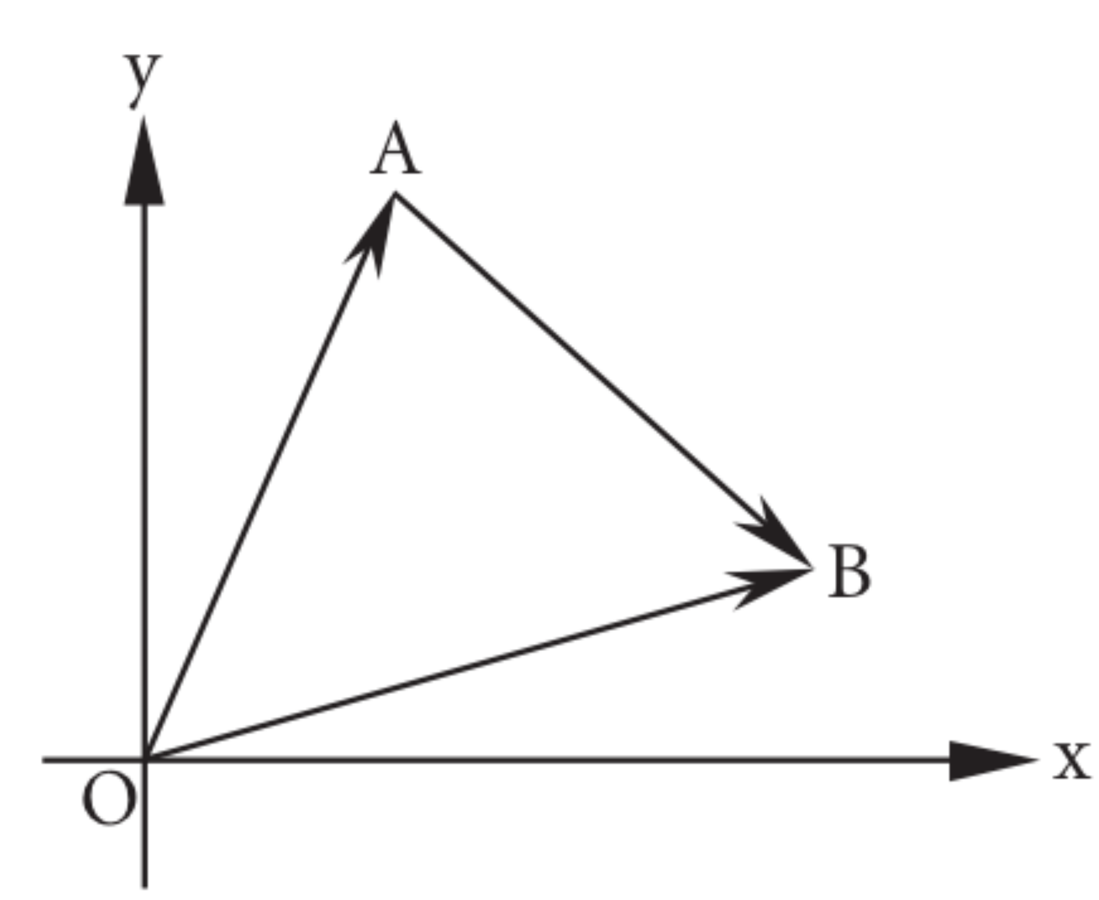


Figura 1.44

ou seja, as componentes de $\overrightarrow{AB}$ são obtidas subtraindo-se das coordenadas da extremidade B as coordenadas da origem A, razão pela qual também se escreve $\overrightarrow{AB} = B - A$.

É importante lembrar que um vetor tem infinitos representantes que são os segmentos orientados de mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. E, entre os infinitos representantes do vetor $\overrightarrow{AB}$, o que "melhor o caracteriza" é aquele que tem origem em $O(0, 0)$ e extremidade em $P(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ (Figura 1.45).

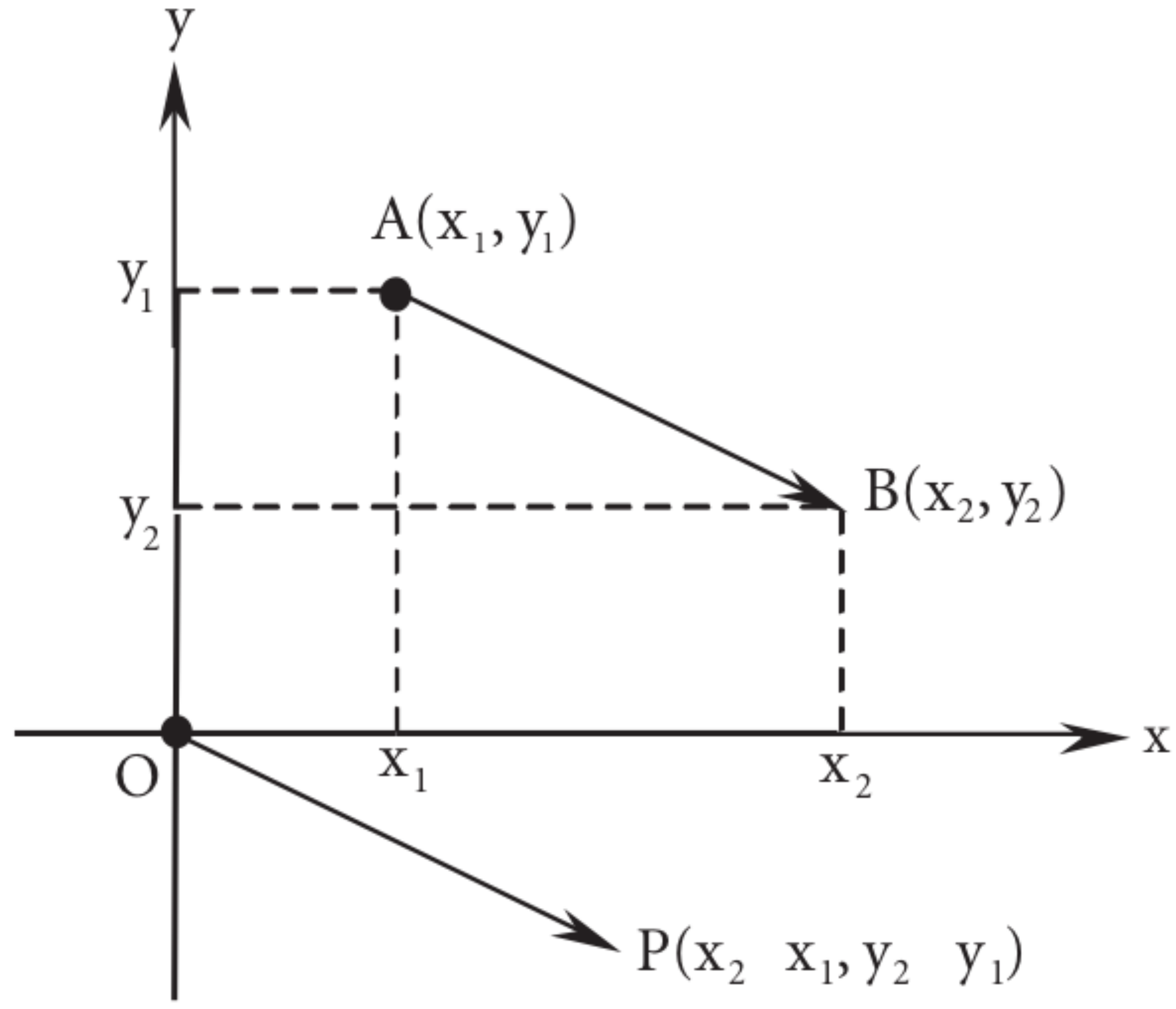


Figura 1.45

O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ é também chamado de *vetor posição* ou *representante natural* de $\overrightarrow{AB}$.

Na Figura 1.46, os segmentos orientados OP, AB e CD representam o mesmo vetor $\vec{v} = P - O = B - A = D - C = (3, 1)$.

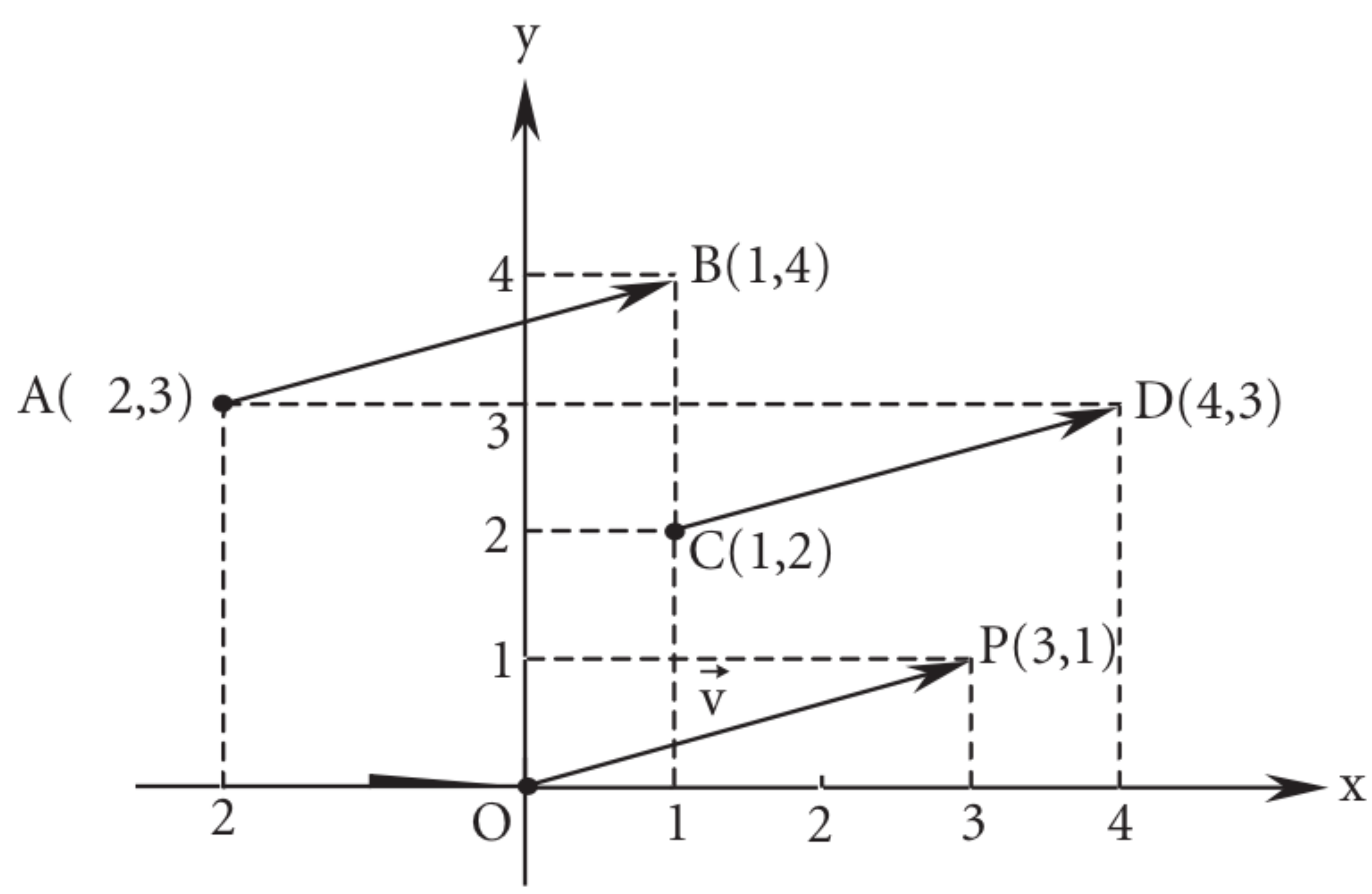


Figura 1.46

Esta figura deixa claro que o fato de os segmentos orientados ocuparem posições diferentes é irrelevante. O que importa é que tenham o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido para representarem o mesmo vetor.

Por outro lado, sempre que tivermos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ ou $\vec{v} = B - A$, podemos também concluir que

$$B = A + \vec{v} \text{ ou } B = A + \overrightarrow{AB}$$

ou seja, **o vetor $\vec{v}$ "transporta" o ponto inicial A para o ponto extremo B.**

Retornando à Figura 1.46, na qual $\vec{v} = (3, 1)$, tem-se

$$B = A + \vec{v} = (-2, 3) = (3, 1) = (1, 4)$$

$$D = C + \vec{v} = (1, 2) + (3, 1) = (4, 3)$$

$$P = O + \vec{v} = (0, 0) + (3, 1) = (3, 1)$$

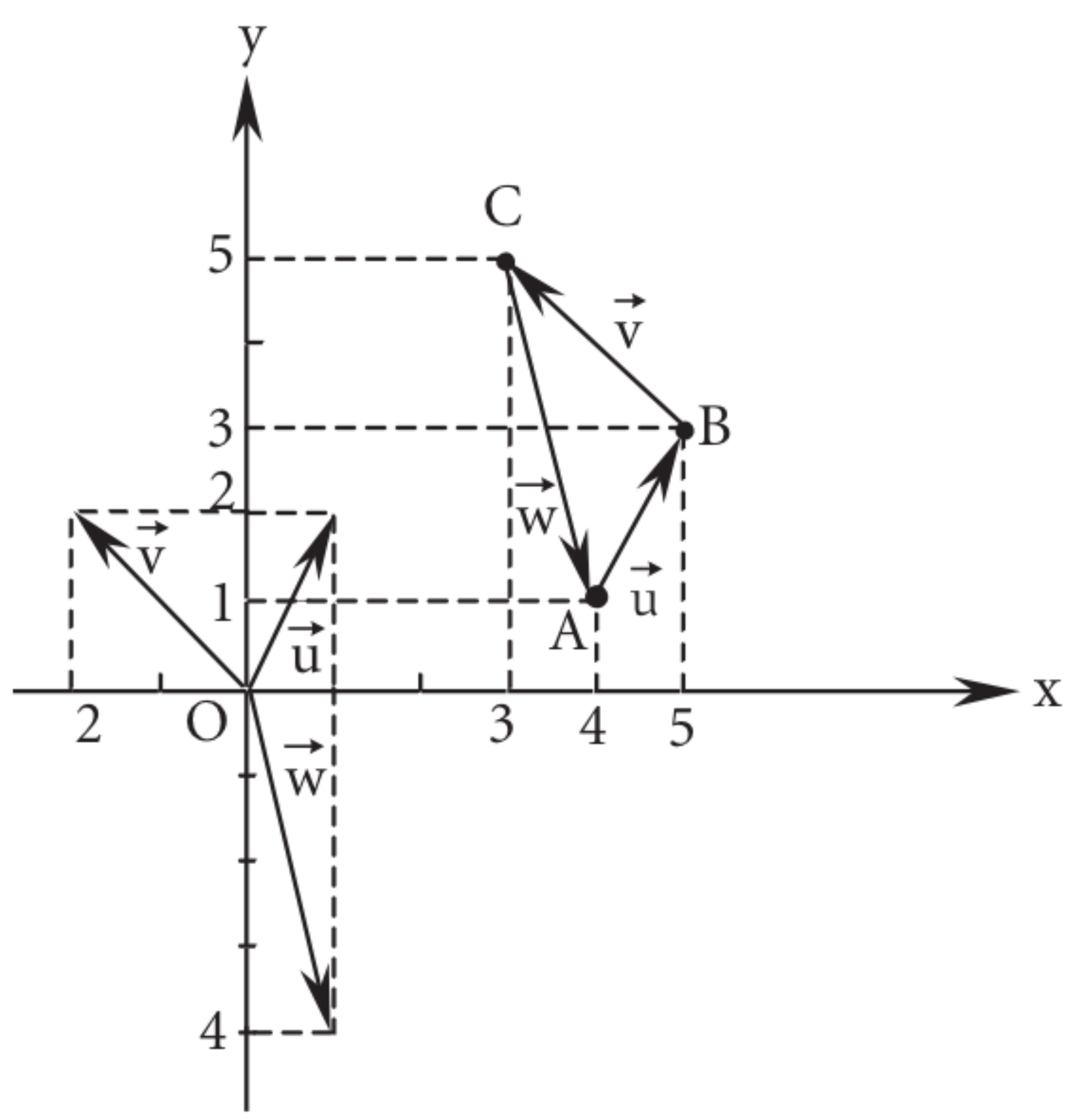


Figura 1.47

Outra ilustração: na Figura 1.47, os vértices do triângulo são os pontos A(4, 1), B(5, 3), e C(3, 5) e os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ indicados são

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1, 2)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{BC} = C - B = (-2, 2)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{CA} = A - C = (1, -4)$$

Observamos ainda que

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0} = (0, 0).$$

Exemplos

1. Dados os pontos $A(-1, 2)$, $B(3, -1)$ e $C(-2, 4)$, determinar o ponto D de modo que $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Solução

Seja D(x, y). Então,

$$\overrightarrow{CD} = D - C = (x, y) - (-2, 4) = (x + 2, y - 4)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, -1) - (-1, 2) = (4, -3)$$

Logo,

$$(x + 2, y - 4) = \frac{1}{2}(4, -3)$$

$$(x + 2, y - 4) = (2, -\frac{3}{2})$$

Pela condição de igualdade de dois vetores, tem-se

$$\begin{cases} x + 2 = 2 \\ y - 4 = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

sistema cuja solução é $x = 0$ e $y = \frac{5}{2}$.

Portanto, $D(0, \frac{5}{2})$.

Observação

Esse problema poderia, também, ter sido resolvido da seguinte maneira:

da condição $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ou $D - C = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, vem

$D = C + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ e

$D = (-2, 4) + \frac{1}{2}(4, -3) = (-2, 4) + (2, -\frac{3}{2}) = (0, \frac{5}{2})$.

2. Sendo A(−2,4) e B(4,1) extremidades de um segmento, determinar os pontos F e G que dividem AB em três segmentos de mesmo comprimento.

Solução

Pela Figura 1.48 tem-se

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

Figura 1.48

Mas

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 1) - (-2, 4) = (6, -3)$$

e

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(6, -3) = (2, -1)$$

Portanto,

$$F = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (-2, 4) + (2, -1) = (0, 3)$$

$$G = F + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (0, 3) + (2, -1) = (2, 2)$$

3. Sendo A(2, 1) e B(5, 2) vértices consecutivos de um paralelogramo ABCD e M(4, 3) o ponto de interseção das diagonais, determinar os vértices C e D.

Solução

Em *Adição de vetores*, Exemplo 4, demonstra-se que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio, ou seja, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$ e $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$.

Então, pela Figura 1.49 tem-se

$$C = M + \overrightarrow{MC} = M + \overrightarrow{AM}$$

e

$$D = M + \overrightarrow{MD} = M + \overrightarrow{BM} \text{ (ou: } A + \overrightarrow{BC}\text{)}$$

Mas

$$\overrightarrow{AM} = M - A = (2, 2)$$

e

$$\overrightarrow{BM} = M - B = (-1, 1)$$

Portanto,

$$C = (4, 3) + (2, 2) = (6, 5)$$

e

$$D = (4, 3) + (-1, 1) = (3, 4)$$

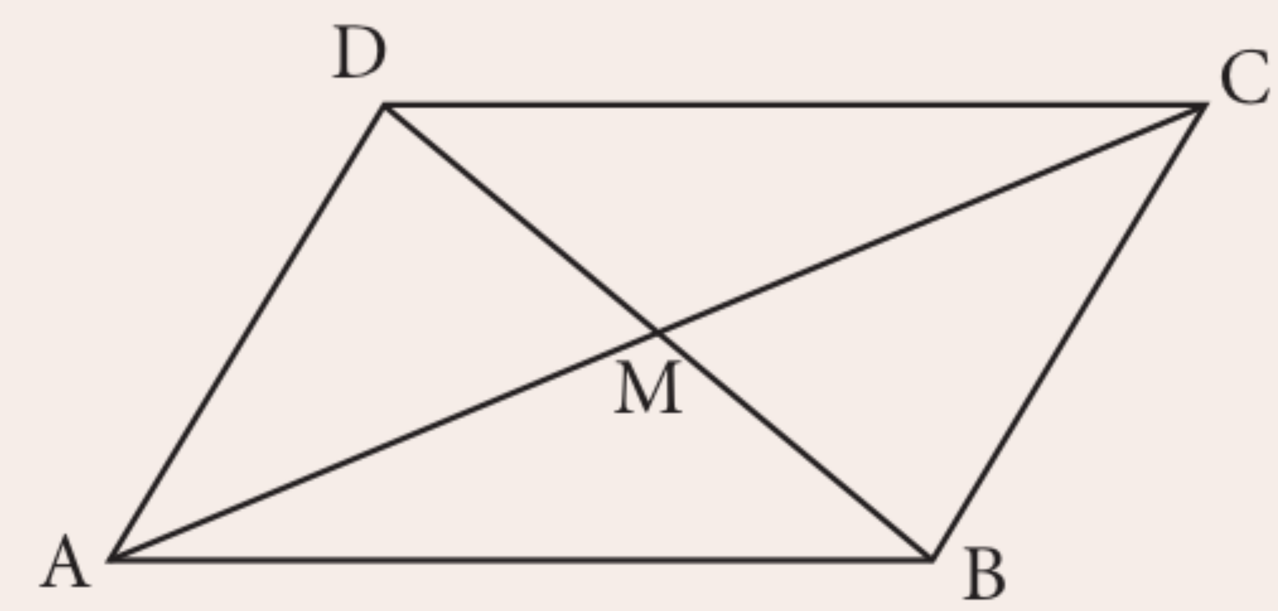


Figura 1.49

Ponto médio

Seja o segmento de extremos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ (Figura 1.50). Sendo $M(x, y)$ o ponto médio de AB, podemos expressar de forma vetorial como

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$$

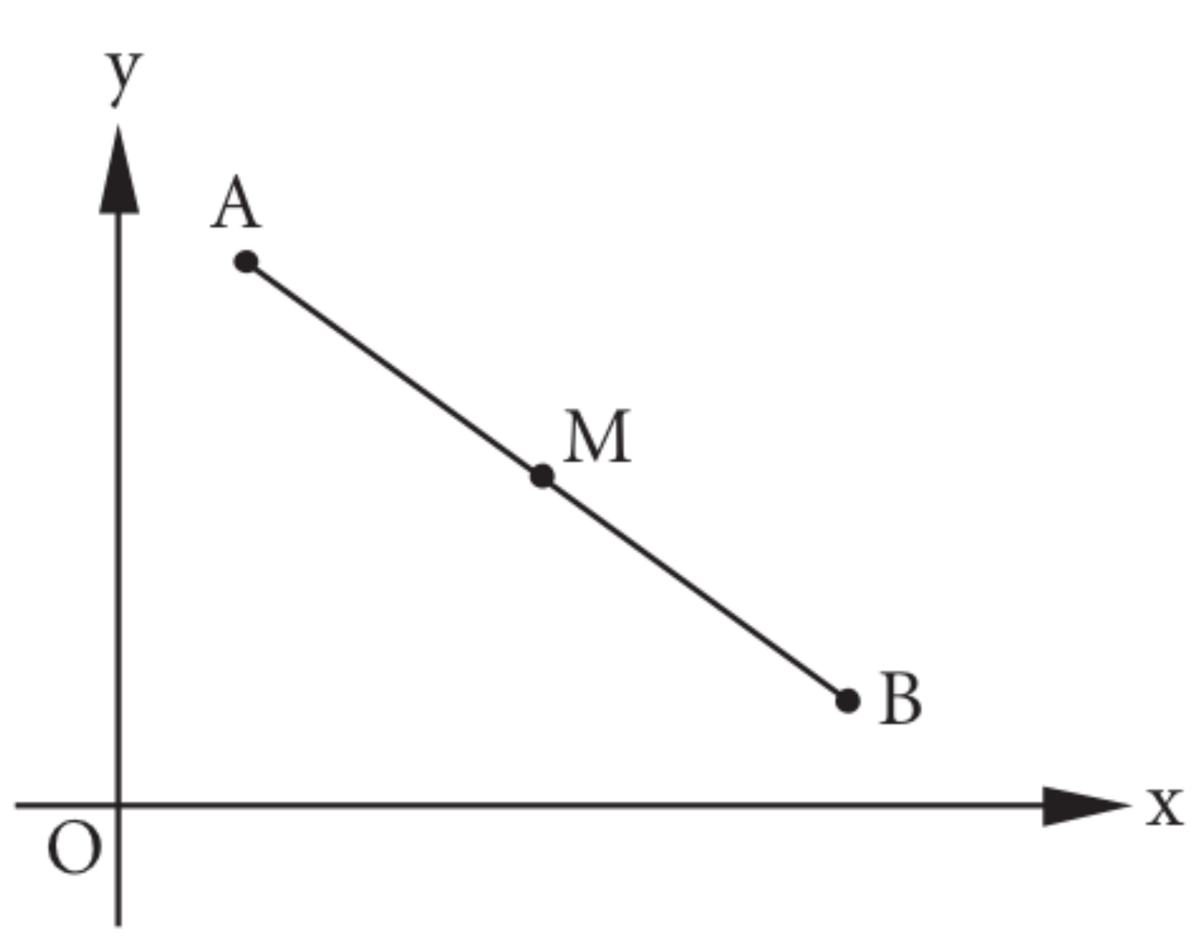


Figura 1.50

ou

$$(x - x_1, y - y_1) = (x_2 - x, y_2 - y)$$

então

$$x - x_1 = x_2 - x \quad \text{e} \quad y - y_1 = y_2 - y$$

Resolvendo em relação a x e y, temos

$$2x = x_1 + x_2 \quad \text{e} \quad 2y = y_1 + y_2$$

ou

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Portanto, $\boxed{M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)}$

Exemplo

O ponto médio do segmento de extremos $A(-2, 3)$ e $B(6, 2)$ é

$$M\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{3+2}{2}\right) \text{ ou } M\left(2, \frac{5}{2}\right)$$

Paralelismo de dois vetores

Vimos que, se dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são paralelos, existe um número real α tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, ou seja,

$$(x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2)$$

ou

$$(x_1, y_1) = (\alpha x_2, \alpha y_2)$$

que pela condição de igualdade resulta em

$$x_1 = \alpha x_2 \quad \text{e} \quad y_1 = \alpha y_2$$

donde

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \; (=\alpha)$$

Essa é a condição de paralelismo de dois vetores, ou seja, *dois vetores são paralelos quando suas componentes forem proporcionais.*

Exemplo

Os vetores $\vec{u} = (-2, 3)$ e $\vec{v} = (-4, 6)$ são paralelos pois $\frac{-2}{-4} = \frac{3}{6}$.

Observações

a) Considera-se o vetor $\vec{0} = (0,0)$ paralelo a qualquer vetor.

b) Se uma das componentes de um vetor for nula, a componente correspondente de um vetor paralelo também é nula.

Módulo de um vetor

Seja o vetor $\vec{v} = (x, y)$ (Figura 1.51). Pelo teorema de Pitágoras, vem

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

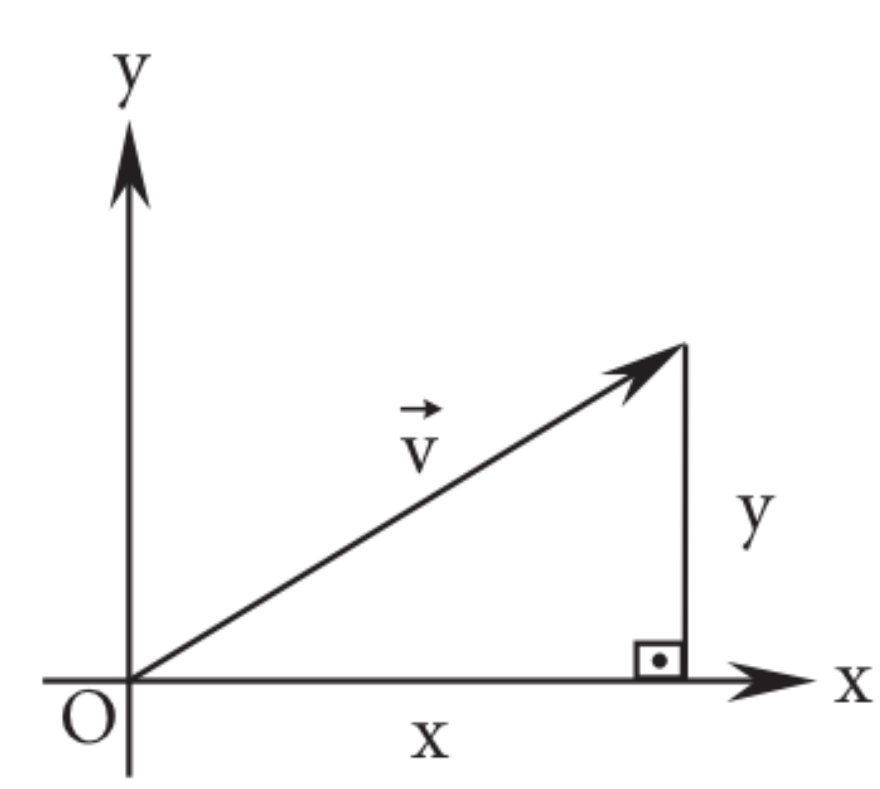


Figura 1.51

Exemplo

Se $\vec{v} = (2, -3)$, então

$$|\vec{v}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \text{ u.c. (unidades de comprimento)}$$

Observações

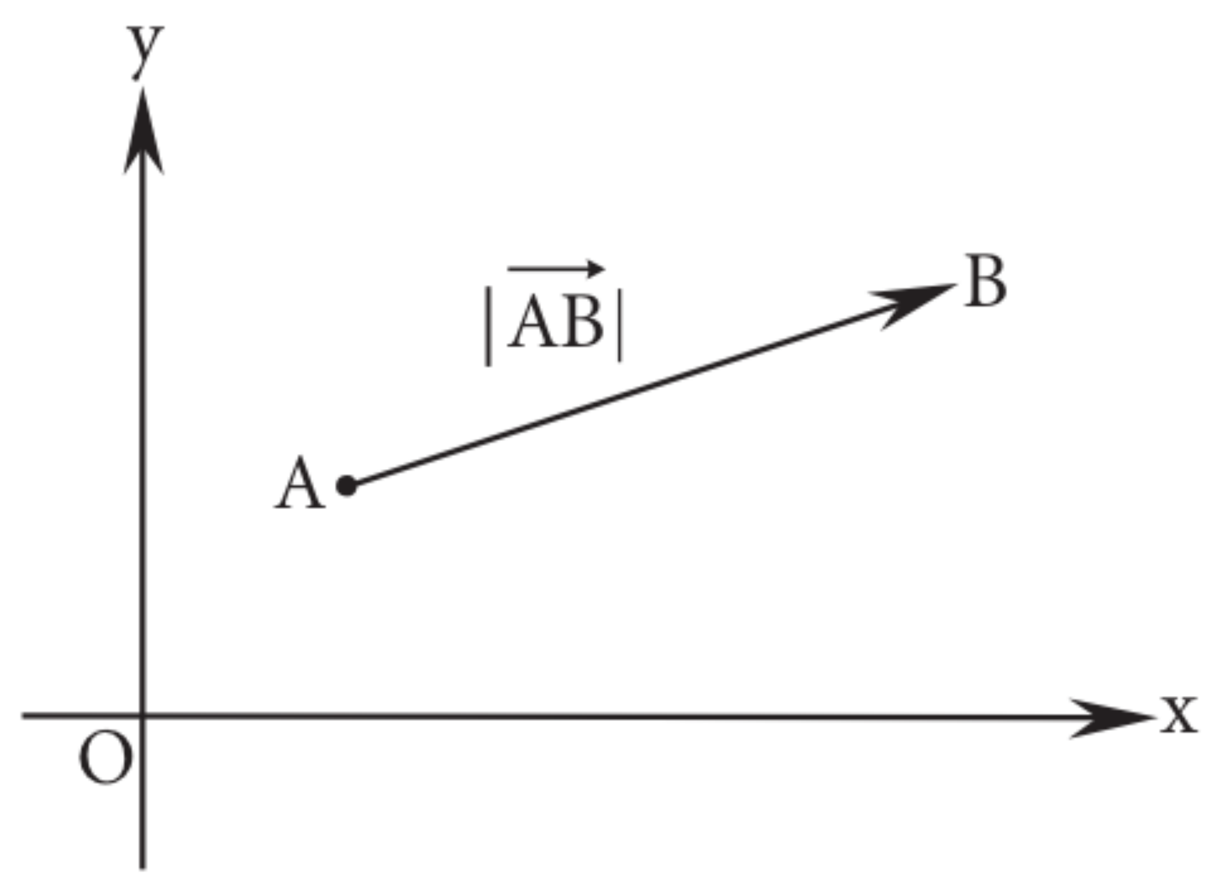


Figura 1.52

a) Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ (Figura 1.52) é o comprimento (módulo) do vetor $\overrightarrow{AB}$, isto é,

$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$.

Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$,

temos

$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

b) Vetor unitário

Vimos em multiplicação de número real por vetor, Figura 1.23, página 11, que a cada vetor $\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, é possível associar dois vetores unitários paralelos a $\vec{v}$: $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ (é o versor de $\vec{v}$) e seu oposto $-\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

Exemplo

O versor de $\vec{v} = (3, -4)$ é

$$\vec{u}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{(3,-4)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{(3,-4)}{\sqrt{25}}=\frac{(3,-4)}{5}=(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$$

O versor é, na verdade, um vetor unitário, pois

$$\left|(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})\right|=\sqrt{(\frac{3}{5})^2+(-\frac{4}{5})^2}=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{25}{25}}=1$$

É importante observar que este versor $\vec{u}$ é também versor de todos os vetores múltiplos de $\vec{v}$ que tiverem o mesmo sentido que ele.

Para exemplificar, o versor de $2\vec{v} = 2(3, -4) = (6, -8)$ é ainda

$$\vec{u}=\frac{2\vec{v}}{|2\vec{v}|}=\frac{(6,-8)}{\sqrt{6^2+(-8)^2}}=\frac{(6,-8)}{10}=(\frac{6}{10},-\frac{8}{10})=(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$$

Exemplos

1. Dados os pontos $A(2, -1)$ e $B(-1, 4)$ e os vetores $\vec{u} = (-1, 3)$ e $\vec{v} = (-2, -1)$, determinar

a) $|\vec{u}|$

b) $|\vec{u} + \vec{v}|$

c) $|2\vec{u} - 3\vec{v}|$

d) a distância entre os pontos A e B

Solução

a) $|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

b) Por ser $\vec{u} + \vec{v} = (-1, 3) + (-2, -1) = (-3, 2)$, temos

$$|\vec{u} + \vec{v}| = |(-3, 2)| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

c) Por ser $2\vec{u} - 3\vec{v} = 2(-1, 3) - 3(-2, -1) = (-2, 6) + (6, 3) = (4, 9)$, temos

$$|2\vec{u} - 3\vec{v}| = |(4, 9)| = \sqrt{16+81} = \sqrt{97}$$

d) Por ser $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 4) - (2, -1) = (-3, 5)$, temos

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = |(-3, 5)| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

2. Determinar, no eixo Ox, um ponto P que seja equidistante dos pontos $A(-1, -2)$ e $B(5, -4)$.

Solução

O ponto procurado é do tipo $P(x, 0)$. Deve-se ter

$$d(P, A) = d(P, B)$$

ou

$$|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}|$$

Mas

$$\overrightarrow{PA} = A - P = (-1 - x, -2) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{PB} = B - P = (5 - x, -4), \text{ logo}$$

$$|(-1 - x, -2)| = |(5 - x, -4)|$$

ou

$$\sqrt{(-1 - x)^2 + (-2)^2} = \sqrt{(5 - x)^2 + (-4)^2}$$

ou

$$1 + 2x + x^2 + 4 = 25 - 10x + x^2 + 16$$

e

$$x = 3$$

Portanto, o ponto é $P(3, 0)$.

3. Dado o vetor $\vec{v} = (-2, 1)$, encontrar o vetor paralelo a $\vec{v}$ que possua

a) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e três vezes o módulo de $\vec{v}$;

b) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e a metade do módulo de $\vec{v}$;

c) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e módulo 4;

d) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e módulo 2.

Solução

a) Basta multiplicar o vetor por 3: $3\vec{v} = 3(-2, 1) = (-6, 3)$

b) Basta multiplicar o vetor por $-\frac{1}{2}$: $-\frac{1}{2}\vec{v} = -\frac{1}{2}(-2, 1) = (1, -\frac{1}{2})$

c) Um vetor unitário obtido a partir de $\vec{v}$ é

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(-2,1)}{\sqrt{4+1}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \text{ é o versor de } \vec{v}$$

Uma vez que o vetor procurado deve ter módulo 4 e mesmo sentido de $\vec{v}$, basta multiplicar o versor por 4:

$$4\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left(-\frac{8}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

d) Uma vez que o vetor procurado deve ter módulo 2 e sentido contrário ao de $\vec{v}$, basta multiplicar o versor por -2:

$$-2\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Vetores no espaço

Vimos em *Vetores no plano* que a base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ no plano determina o sistema cartesiano ortogonal xOy e que a um ponto P(x, y) qualquer desse plano corresponde o vetor $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$, ou seja, as próprias coordenadas x e y do ponto P são as componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$ na base canônica (Figura 1.42).

No *espaço*, de forma análoga, consideraremos a base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ como aquela que determinará o *sistema cartesiano ortogonal* Oxyz (Figura 1.53), em que estes três vetores unitários e dois a dois ortogonais estão representados com origem no ponto O. Esse ponto e a direção de cada um dos vetores da base determinam os três eixos cartesianos: o eixo Ox ou eixo dos x (das abscissas) corresponde ao vetor $\vec{i}$, o eixo Oy ou eixo dos y (das ordenadas) corresponde ao vetor $\vec{j}$ e o eixo Oz ou eixo dos z (das cotas) corresponde ao vetor $\vec{k}$. As setas, nessa figura, indicam o sentido positivo de cada eixo, chamado também de *eixo coordenado*.

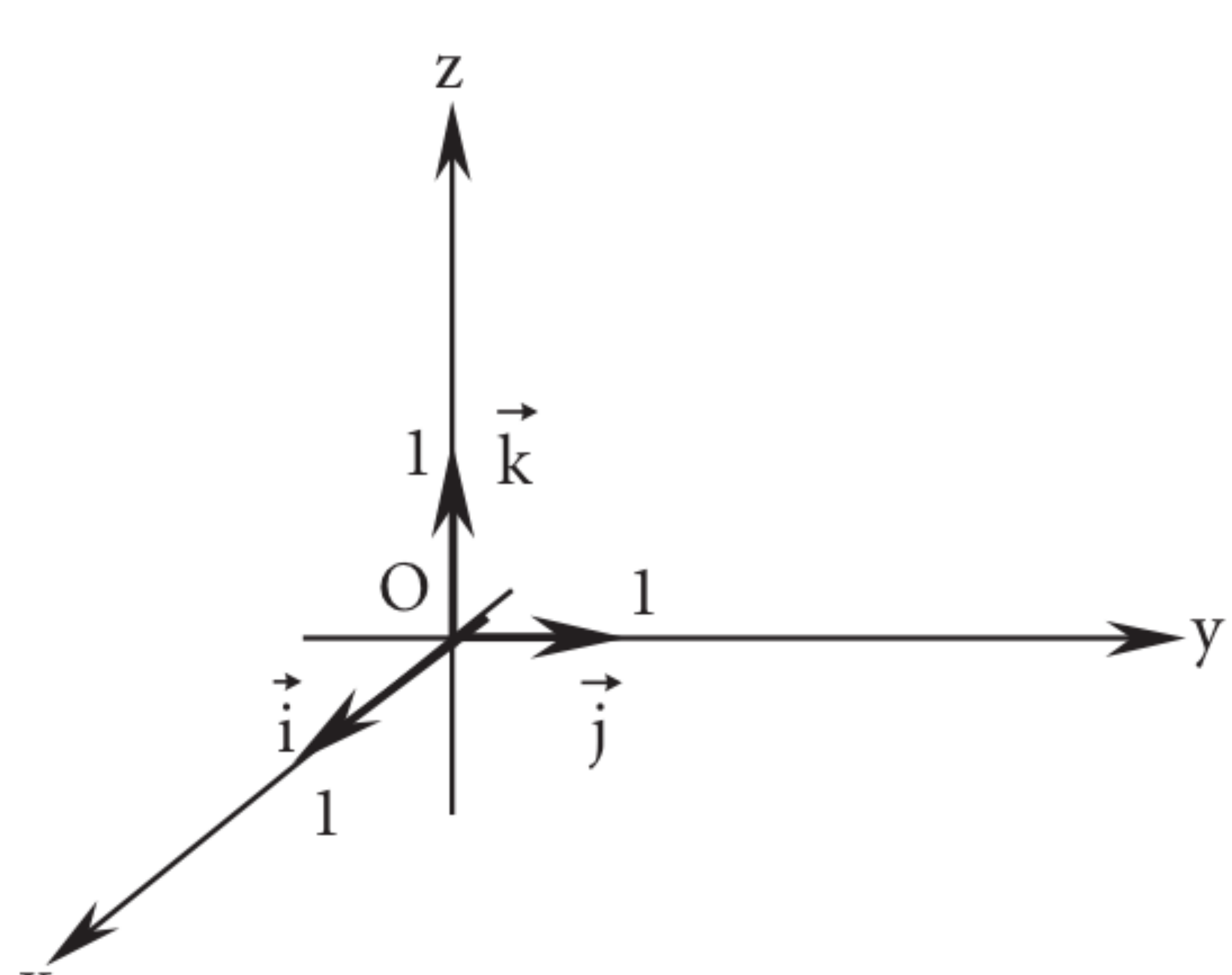
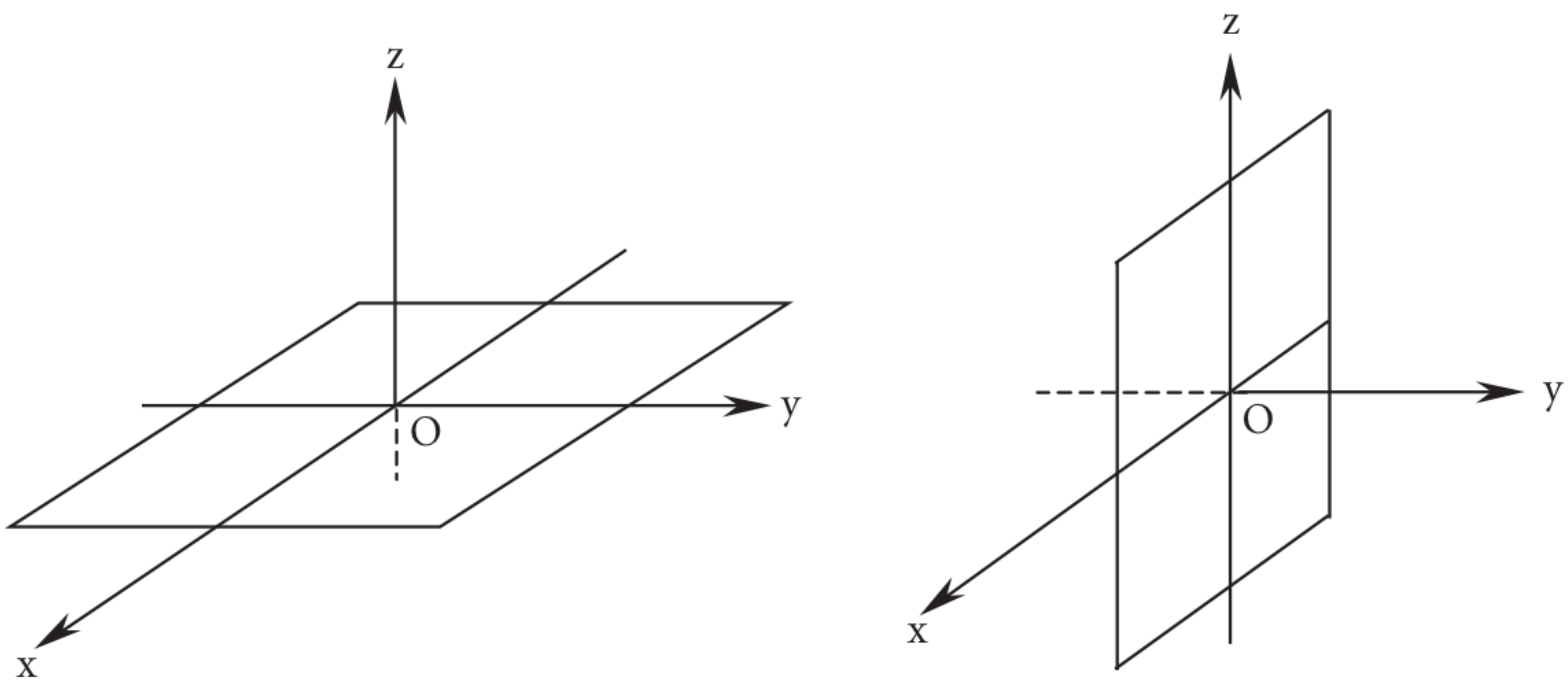


Figura 1.53

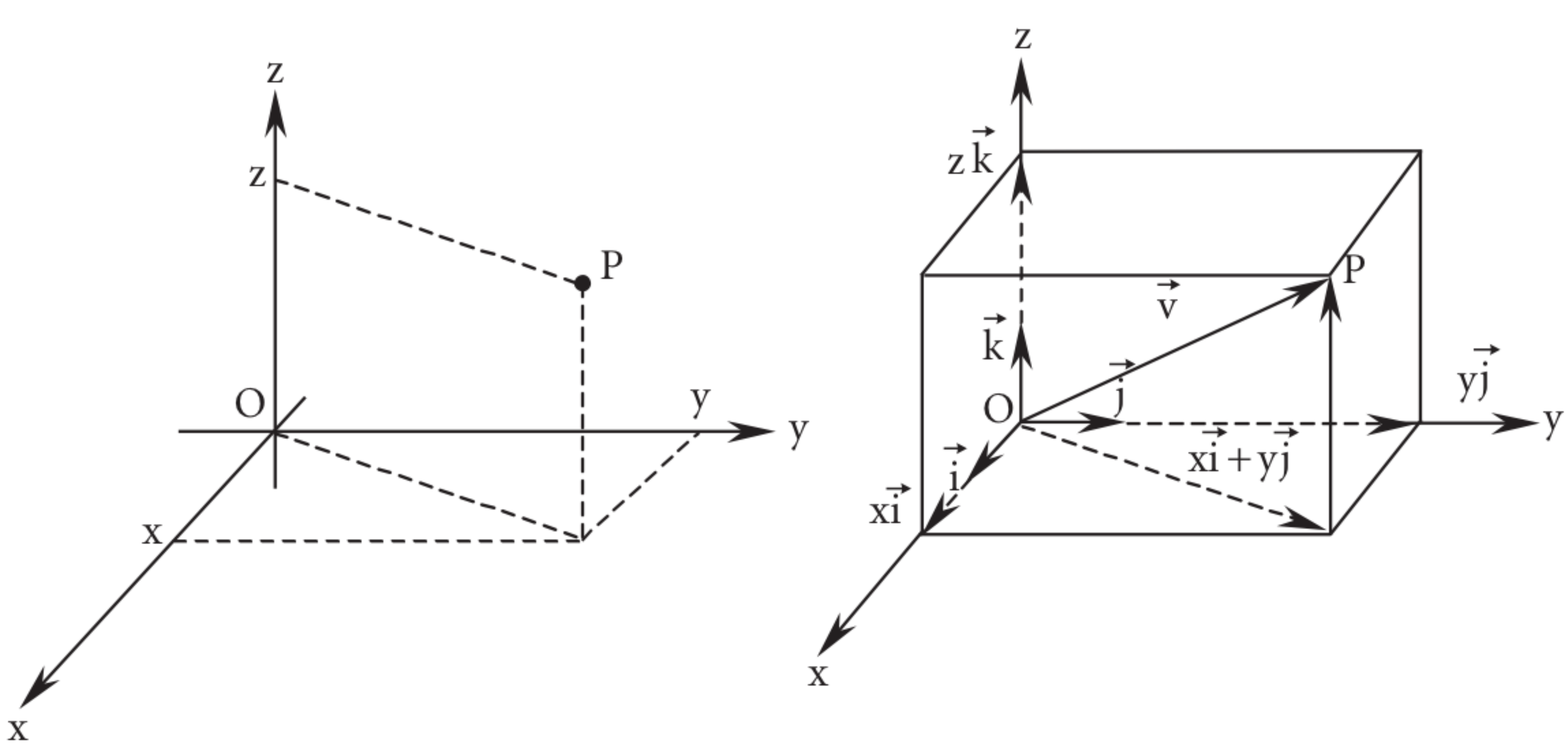
Cada dupla de vetores da base, e, consequentemente, cada dupla de eixos, determina um plano coordenado. Portanto, temos três planos coordenados: o plano xOy ou xy, o plano xOz ou xz e o plano yOz ou yz. As Figuras 1.54(a) e 1.54(b) dão uma ideia dos planos xy e xz, respectivamente.



(a) (b)

Figura 1.54

Assim como no plano, a cada ponto P (x, y, z) do espaço corresponderá o vetor $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, em que, as próprias coordenadas x, y e z do ponto P são as componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$ na base canônica. As coordenadas x, y e z são denominadas abscissa, ordenada e cota, respectivamente. A Figura 1.55(a) apresenta um ponto P(x, y, z) no espaço e a Figura 1.55(b) o correspondente vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, que representa a diagonal do paralelepípedo cujas arestas são definidas pelos vetores $x\vec{i}$, $y\vec{j}$ e $z\vec{k}$.



(a) (b)

Figura 1.55

O vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ também será expresso por

$$\vec{v} = (x, y, z)$$

que é a expressão analítica de $\vec{v}$. Para exemplificar

$$\begin{aligned} 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} &= (2, -3, 1) \\ \vec{i} - \vec{j} &= (1, -1, 0) \\ 2\vec{j} - \vec{k} &= (0, 2, -1) \\ 4\vec{k} &= (0, 0, 4) \end{aligned}$$

e, em particular, $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Para algumas observações, tomemos o paralelepípedo da Figura 1.56 no qual P(2, 4, 3). Faremos considerações a pontos como também poderíamos referi-las aos correspondentes vetores.

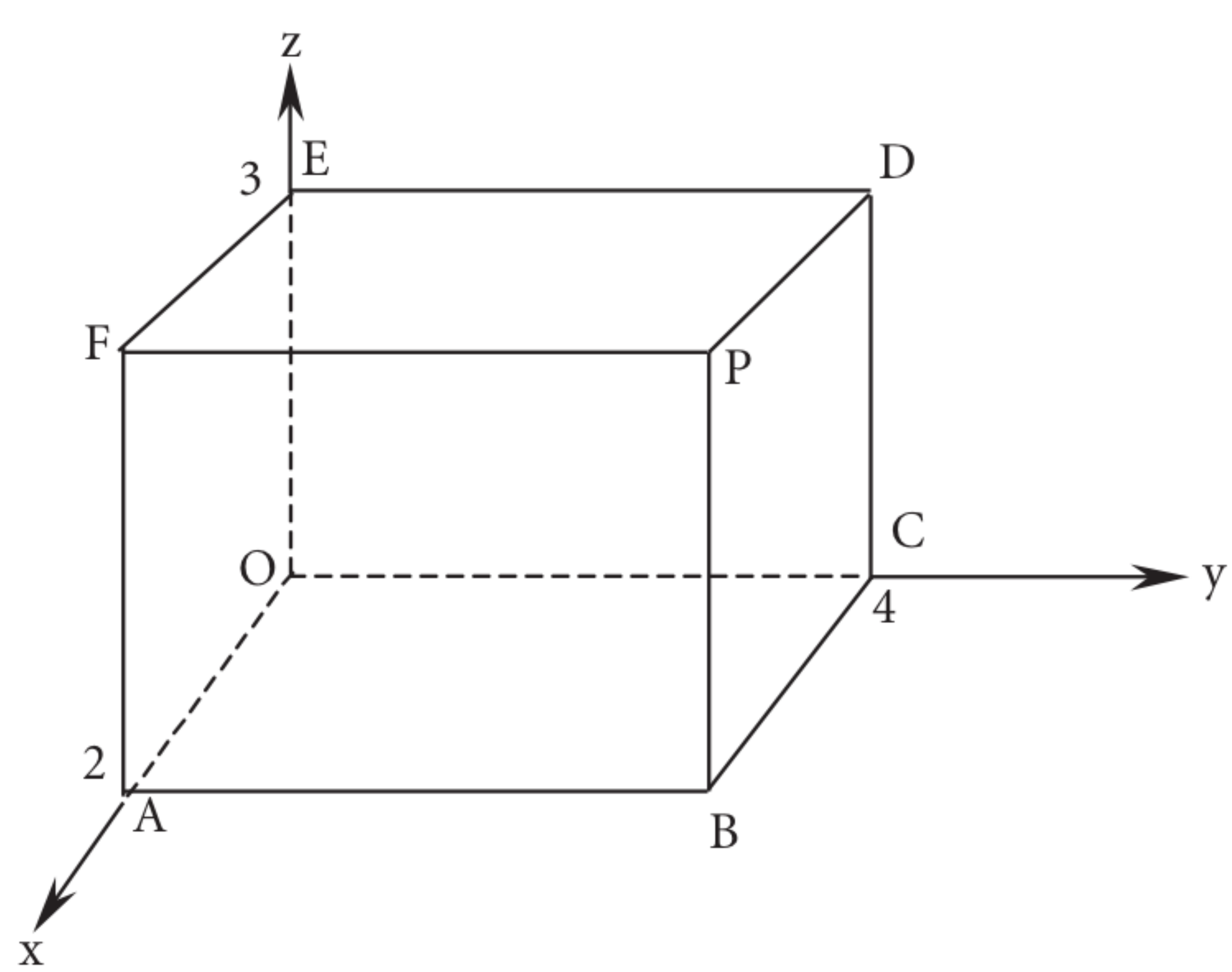


Figura 1.56

Com base nesta figura e levando em consideração que um ponto (x, y, z) está no

a) eixo dos x quando y = 0 e z = 0, tem-se A (2, 0, 0);

b) eixo dos y quando x = 0 e z = 0, tem-se C (0, 4, 0);

c) eixo dos z quando x = 0 e y = 0, tem-se E (0, 0, 3);

d) plano xy quando z = 0, tem-se B(2, 4, 0);

e) plano xz quando y = 0, tem-se F(2, 0, 3);

f) plano yz quando x = 0, tem-se D (0, 4, 3).

O ponto B é a projeção de P no plano xy, assim como D e F são as projeções de P nos planos yz e xz, respectivamente. O ponto A(2, 0, 0) é a projeção de P(2, 4, 3) no eixo x, assim como C(0, 4, 0) e E(0, 0, 3) são as projeções de P nos eixos y e z, respectivamente.

Como todos os pontos da face,

a) PDEF distam 3 unidades do plano xy e estão acima dele, são pontos de cota z = 3, ou seja, são pontos do tipo (x, y, 3);

b) PBCD distam 4 unidades do plano xz e estão à direita dele, são pontos de ordenada y = 4, ou seja, são pontos do tipo (x, 4, z);

c) PFAB distam 2 unidades do plano yz e estão à frente dele, são pontos de abscissa x = 2, ou seja, são pontos do tipo (2, y, z).

É muito importante que o leitor tenha presente os casos especiais dos pontos pertencentes aos eixos e aos planos coordenados, ilustrados na Figura 1.57. Ela mostra que o eixo x pode ser descrito como o conjunto dos pontos do tipo (x, 0, 0), ou seja, daqueles que têm y = 0 e z = 0, e o plano xy como o conjunto dos pontos do tipo (x, y, 0), ou seja, daqueles que têm z = 0.

Comentários análogos seriam feitos para os outros eixos e planos coordenados indicados nessa figura.

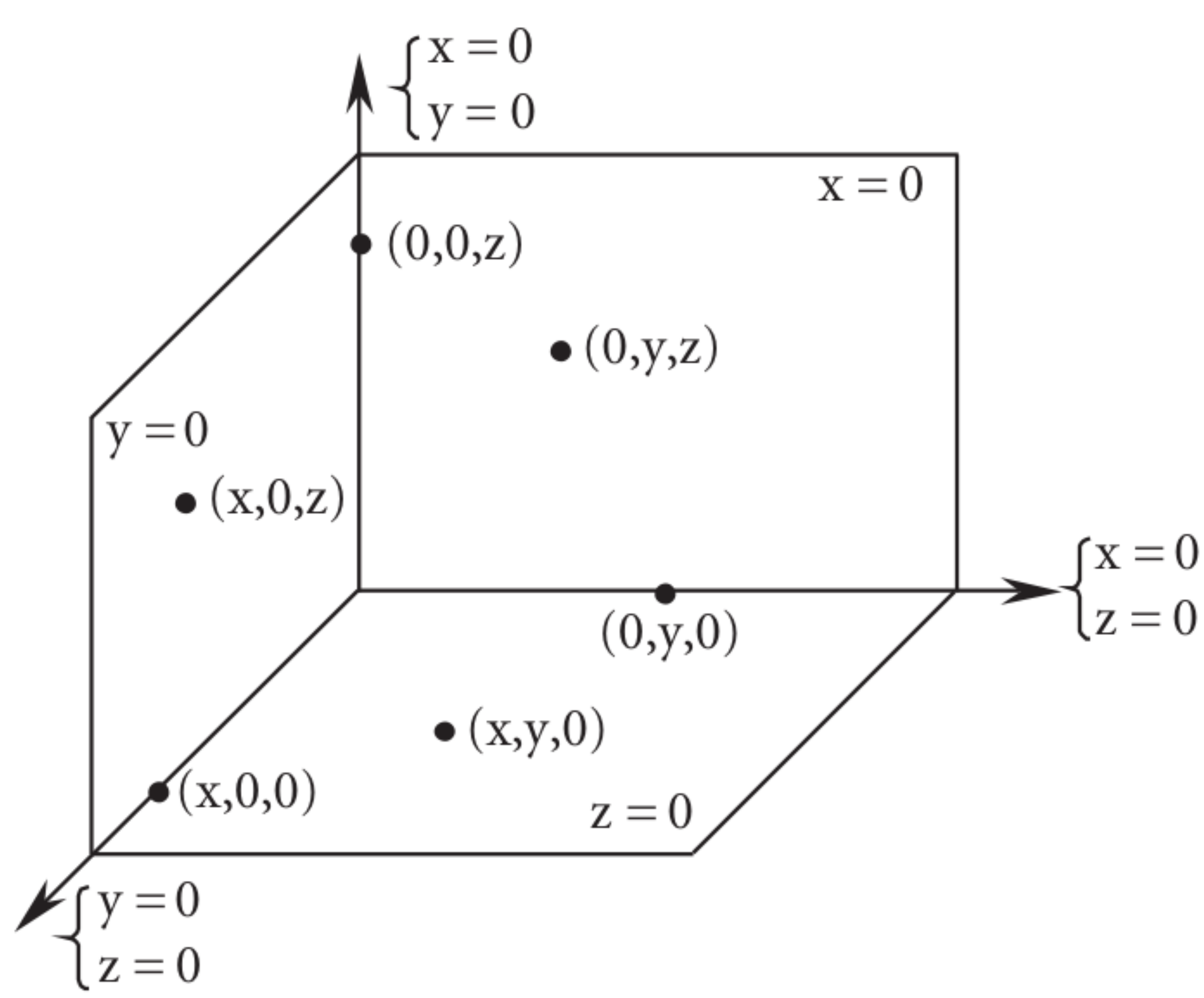


Figura 1.57

Ao desejarmos marcar um ponto no espaço, digamos A(3, −2, 4), procedemos assim (Figura 1.58):

a) marca-se o ponto A'(3, −2, 0) no plano xy;

b) desloca-se A' paralelamente ao eixo dos z, 4 unidades para cima (se fosse −4 seriam 4 unidades para baixo) para obter o ponto A.

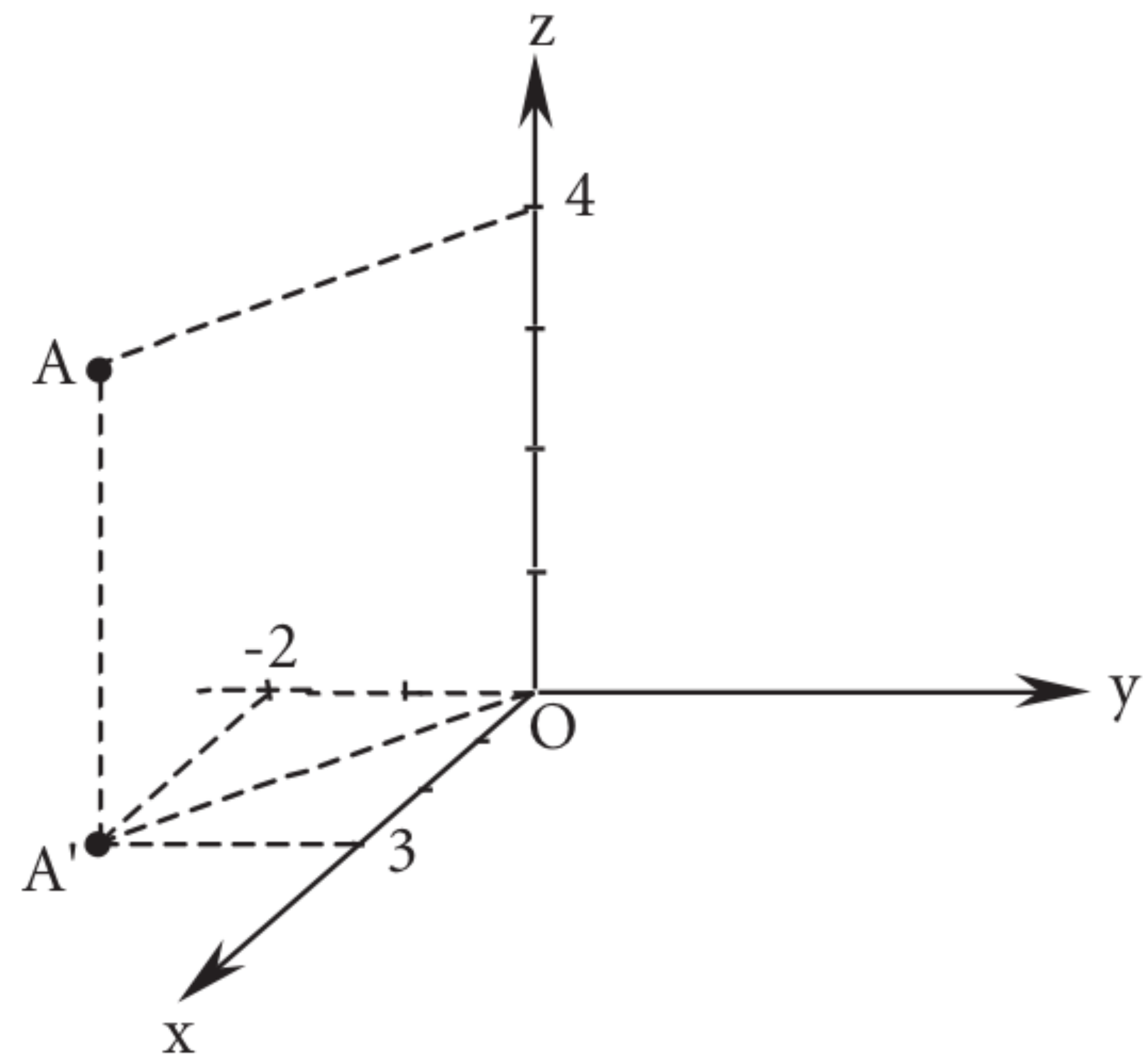


Figura 1.58

Os três planos coordenados se interceptam segundo os três eixos dividindo o espaço em oito regiões denominadas octantes (Figura 1.59). A cada octante correspondem pontos cujas coordenadas têm sinais de acordo com o sentido positivo adotado para os eixos. O primeiro octante é constituído dos pontos de coordenadas todas positivas. Os demais octantes acima do plano xy se sucedem em ordem numérica, a partir do primeiro, no sentido positivo. Os octantes abaixo do plano xy se sucedem na mesma ordem a partir do quinto que, por convenção, se situa sob o primeiro.

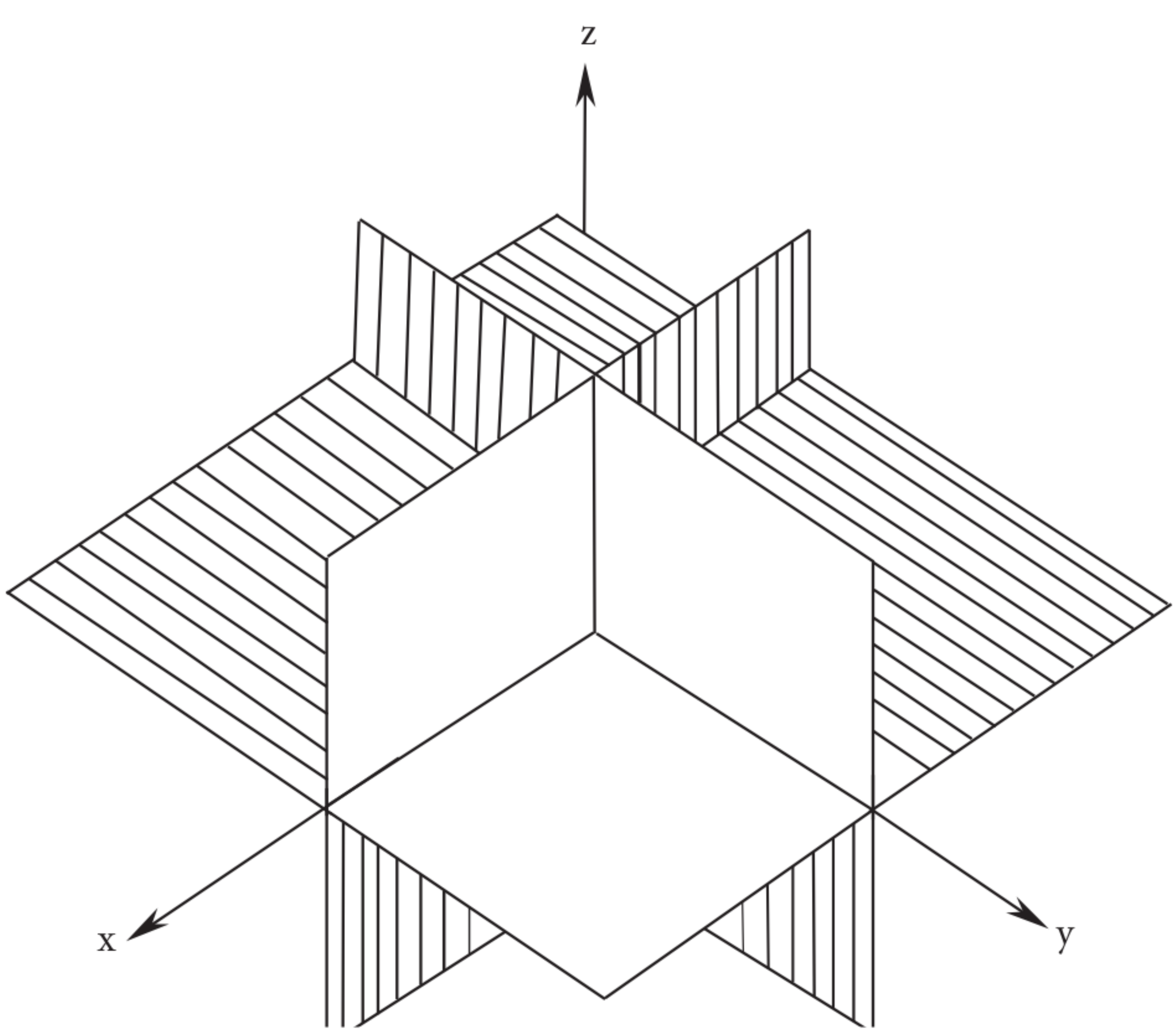


Figura 1.59

A Figura 1.60 apresenta os pontos A, B, C e D situados acima do plano xy e todos de cota igual a 2, enquanto os pontos A', B', C' e D' estão abaixo desse plano e têm cota –2:

ponto A(6, 4, 2), situado no 1º octante

ponto B(–5, 3, 2), situado no 2º octante

ponto C(–6, –5, 2), situado no 3º octante

ponto D(5, –3, 2), situado no 4º octante

ponto A'(6, 4, –2), situado no 5º octante

ponto B'(–5, 3, –2), situado no 6º octante

ponto C'(–6, –5, –2), situado no 7º octante

ponto D'(5, –3, –2), situado no 8º octante

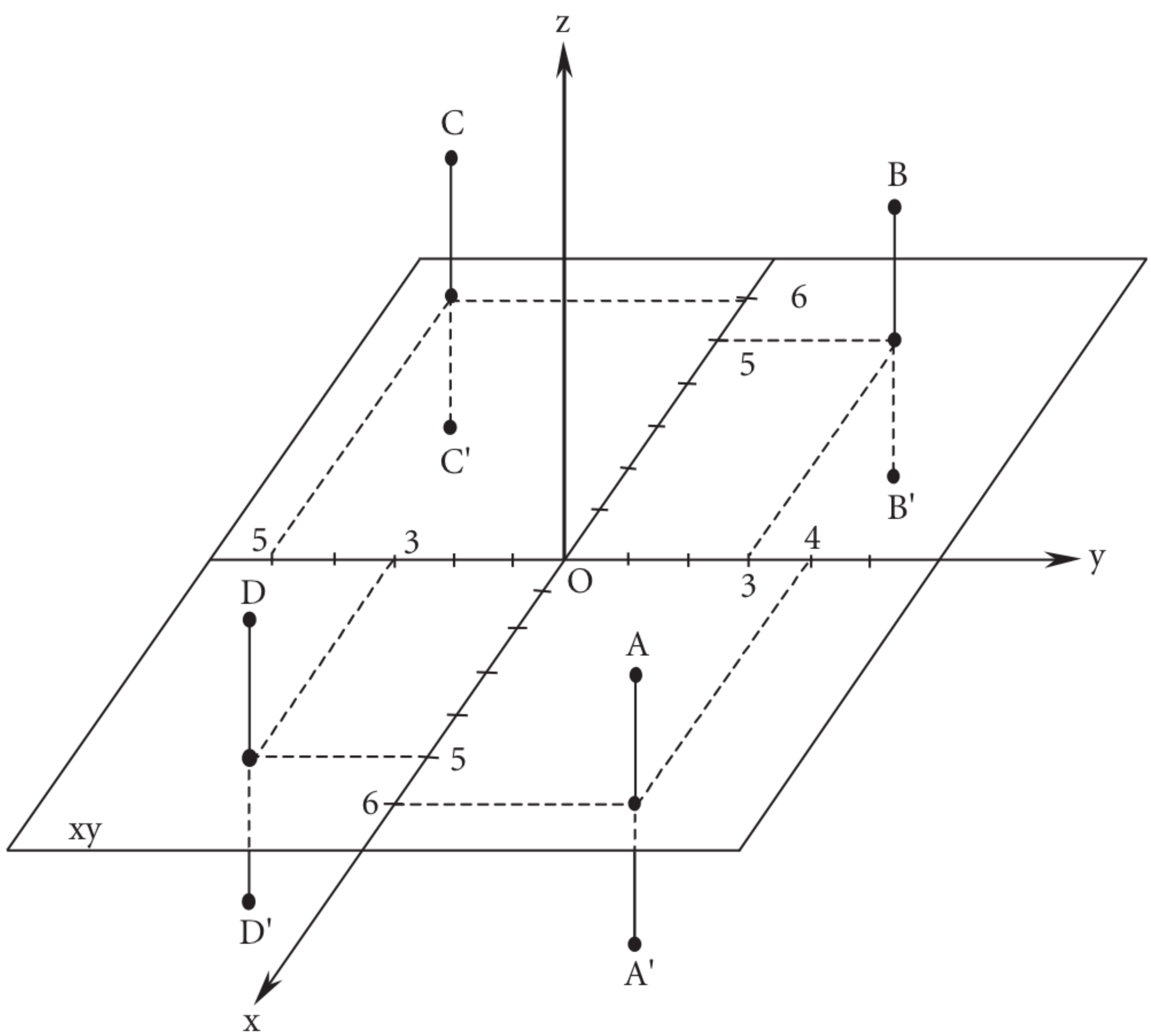


Figura 1.60

Igualdade – operações – vetor definido por dois pontos – ponto médio – paralelismo – módulo de um vetor

As definições e conclusões no espaço, relativas aos títulos anteriores, são análogas às do plano:

I) Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ serão iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$.

II) Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\alpha \in R$, define-se $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ como:

$$\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$$

III) Se A (x_1, y_1, z_1) e B (x_2, y_2, z_2) são dois pontos quaisquer no espaço, então,

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Já vimos que: se $\vec{v} = B - A$, então, $B = A + \vec{v}$.

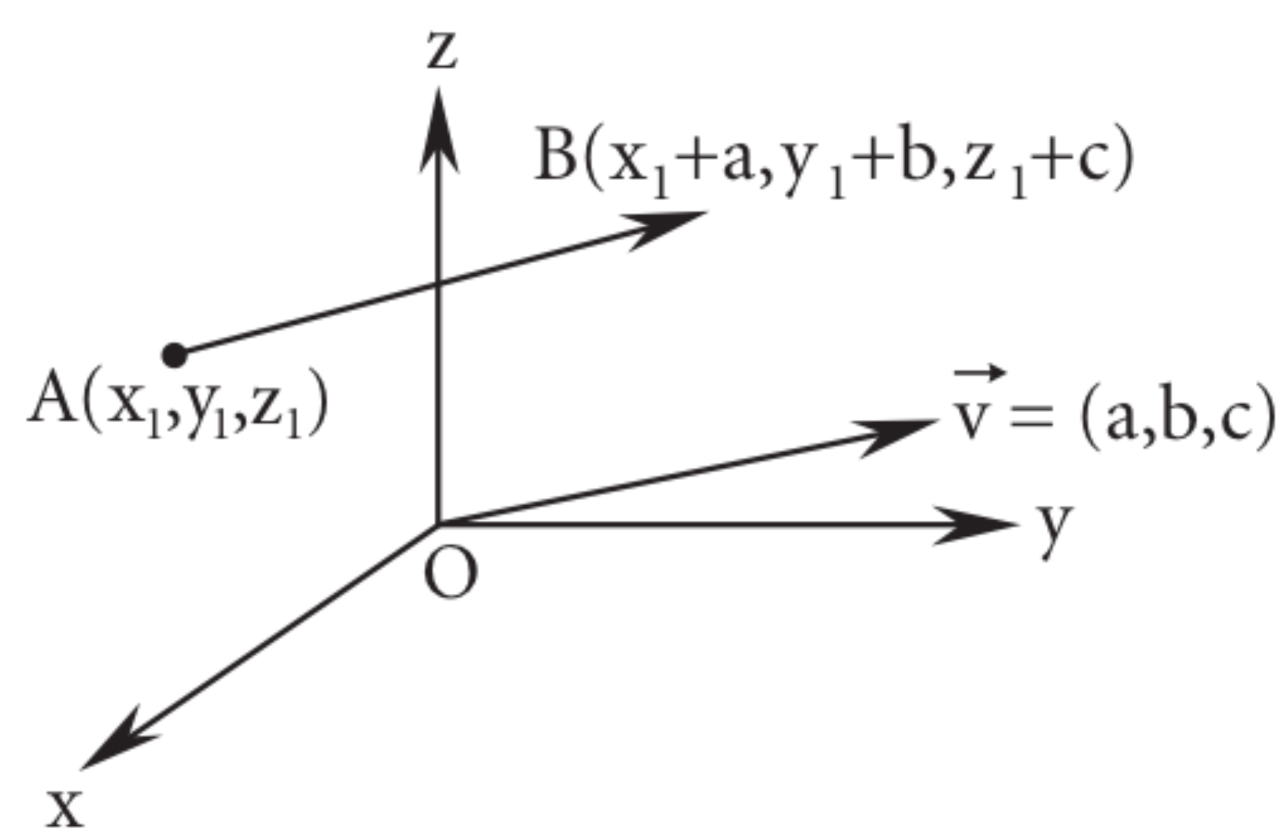


Figura 1.61

A Figura 1.61 indica que, para encontrar as coordenadas do ponto extremo B, somam-se, ordenadamente, as coordenadas do ponto inicial A com as componentes do vetor $\vec{v}$.

IV) Se $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ são pontos extremos de um segmento, o ponto médio M de AB é $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

V) Se os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são paralelos, então, $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ ou $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

VI) O módulo do vetor $\vec{v} = (x, y, z)$ é dado por $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Fica a cargo do leitor a dedução dessa fórmula.

Exemplos

1. Dados os pontos $A(0, 1, -1)$ e $B(1, 2, -1)$ e os vetores $\vec{u} = (-2, -1, 1)$, $\vec{v} = (3, 0, -1)$ e $\vec{w} = (-2, 2, 2)$, verificar se existem os números a_1, a_2 e a_3 tais que $\vec{w} = a_1\overrightarrow{AB} + a_2\vec{u} + a_3\vec{v}$.

Solução

$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 2, -1) - (0, 1, -1) = (1, 1, 0)$

Substituindo os vetores na igualdade dada, resulta

$$(-2, 2, 2) = a_1 (1, 1, 0) + a_2 (-2, -1, 1) + a_3 (3, 0, -1)$$

ou

$$(-2, 2, 2) = (a_1, a_1, 0) + (-2a_2, -a_2, a_2) + (3a_3, 0, -a_3)$$

Somando os três vetores do segundo membro da igualdade, vem

$$(-2, 2, 2) = (a_1 - 2a_2 + 3a_3, a_1 - a_2, a_2 - a_3)$$

Pela condição de igualdade de vetores, obteremos o sistema

$$\begin{cases} a_1 - 2a_2 + 3a_3 = -2 \\ a_1 - a_2 = 2 \\ a_2 - a_3 = 2 \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

que tem por solução $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ e $a_3 = -1$.

Logo

$$\vec{w} = 3\overrightarrow{AB} + \vec{u} - \vec{v}$$

Observação

No plano, todo conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de dois vetores *não paralelos* constitui uma de suas bases, ou seja, todo vetor desse plano é combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

No espaço, todo conjunto de três vetores *não coplanares* constitui uma de suas bases, isto é, todo vetor do espaço pode ser escrito de modo único como combinação linear dos vetores desta base.

Como no exercício anterior, o sistema **(4)** tem solução única ($a_1 = 3$, $a_2 = 1$ e $a_3 = -1$), podemos "intuir" que o conjunto $\{\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\}$ é uma base desse espaço e, portanto, estes três vetores são não coplanares.

2. Encontrar o vértice oposto a B no paralelogramo ABCD, sendo dados A(3, −2, 4), B(5, 1, −3) e C(0, 1, 2).

Solução

O ponto D (Figura 1.62) é dado por

$$D = A + \overrightarrow{BC} \text{ ou } D = C + \overrightarrow{BA}$$

Como $\overrightarrow{BC} = C - B = (-5, 0, 5)$, pela 1ª igualdade obtemos

$$D = (3, -2, 4) + (-5, 0, 5)$$

$$D = (-2, -2, 9)$$

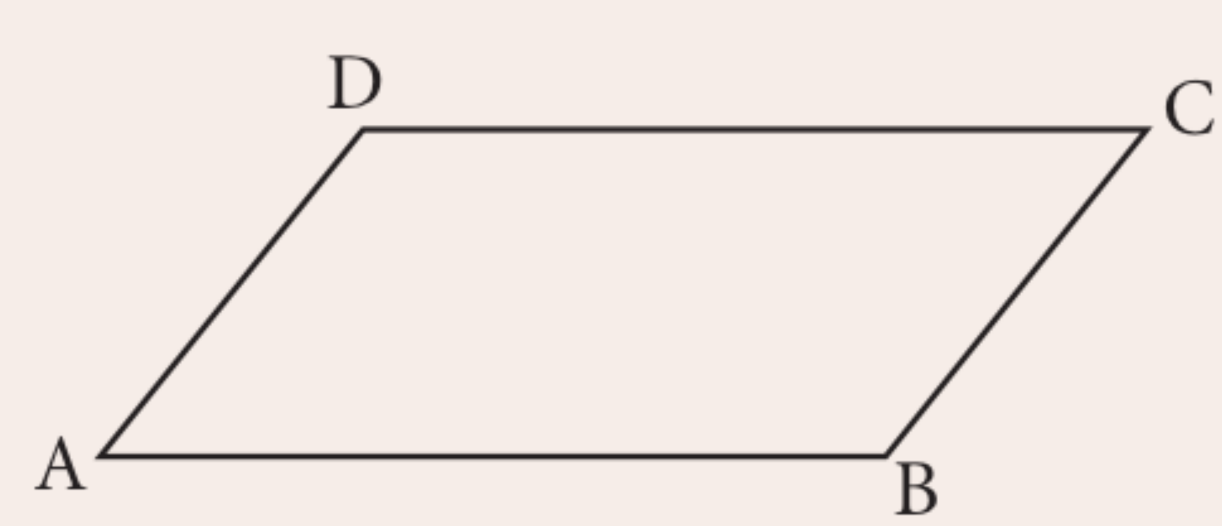


Figura 1.62

3. Sabendo que o ponto P(−3, m, n) pertence à reta que passa pelos pontos A(1, −2, 4) e B(−1, −3, 1), determinar m e n.

Solução

Como os pontos A, B e P pertencem à mesma reta (Figura 1.63), qualquer dupla de vetores formados utilizando estes três pontos são paralelos. Tomemos a condição $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AP}$, ou seja $(-2, -1, -3)//(-4, m + 2, n - 4)$ e, portanto,

$$\frac{-2}{-4} = \frac{-1}{m+2} = \frac{-3}{n-4} \text{ ou } \begin{cases} -2(m+2) = 4 \\ -2(n-4) = 12 \end{cases}$$ no sistema de solução $m = -4$ e $n = -2$.

Figura 1.63

4. Seja o triângulo de vértices $A(4, -1, -2)$, $B(2, 5, -6)$ e $C(1, -1, -2)$. Calcular o comprimento da mediana do triângulo relativa ao lado AB.

Solução

A mediana em questão, de acordo com a Figura 1.64, é o segmento que tem como extremidades o ponto médio M de AB e o vértice oposto C. Então, o comprimento da mediana é o módulo do vetor $\overrightarrow{MC}$.

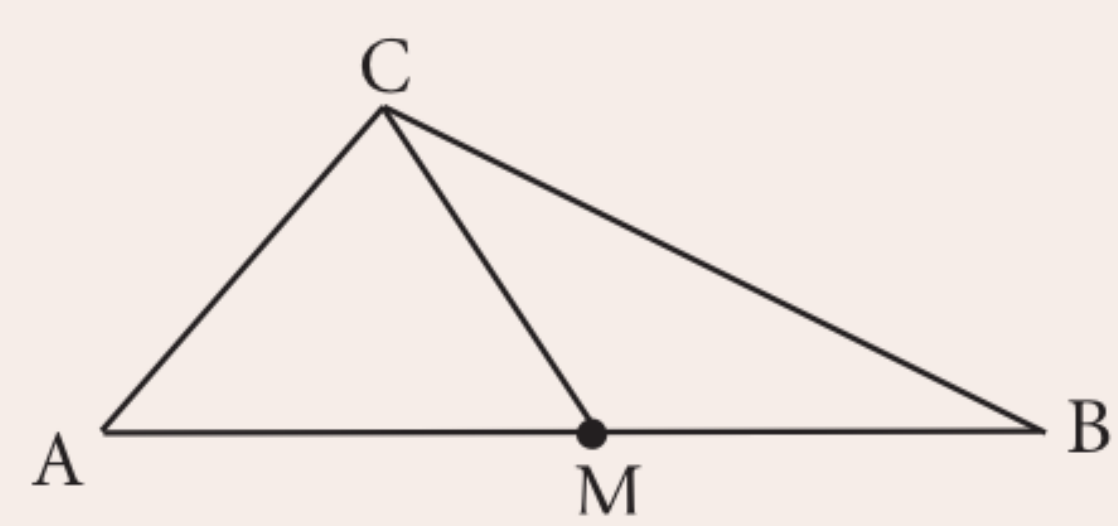


Figura 1.64

$M(\frac{4+2}{2}, \frac{-1+5}{2}, \frac{-2-6}{2})$ ou $M(3, 2, -4)$ e

$\overrightarrow{MC} = C - M = (1, -1, -2) - (3, 2, -4) = (-2, -3, 2)$

Portanto, $|\overrightarrow{MC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17}$.

Problemas propostos

1. Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{w} = -2\vec{i} + \vec{j}$, determinar

a) $2\vec{u} - \vec{v}$

b) $\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{w}$

c) $\vec{v} - \vec{u} + 2\vec{w}$

d) $3\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$

2. Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-1, 2)$, determinar o vetor $\vec{x}$ tal que

a) $4(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{3}\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{x}$

b) $3\vec{x} - (2\vec{v} - \vec{u}) = 2(4\vec{x} - 3\vec{u})$

3. Dados os pontos A(−1, 3), B(2, 5), C(3, −1) e O(0, 0), calcular

a) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}$
b) $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC}$
c) $3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{CB}$

4. Dados os vetores $\vec{u} = (2, -4)$, $\vec{v} = (-5, 1)$ e $\vec{w} = (-12, 6)$, determinar a_1 e a_2 tais que $\vec{w} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v}$.

5. Dados os pontos A(3, −4) e B(−1, 1) e o vetor $\vec{v} = (-2, 3)$, calcular

a) $(B - A) + 2\vec{v}$
b) $(A - B) - \vec{v}$
c) $B + 2(B - A)$
d) $3\vec{v} - 2(A - B)$

6. Sejam os pontos A(−5, 1) e B(1, 3). Determinar o vetor $\vec{v}$ tal que

a) $B = A + 2\vec{v}$
b) $A = B + 3\vec{v}$

Construir o gráfico correspondente a cada situação.

7. Representar em um gráfico o vetor $\overrightarrow{AB}$ e o correspondente vetor posição, nos casos:

a) A(−1, 3) e B(3, 5)
b) A(−1, 4) e B(4, 1)
c) A(4, 0) e B(0, −2)
d) A(3, 1) e B(3, 4)

8. Qual ponto inicial do segmento orientado que representa o vetor $\vec{v} = (-1, 3)$, sabendo que sua extremidade está em (3, 1)? Representar graficamente esse segmento.

9. No mesmo sistema cartesiano xOy, representar:

a) os vetores $\vec{u} = (2, -1)$ e $\vec{v} = (-2, 3)$, com origem nos pontos A(1, 4) e B(1, −4), respectivamente;
b) os vetores posição de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

10. Sejam os pontos P(2, 3), Q(4, 2) e R(3, 5).

a) Representar em um mesmo gráfico os vetores posição de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ de modo que $Q = P + \vec{u}$, $R = Q + \vec{v}$ e $P = R + \vec{w}$;
b) Determinar $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

11. Encontrar o vértice oposto a B, no paralelogramo ABCD, para:

a) A(−3, −1), B(4, 2) e C(5, 5)
b) A(5, 1), B(7, 3) e C(3, 4)

12. Sabendo que A(1, −1), B(5, 1) e C(6, 4) são vértices de um paralelogramo, determinar o quarto vértice de cada um dos três paralelogramos possíveis de serem formados.

13. Dados os pontos A(−3, 2) e B(5, −2), determinar os pontos M e N pertencentes ao segmento AB tais que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Construir o gráfico, marcando os pontos A, B, M, N e P, em que P seja tal que $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

14. Sendo A(−2, 3) e B(6, −3) extremidades de um segmento, determinar:

a) os pontos C, D e E que dividem o segmento AB em quatro partes de mesmo comprimento;

b) os pontos F e G que dividem o segmento de AB em três partes de mesmo comprimento.

15. O ponto P pertence ao segmento de extremos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, e a sua distância ao ponto A é a terça parte da sua distância ao ponto B. Expressar as coordenadas de P em função das coordenadas de A e B.

16. Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1)$, $\vec{v} = (-3, 4)$ e $\vec{w} = (8, -6)$, calcular:

a) $|\vec{u}|$ **b)** $|\vec{w}|$ **c)** $|2\vec{u} - \vec{w}|$ **d)** $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

e) $|\vec{v}|$ **f)** $|\vec{u} + \vec{v}|$ **g)** $|\vec{w} - 3\vec{u}|$ **h)** $\left|\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right|$

17. Calcular os valores de *a* para que o vetor $\vec{u} = (a, -2)$ tenha módulo 4.

18. Calcular os valores de *a* para que o vetor $\vec{u} = (a, \frac{1}{2})$ seja unitário.

19. Provar que os pontos A(−2, −1), B(2, 2), C(−1, 6) e D(−5, 3), nesta ordem, são vértices de um quadrado.

20. Encontrar um ponto P do eixo Ox de modo que a sua distância ao ponto A(2, −3) seja igual a 5.

21. Dados os pontos A(−4, 3) e B(2, 1), encontrar o ponto P nos casos:

a) P pertence ao eixo Oy e é equidistante de A e B;

b) P é equidistante de A e B e sua ordenada é o dobro da abscissa;

c) P pertence à mediatriz do segmento de extremos A e B.

22. Encontrar o vetor unitário que tenha (I) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e (II) sentido contrário a $\vec{v}$, nos casos:

a) $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$ **b)** $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$

c) $\vec{v} = (1, \sqrt{3})$ **d)** $\vec{v} = (0, 4)$

23. Dado o vetor $\vec{v} = (1, -3)$, determinar o vetor paralelo a $\vec{v}$ que tenha:

a) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e duas vezes o módulo de $\vec{v}$;

b) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e módulo 2;

c) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e módulo 4.

24. Traçar no mesmo sistema de eixos os retângulos de vértices

a) A(0, 0, 1), B(0, 0, 2), C(4, 0, 2) e D(4, 0, 1)

b) A(2, 1, 0), B(2, 2, 0), C(0, 2, 2) e D(0, 1, 2)

25. Traçar o retângulo formado pelos pontos (x, y, z) tal que

a) $x = 0, 1 \le y \le 4$ e $0 \le z \le 4$

b) $-1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3$ e $z = 3$

26. Construir o cubo constituído dos pontos (x, y, z), de modo que

a) $-4 \le x \le -2,\ 1 \le y \le 3$ e $0 \le z \le 2$

b) $-2 \le x \le 0,\ 2 \le y \le 4$ e $-4 \le z \le -2$

27. Construir o paralelepípedo retângulo formado pelos pontos (x, y, z), de modo que $1 \le x \le 3$, $3 \le y \le 5$ e $0 \le z \le 4$. Quais são as coordenadas dos oito vértices do paralelepípedo?

28. Calcular a distância do ponto A(3, 4, –2)

a) ao plano xy;

b) ao plano xz;

c) ao plano yz;

d) ao eixo dos x;

e) ao eixo dos y;

f) ao eixo dos z.

29. A Figura 1.65 apresenta um paralelepípedo retângulo de arestas paralelas aos eixos coordenados e de medidas 2, 1 e 3. Determinar as coordenadas dos vértices deste sólido, sabendo que A(2, –1, 2).

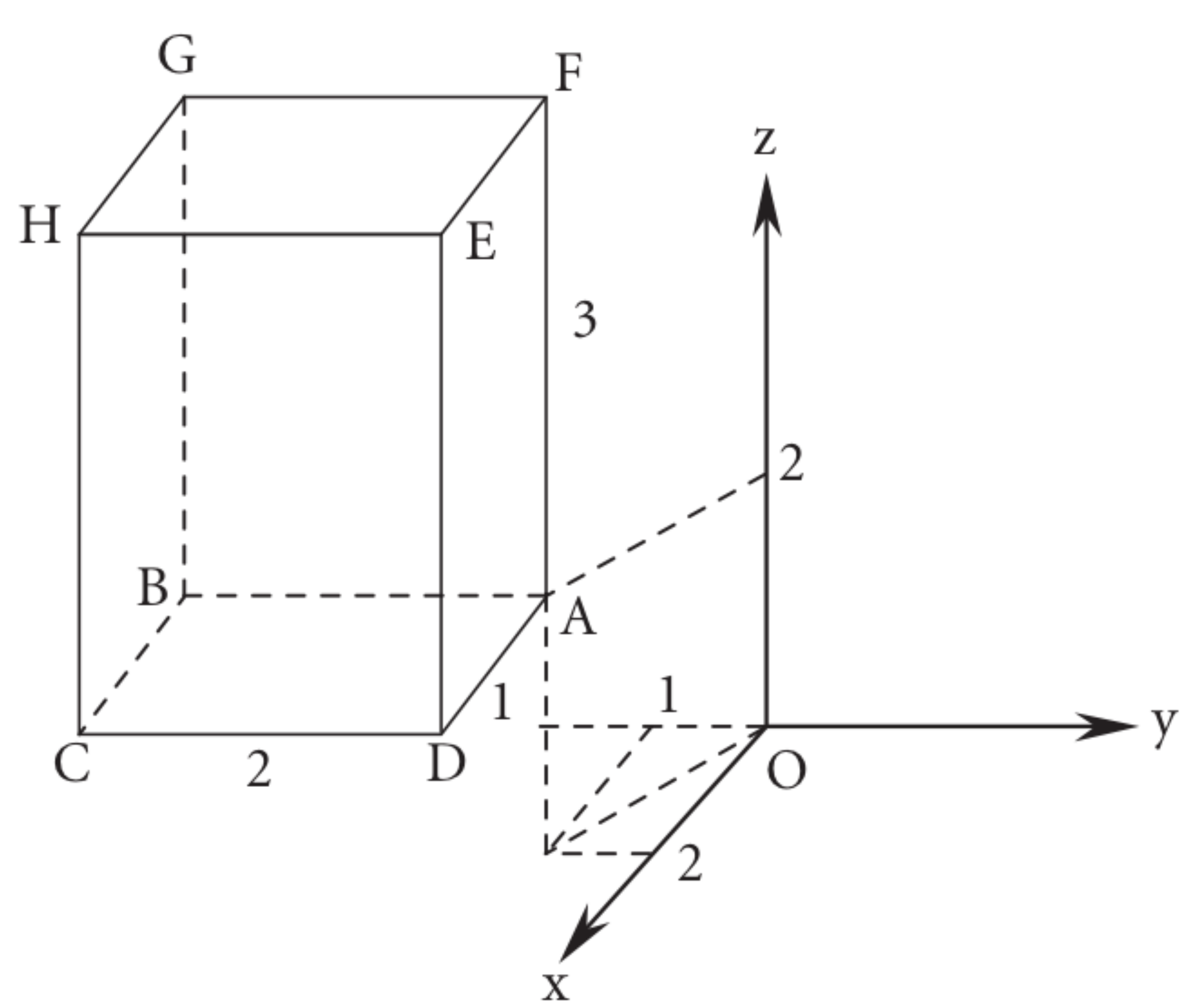


Figura 1.65

30. O paralelepípedo retângulo de dimensões 3, 4 e 5 está referido ao sistema Oxyz, conforme a Figura 1.66. Considerando um segundo sistema chamado O'x'y'z', no qual Ox//O'x', Oy//O'y' e Oz//O'z', e sendo O' um dos vértices do paralelepípedo de acordo com a figura, determinar as coordenadas dos pontos O, A, B, C, D e O' em relação aos sistemas dados.

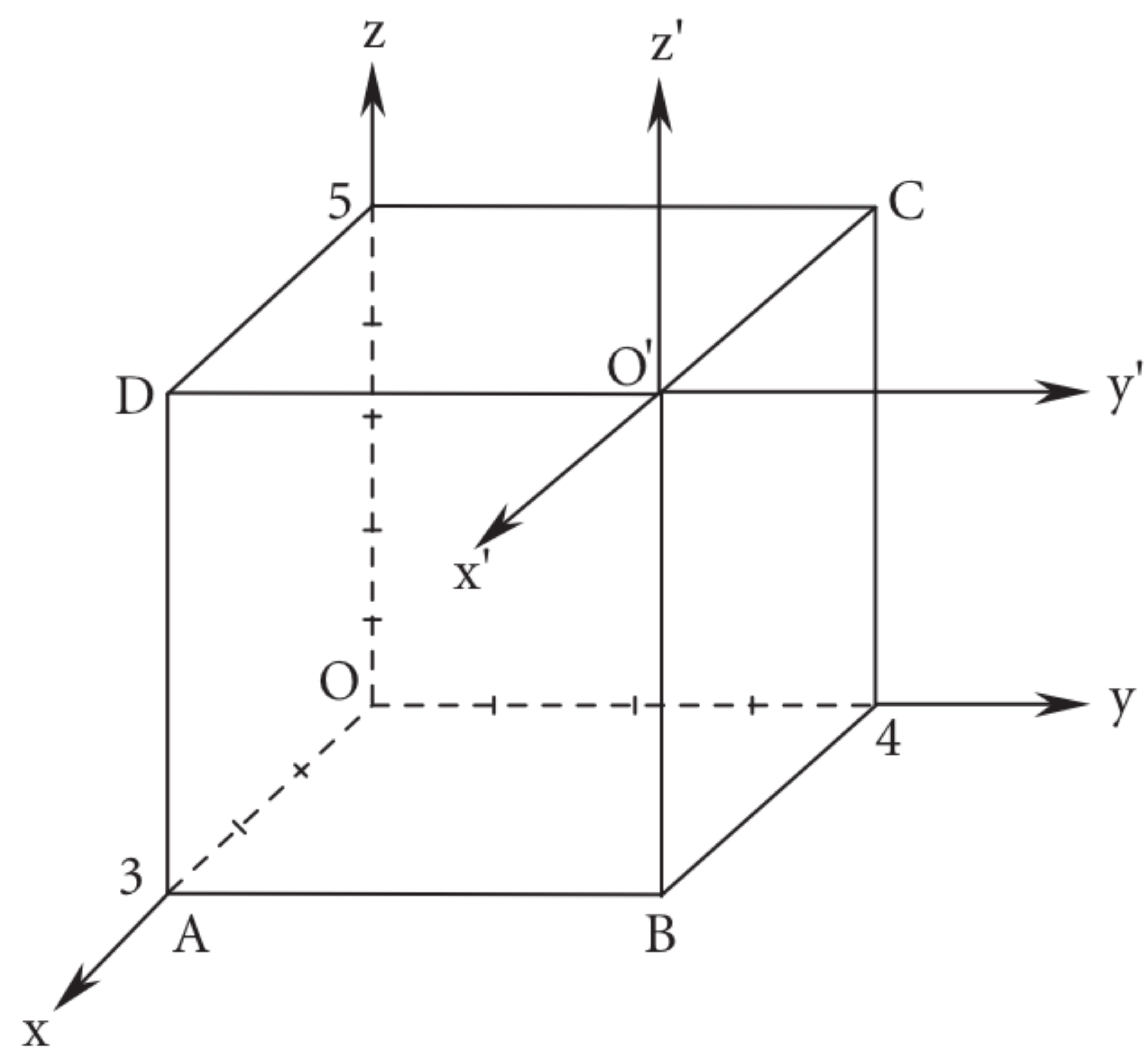


Figura 1.66

31. Dados os pontos A(2, –2, 3) e B(1, 1, 5) e o vetor $\vec{v} = (1, 3, -4)$, calcular:

a) $A + 3\vec{v}$

b) $(A - B) - \vec{v}$

c) $B + 2(B - A)$

d) $2\vec{v} - 3(B - A)$

32. Dados os pontos A(3, –4, –2) e B(–2, 1, 0), determinar o ponto N pertencente ao segmento AB tal que $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

33. Dados os pontos A(1, –2, 3), B(2, 1, –4) e C(–1, –3, 1), determinar o ponto D tal que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

34. Sabendo que $3\vec{u} - 4\vec{v} = 2\vec{w}$, determinar a, b, e c, sendo $\vec{u} = (2, -1, c)$, $\vec{v} = (a, b - 2, 3)$ e $\vec{w} = (4, -1, 0)$.

35. Dados os vetores $\vec{u} = (2, 3, -1)$, $\vec{v} = (1, -1, 1)$ e $\vec{w} = (-3, 4, 0)$,

a) determinar o vetor $\vec{x}$ de modo que $3\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 4\vec{x} + 2\vec{w}$;

b) encontrar os números a_1, a_2 e a_3 tais que $a_1\vec{u} + a_2\vec{v} + a_3\vec{w} = (-2, 13, -5)$.

36. Representar no mesmo sistema Oxyz o vetor $\vec{v} = (1, -1, 3)$ com origem nos pontos O(0, 0, 0), A(–3, –4, 0), B(–2, 4, 2), C(3, 0, –4) e D(3, 4, –2).

37. Sendo A(2, –5, 3) e B(7, 3, –1) vértices consecutivos de um paralelogramo ABCD e M(4, –3, 3) o ponto de interseção das diagonais, determinar os vértices C e D.

38. Determinar os três vértices de um triângulo sabendo que os pontos médios de seus lados são M(5, 0, –2), N(3, 1, –3) e P(4, 2, 1).

39. Dados os pontos A(1, –1, 3) e B(3, 1, 5), até que ponto se deve prolongar o segmento AB, no sentido de A para B, para que seu comprimento quadruplique de valor?

40. Sendo A(–2, 1, 3) e B(6, –7, 1) extremidades de um segmento, determinar:

a) os pontos C, D e E, nesta ordem, que dividem o segmento AB em quatro partes de mesmo comprimento;

b) os pontos F e G, nesta ordem, que dividem o segmento AB em três partes de mesmo comprimento.

41. O ponto A é um dos vértices de um paralelepípedo e os três vértices adjacentes são B, C e D. Sendo AA' uma diagonal do paralelepípedo, determinar o ponto A' nos seguintes casos:

a) A(3, 5, 0), B(1, 5, 0), C(3, 5, 4) e D(3, 2, 0)

b) A(–1, 2, 1), B(3, –1, 2), C(4, 1, –3) e D(0, –3, –1)

c) A(–1, 2, 3), B(2, –1, 0), C(3, 1, 4) e D(–2, 0, 5)

42. Apresentar o vetor genérico que satisfaz a condição:

a) paralelo ao eixo x;

b) representado no eixo z;

c) paralelo ao plano xy;

d) paralelo ao plano yz;

e) ortogonal ao eixo y;

f) ortogonal ao eixo z;

g) ortogonal ao plano xy;

h) ortogonal ao plano xz.

43. Quais dos seguintes vetores $\vec{u} = (4, -6, 2)$, $\vec{v} = (-6, 9, -3)$, $\vec{w} = (14, -21, 9)$ e $\vec{t} = (10, -15, 5)$ são paralelos?

44. Dado o vetor $\vec{w} = (3, 2, 5)$, determinar a e b de modo que os vetores $\vec{u} = (3, 2, -1)$ e $\vec{v} = (a, 6, b) + 2\vec{w}$ sejam paralelos.

45. A reta que passa pelos pontos A(–2, 5, 1) e B(1, 3, 0) é paralela à reta determinada por C(3, –1, –1) e D(0, m, n). Determinar o ponto D.

46. Verificar se são colineares os pontos:

a) A(–1, –5, 0), B(2, 1, 3) e C(–2, –7, –1)

b) A(2, 1, –1), B(3, –1, 0) e C(1, 0, 4)

c) A(–1, 4, –3), B(2, 1, 3) e C(4, –1, 7)

47. Sabendo que o ponto P(m, 4, n) pertence à reta que passa pelos pontos A(–1, –2, 3) e B(2, 1, –5), calcular m e n.

48. Encontrar o vértice oposto a B, no paralelogramo ABCD, para

a) A(–1, 0, 3), B(1, 1, 2) e C(3, –2, 5)

b) A(4, 0, 1), B(5, 1, 3) e C(3, 2, 5)

49. Verificar se são unitários os seguintes vetores:

$$\vec{u} = (1, 1, 1) \text{ e } \vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$$

50. Determinar o valor de n para que o vetor $\vec{v} = (n, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ seja unitário.

51. Determinar o valor de *a* para que $\vec{u} = (a, -2a, 2a)$ seja um versor.

52. Dados os pontos A(1, 0, –1), B(4, 2, 1) e C(1, 2, 0), determinar o valor de m para que $|\vec{v}| = 7$, sendo $\vec{v} = m\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

53. Determinar o valor de y para que seja equilátero o triângulo de vértices A(4, y, 4), B(10, y, –2) e C(2, 0, –4).

54. Obter um ponto P do eixo das abscissas equidistante dos pontos A(3, –1, 4) e B(1, –2, –3).

55. Obter um ponto P do eixo das cotas cuja distância ao ponto A(–1, 2, –2) seja igual a 3.

56. Dado o vetor $\vec{v} = (2, -1, -3)$, determinar o vetor paralelo a $\vec{v}$ que tenha

a) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e três vezes o módulo de $\vec{v}$;

b) o mesmo sentido de $\vec{v}$ e módulo 4;

c) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e módulo 5.

Respostas de problemas propostos

1. **a)** (3, –5) **b)** (–5, 4) **c)** $(1, -\frac{1}{2})$ **d)** $(\frac{13}{2}, -9)$

2. **a)** $(-\frac{15}{2}, \frac{15}{2})$ **b)** $(\frac{23}{5}, \frac{11}{5})$

3. **a)** (–4, 1) **b)** (2, 5) **c)** (–5, –30)

4. $a_1 = -1$ e $a_1 = 2$

5. **a)** (–8, 11) **b)** (6, –8) **c)** (–9, 11) **d)** (–14, 19)

6. **a)** $\vec{v} = (3, 1)$ **b)** $\vec{v} = (-2, -\frac{2}{3})$

8. (4, –2)

10. **b)** $\vec{0}$

11. **a)** D(–2, 4) **b)** D(1, 2)

12. (2, 2), (0, –4) e (10, 6)

13. M(1,0), $N(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3})$, P(9,–4)

14. **a)** $C(0,\frac{3}{2}), D(2,0), E(4,-\frac{3}{2})$ **b)** $F(\frac{2}{3},1), G(\frac{10}{3},-1)$

15. $P(\frac{3}{4}x_1 + \frac{x_2}{4}, \frac{3}{4}y_1 + \frac{y_2}{4})$

16. **a)** $\sqrt{2}$ **b)** 10 **c)** $2\sqrt{13}$ **d)** $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

e) 5 **f)** $\sqrt{13}$ **g)** $\sqrt{34}$ **h)** 1

17. $\pm 2\sqrt{3}$

18. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

20. (6, 0) ou (−2, 0)

21. **a)** P(0, 5) **b)** P(−5, −10) **c)** $P(x, 3x + 5), x \in \mathbb{R}$

22. **a)** $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ **b)** $(\frac{3}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}})$ e $(-\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}})$

c) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ **d)** (0, 1) e (0, −1)

23. **a)** (−2, 6) **b)** $(\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{6}{\sqrt{10}})$ **c)** $(-\frac{4}{\sqrt{10}}, \frac{12}{\sqrt{10}})$

27. Vértices da base inferior: (1, 3, 0), (1, 5, 0), (3, 3, 0) e (3, 5, 0)

Vértices da base superior: (1, 3, 4), (1, 5, 4), (3, 3, 4) e (3, 5, 4)

28. **a)** 2 **d)** $2\sqrt{5}$

b) 4 **e)** $\sqrt{13}$

c) 3 **f)** 5

29. B(2, −3, 2), C(3, −3, 2), D(3, −1, 2), E(3, −1, 5), F(2, −1, 5), G(2, −3, 5), H(3, −3, 5)

30. Em relação a Oxyz: O(0, 0, 0), A(3, 0, 0), B(3, 4, 0), C(0, 4, 5), D(3, 0,5) e O'(3,4,5)

Em relação a O'x'y'z': O(−3, −4, −5), A(0, −4, −5), B(0, 0, −5), C(−3, 0, 0), D(0, −4, 0) e O'(0, 0, 0)

31. **a)** (5, 7, −9) **c)** (−1, 7, 9)

b) (0, −6, 2) **d)** (5, −3, −14)

32. $N(1,-2,-\frac{6}{5})$

33. D(−2,−6,8)

34. $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{7}{4}$ e $c = 4$

35. **a)** $\vec{x} = (\frac{11}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ **b)** $a_2 = 2, a_2 = -3, a_2 = 1$

37. C(6, −1, 3) e D(1, −9, 7)

38. (4, −1, −6), (6, 1, 2) e (2, 3, 0)

39. (9, 7, 11)

40. **a)** $(0, -1, \frac{5}{2}), (2, -3, 2), (4, -5, \frac{3}{2})$ **b)** $(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{7}{3}), (\frac{10}{3}, -\frac{13}{3}, \frac{5}{3})$

41. **a)** (1, 2, 4) **b)** (9, −7, −4) **c)** (5, −4, 3)

42. **a)** (x, 0, 0) **e)** (x, 0, z)
b) (0, 0, z) **g)** (0, 0, z)
c) (x, y, 0) **f)** (x, y, 0)
d) (0, y, z) **h)** (0, y, 0)

43. São paralelos: $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{t}$

44. $a = 9$ e $b = -15$

45. D(0, 1, 0)

46. **a)** sim **b)** não **c)** sim

47. $m = 5$ e $n = -13$

48. **a)** D(1, −3, 6) **b)** D(2, 1, 3)

49. $\vec{v}$ é unitário

50. $n = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$

51. $a = \pm\frac{1}{3}$

52. $m = 3$ ou $-\frac{13}{5}$

53. $y = \pm 2$

54. P(3, 0, 0)

55. P(0, 0, 0) ou P(0, 0, −4)

56. **a)** (−6, 3, 9) **b)** $(\frac{8}{\sqrt{14}}, -\frac{4}{\sqrt{14}}, -\frac{12}{\sqrt{14}})$ **c)** $(-\frac{10}{\sqrt{14}}, \frac{5}{\sqrt{14}}, \frac{15}{\sqrt{14}})$

2 PRODUTO ESCALAR

DEFINIÇÃO ALGÉBRICA

Chama-se *produto escalar* de dois vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, e se representa por $\vec{u}\cdot\vec{v}$, ao número real

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \qquad (1)$$

O produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ também é indicado por $<\vec{u},\vec{v}>$ e se lê "$\vec{u}$ escalar $\vec{v}$".

Exemplos

1. Dados os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$ e $\vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$, tem-se

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3(4) - 5(-2) + 8(-1) = 12 + 10 - 8 = 14$$

2. Sejam os vetores $\vec{u} = (3,2,1)$ e $\vec{v} = (-1,-4,-1)$. Calcular:

a) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(2\vec{u}-\vec{v})$

b) $\vec{u}\cdot\vec{u}$

c) $\vec{0}\cdot\vec{u}$

Solução

a) Como $\vec{u}+\vec{v} = (2,-2,0)$ e $2\vec{u}-\vec{v} = (6,4,2)-(-1,-4,-1) = (7,8,3)$, tem-se

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(2\vec{u}-\vec{v}) = 2(7) - 2(8) + 0(3) = 14 - 16 + 0 = -2$$

b) $\vec{u}\cdot\vec{u} = 3(3) + 2(2) + 1(1) = 3^2 + 2^2 + 1^2 = 9 + 4 + 1 = 14$

c) $\vec{0}\cdot\vec{u} = (0,0,0)\cdot(3,2,1) = 0(3) + 0(2) + 0(1) = 0$

3. Dados os vetores $\vec{u} = (4,\alpha,-1)$ e $\vec{v} = (\alpha,2,3)$ e os pontos $A(4,-1,2)$ e $B(3,2,-1)$, determinar o valor de α tal que $\vec{u}\cdot(\vec{v} + \overrightarrow{BA}) = 5$.

Solução

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (1,-3,3)$$

$$\vec{v} + \overrightarrow{BA} = (\alpha,2,3) + (1,-3,3) = (\alpha+1,-1,6)$$

Substituindo e resolvendo a equação dada, vem

$$(4,\alpha,-1)\cdot(\alpha+1,-1,6) = 5$$

$$4(\alpha+1) + \alpha(-1) - 1(6) = 5$$

$$4\alpha + 4 - \alpha - 6 = 5$$

$$3\alpha = 7$$

$$\alpha = \frac{7}{3}$$

PROPRIEDADES DO PRODUTO ESCALAR

Para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ e o número real α, é fácil verificar que:

I) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

II) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$ e $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$

III) $\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\alpha\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})$

IV) $\vec{u}\cdot\vec{u} > 0$ se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0$, se $\vec{u} = \vec{0} = (0,0,0)$

V) $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2$

De fato, vimos que o módulo do vetor $\vec{u} = (x,y,z)$ é dado por

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

Tendo em vista que

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = (x,y,z)\cdot(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2\ ,$$

conclui-se que

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

ou, de modo equivalente, $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2$.

Demonstraremos a propriedade II, deixando a cargo do leitor as demais. Se $\vec{u} = (x_1,y_1,z_1), \vec{v} = (x_2,y_2,z_2)$ e $\vec{w} = (x_3,y_3,z_3)$, então

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) &= (x_1, y_1, z_1)\cdot(x_2+x_3, y_2+y_3, z_2+z_3)\\ &= x_1(x_2+x_3)+y_1(y_2+y_3)+z_1(z_2+z_3)\\ &= x_1x_2+x_1x_3+y_1y_2+y_1y_3+z_1z_2+z_1z_3\\ &= (x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)+(x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3)\\ &= \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\end{aligned}$$

Exemplos

1. Sendo $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=2$ e $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$, calcular $(3\vec{u}-2\vec{v})\cdot(-\vec{u}+4\vec{v})$.

Solução

$$\begin{aligned}(3\vec{u}-2\vec{v})\cdot(-\vec{u}+4\vec{v}) &= 3\vec{u}\cdot(-\vec{u}+4\vec{v})-2\vec{v}\cdot(-\vec{u}+4\vec{v})\\ &= -3\vec{u}\cdot\vec{u}+12\vec{u}\cdot\vec{v}+2\vec{v}\cdot\vec{u}-8\vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= -3|\vec{u}|^2+14\vec{u}\cdot\vec{v}-8|\vec{v}|^2\\ &= -3(4)^2+14(3)-8(2)^2\\ &= -48+42-32\\ &= -38\end{aligned}$$

2. Mostrar que $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2$

Solução

$$\begin{aligned}|\vec{u}+\vec{v}|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})+\vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= |\vec{u}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2\end{aligned}$$

Observação

De forma análoga, demonstra-se que

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2$$

3. Provar que $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=|\vec{u}|^2-|\vec{v}|^2$

Solução

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{v})+\vec{v}\cdot(\vec{u}-\vec{v})$$
$$=\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}$$
$$=|\vec{u}|^2-|\vec{v}|^2$$

DEFINIÇÃO GEOMÉTRICA DE PRODUTO ESCALAR

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos e θ o ângulo entre eles, então

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \qquad \textbf{(2)}$$

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ABC da Figura 2.1, temos

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \qquad \textbf{(3)}$$

Por outro lado, de acordo com o exemplo 2 (item anterior):

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v} \qquad \textbf{(4)}$$

Comparando as igualdades **(3)** e **(4)**:

$$|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

e então

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta\,,\ 0°\le\theta\le 180°$$

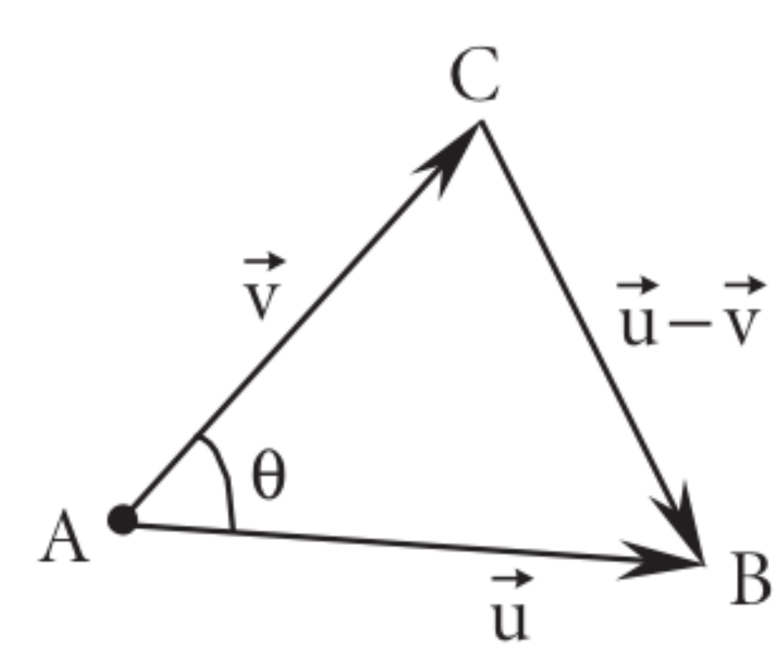


Figura 2.1

CONCLUSÃO: O produto escalar de dois vetores não nulos é igual ao produto de seus módulos pelo cosseno do ângulo por eles formado.

Exemplo

Sendo $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ e $120°$ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ b) $|\vec{u}+\vec{v}|$ c) $|\vec{u}-\vec{v}|$

Solução

a) Pela relação (2), tem-se

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos 120°=(2)(3)(-\frac{1}{2})=-3$$

b) Vimos que

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2$$

Então,

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = 2^2 + 2(-3) + 3^2 = 7$$

e, portanto,

$$|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{7}$$

c) De forma análoga, tem-se

$$\begin{aligned} |\vec{u}-\vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 \\ &= 2^2 - 2(-3) + 3^2 \\ &= 19 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$|\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{19}$$

Observações

a) Vamos exemplificar a teoria com um caso particular a equivalência das expressões do produto escalar apresentadas em **(1)** e **(2)**. Na Figura 2.2 vemos que o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}=(1,1,0)$ e $\vec{v}=(0,1,0)$ é 45°. Então, por **(1)**, temos

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1(0)+1(1)+0(0) = 1$$

e, por **(2)**,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos 45^\circ = (\sqrt{2})(1)(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1$$

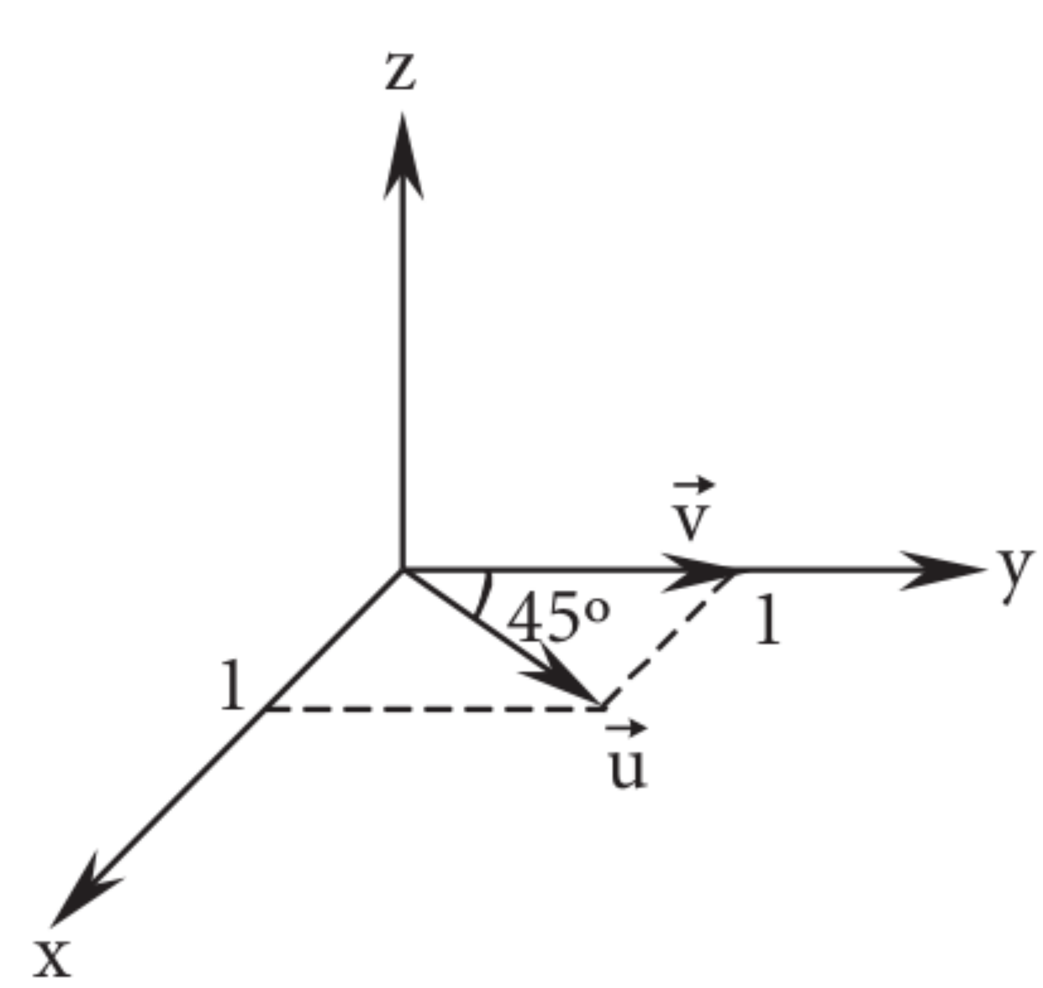


Figura 2.2

b) Deixaremos de demonstrar dois resultados válidos para todos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

1) $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$ (*Desigualdade de Schwarz*)

2) $|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}|+|\vec{v}|$ (*Desigualdade triangular*)

A segunda desigualdade confirma a propriedade geométrica segundo a qual, em um triângulo (Figura 2.3), a soma dos comprimentos de dois lados ($|\vec{u}|+|\vec{v}|$) é maior do que o comprimento do terceiro lado ($|\vec{u}+\vec{v}|$).

A igualdade somente ocorre quando $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem paralelos e de mesmo sentido.

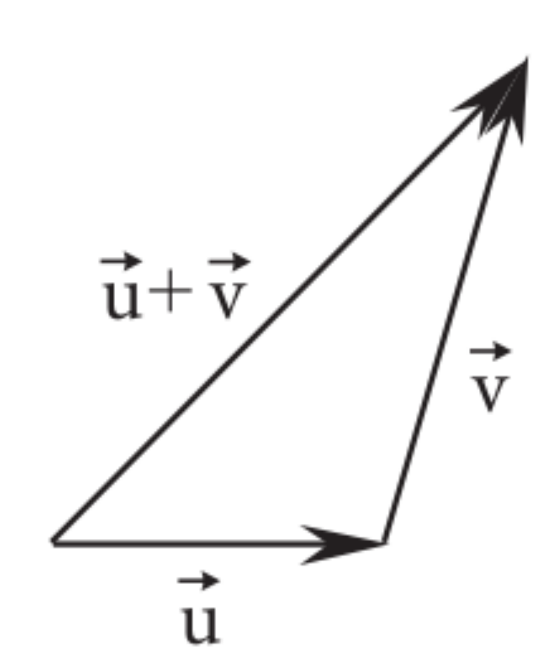


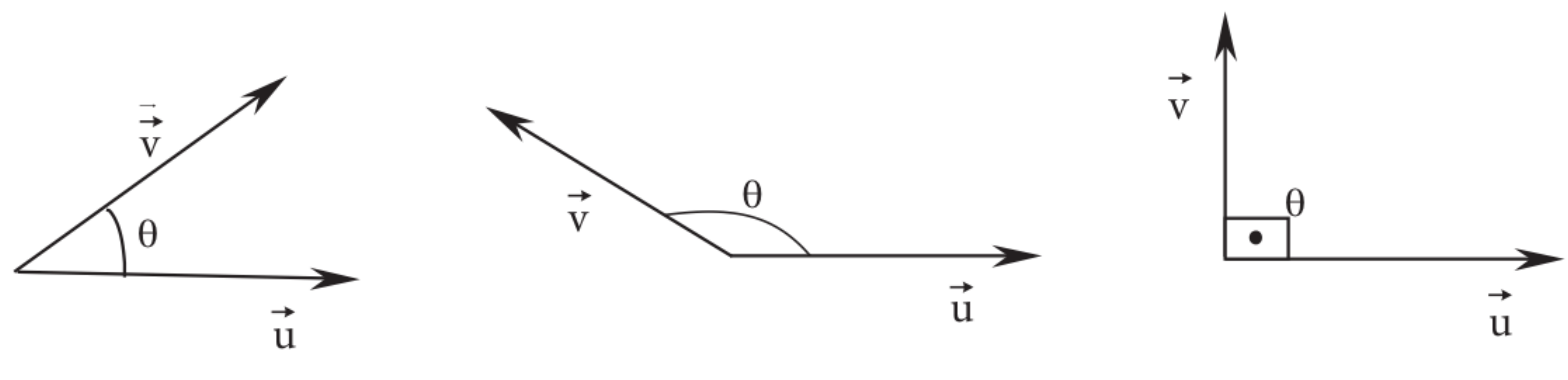
Figura 2.3

c) Como em **(2)** o sinal de $\vec{u}\cdot\vec{v}$ é o mesmo de $\cos\theta$, concluímos que:

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}>0 \Leftrightarrow \cos\theta > 0 \Leftrightarrow 0° \leq \theta < 90°$ (Figura 2.4(a))

2) $\vec{u}\cdot\vec{v}<0 \Leftrightarrow \cos\theta < 0 \Leftrightarrow 90° < \theta \leq 180°$ (Figura 2.4 (b))

3) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 90°$ (Figura 2.4 (c))



(a) (b) (c)

Figura 2.4

Esta afirmação estabelece a *condição de ortogonalidade* de dois vetores:

> Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se, e somente se, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

Exemplos

1. Mostrar que os seguintes pares de vetores são ortogonais:

a) $\vec{u}=(1,-2,3)$ e $\vec{v}=(4,5,2)$

b) $\vec{i}$ e $\vec{j}$

Solução

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=1(4)-2(5)+3(2)=4-10+6=0$

b) $\vec{i}\cdot\vec{j}=(1,0,0)\cdot(0,1,0)=1(0)+0(1)+0(0)=0$

Observação

O vetor $\vec{0}$ é ortogonal a todo vetor, ou seja, $\vec{0}\cdot\vec{v}=0$ para todo $\vec{v}$.

2. Provar que o triângulo de vértices A(2, 3, 1), B(2, 1, –1) e C(2, 2, –2) é um triângulo retângulo.

Solução

A forma mais simples de provar a existência de um ângulo reto é mostrar que existem dois vetores que determinam os lados do triângulo cujo produto escalar é zero. Consideremos os vetores

$$\overrightarrow{AB}=(0,-2,-2)$$

$$\overrightarrow{AC}=(0,-1,-3)$$

$$\overrightarrow{BC}=(0,1,-1)$$

(poderíamos também considerar os seus vetores opostos).
Calculemos:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(0,-2,-2)\cdot(0,-1,-3)=0+2+6=8\neq 0$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(0,-2,-2)\cdot(0,1,-1)=0-2+2=0$$

Tendo em vista que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, o triângulo é retângulo em B.

3. Determinar um vetor ortogonal aos vetores $\vec{v}_1=(1,-1,0)$ e $\vec{v}_2=(1,0,1)$.

Solução

Seja $\vec{u}=(x,y,z)$ o vetor procurado. Como $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, devemos ter

$$\vec{u}\cdot\vec{v}_1=(x,y,z)\cdot(1,-1,0)=x-y=0$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}_2=(x,y,z)\cdot(1,0,1)=x+z=0$$

O sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

tem infinitas soluções do tipo

$$y=x \text{ e } z=-x$$

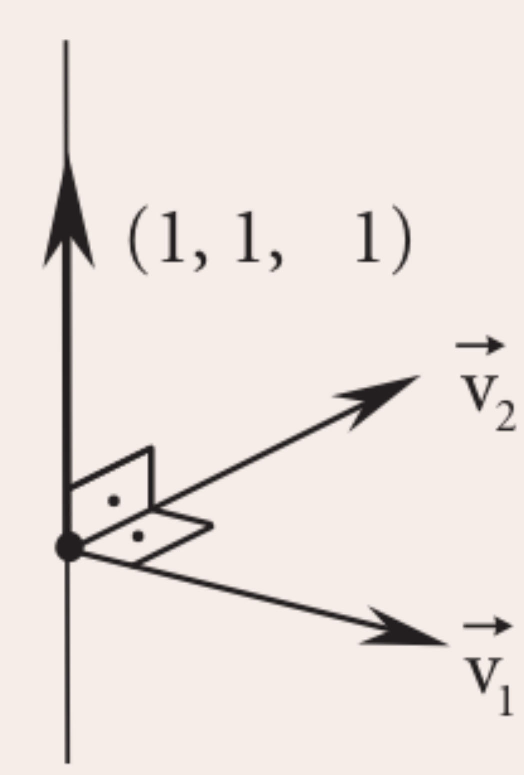


Figura 2.5

Logo, os vetores ortogonais $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são da forma $\vec{u}=(x,x,-x)$ ou $\vec{u}=x(1,1,-1)$, $x\in\mathbb{R}$, ou seja, são todos múltiplos de $(1, 1, -1)$, conforme sugere a Figura 2.5.

4. Demonstrar que as diagonais de um losango são perpendiculares entre si.

Solução

Lembremos que todo losango é um paralelogramo cujos lados têm o mesmo comprimento. Consideremos o losango ABCD (Figura 2.6). Devemos mostrar que

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=0$$

Fazendo $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ e $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$, pela figura vemos que $\overrightarrow{AC}=\vec{u}+\vec{v}$ e $\overrightarrow{DB}=\vec{u}-\vec{v}$. Logo,

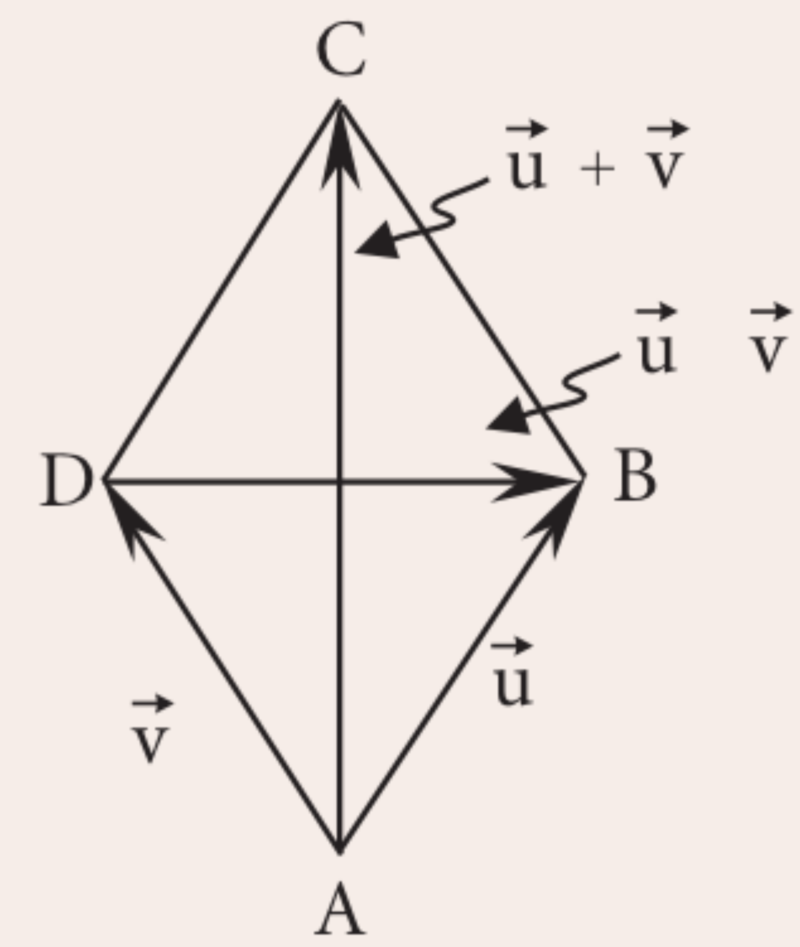


Figura 2.6

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=|\vec{u}|^2-|\vec{v}|^2=0 \qquad \textbf{(5)}$$

pois $|\vec{u}|=|\vec{v}|$.

5. Provar, utilizando o produto escalar, que o ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto.

Solução

Observemos que, considerados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como na Figura 2.7, os vetores $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$ determinam o ângulo inscrito na semicircunferência. Portanto, de maneira análoga ao exemplo anterior, visto em **(5)**, temos

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=|\vec{u}|^2-|\vec{v}|^2=0$$

pois $|\vec{u}|=|\vec{v}|$ (medida do raio).

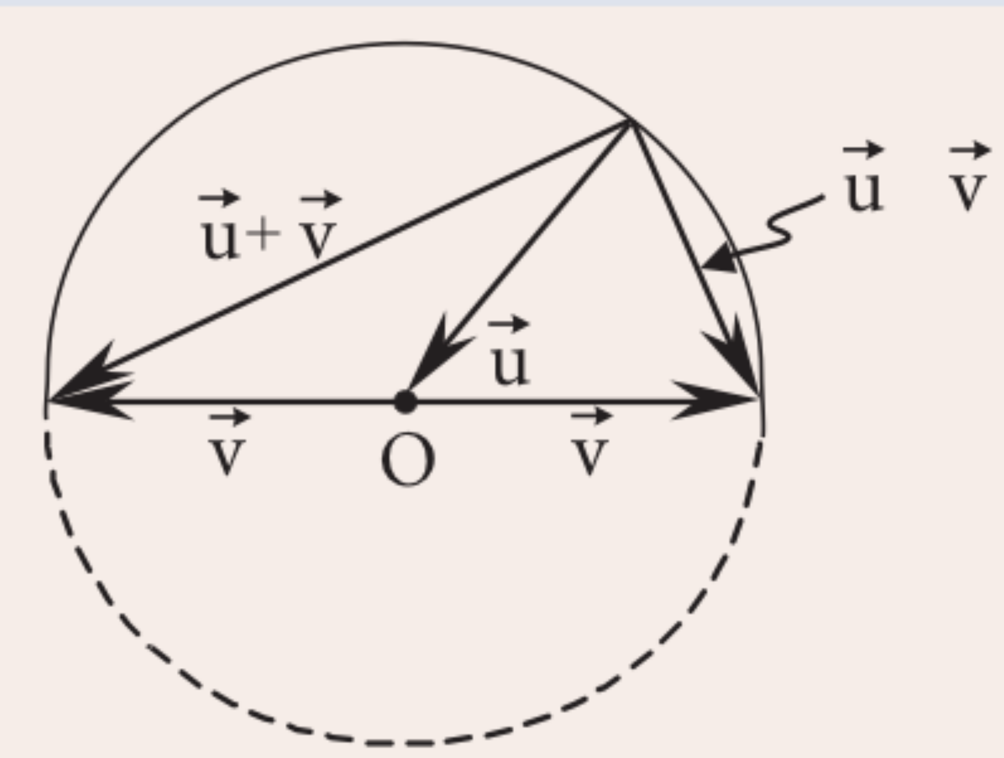


Figura 2.7

CÁLCULO DO ÂNGULO DE DOIS VETORES

Da igualdade $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$, vem

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} \qquad \textbf{(6)}$$

fórmula a partir da qual se calcula o ângulo θ entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos.

Exemplos

1. Calcular o ângulo entre os vetores $\vec{u}=(1,1,4)$ e $\vec{v}=(-1,2,2)$.

Solução

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{(1,1,4)\cdot(-1,2,2)}{\sqrt{1+1+16}\sqrt{1+4+4}}=\frac{-1+2+8}{\sqrt{18}\sqrt{9}}=\frac{9}{3\sqrt{2}\cdot 3}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo,

$$\theta=\text{arc }\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=45°$$

2. Sabendo que o vetor $\vec{v}=(2,1,-1)$ forma ângulo de 60° com o vetor $\overrightarrow{AB}$ determinado pelos pontos A(3, 1, –2) e B(4, 0, m), calcular m.

Solução

De acordo com a igualdade **(6)**, tem-se

$$\cos 60°=\frac{\vec{v}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\vec{v}||\overrightarrow{AB}|}$$

Como $\cos 60°=\frac{1}{2}$ e $\overrightarrow{AB}=B-A=(1,-1,m+2)$, vem

$$\frac{1}{2}=\frac{(2,1,-1)\cdot(1,-1,m+2)}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+1+m^2+4m+4}}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{2-1-m-2}{\sqrt{6}\sqrt{m^2+4m+6}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{-1-m}{\sqrt{6m^2+24m+36}}\right)^2$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1+2m+m^2}{6m^2+24m+36}$$

$$6m^2+24m+36=4+8m+4m^2$$

$$2m^2+16m+32=0$$

$$m^2+8m+16=0$$

Portanto, m = –4 (raiz dupla).

3. Determinar os ângulos internos ao triângulo ABC, sendo A(3, −3, 3), B(2, −1, 2) e C(1, 0, 2).

Solução

Observemos que, no triângulo ABC da Figura 2.8, o ângulo A é determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Logo,

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-1,2,-1)\cdot(-2,3,-1)}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{4+9+1}} = \frac{2+6+1}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = \frac{9}{\sqrt{84}} \cong 0{,}982$$

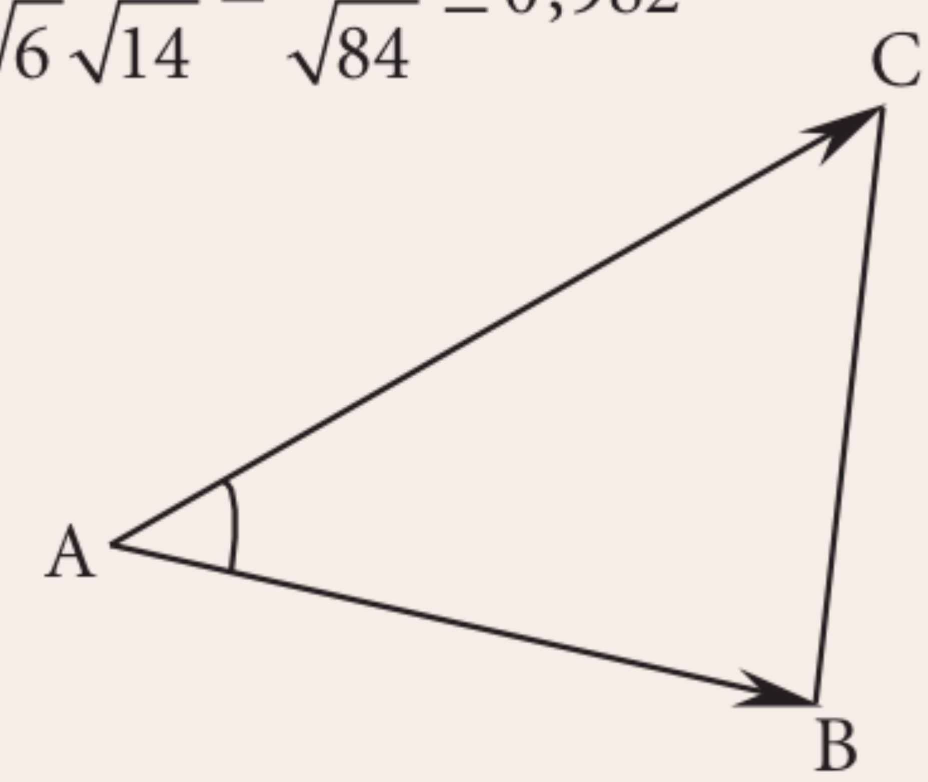


Figura 2.8

$$\hat{A} = \text{arc cos}\left(\frac{9}{\sqrt{84}}\right) \cong 10°53'$$

Analogamente,

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{(1,-2,1)\cdot(-1,1,0)}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{1+1+0}} = \frac{-1-2}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\hat{B} = \text{arc cos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 150°$$

$$\cos C = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|} = \frac{(2,-3,1)\cdot(1,-1,0)}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+1+0}} = \frac{2+3}{\sqrt{14}\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{28}} \cong 0{,}9449$$

$\hat{C} = \text{arc cos}\left(\frac{5}{\sqrt{28}}\right) \cong 19°7'$. Notemos que $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180°$.

ÂNGULOS DIRETORES E COSSENOS DIRETORES DE UM VETOR

Seja o vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ não nulo.

Ângulos diretores de $\vec{v}$ são os ângulos α, β e γ que $\vec{v}$ forma com os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente (Figura 2.9).

Cossenos diretores de $\vec{v}$ são os cossenos de seus ângulos diretores, ou seja, cos α, cos β e cos γ.

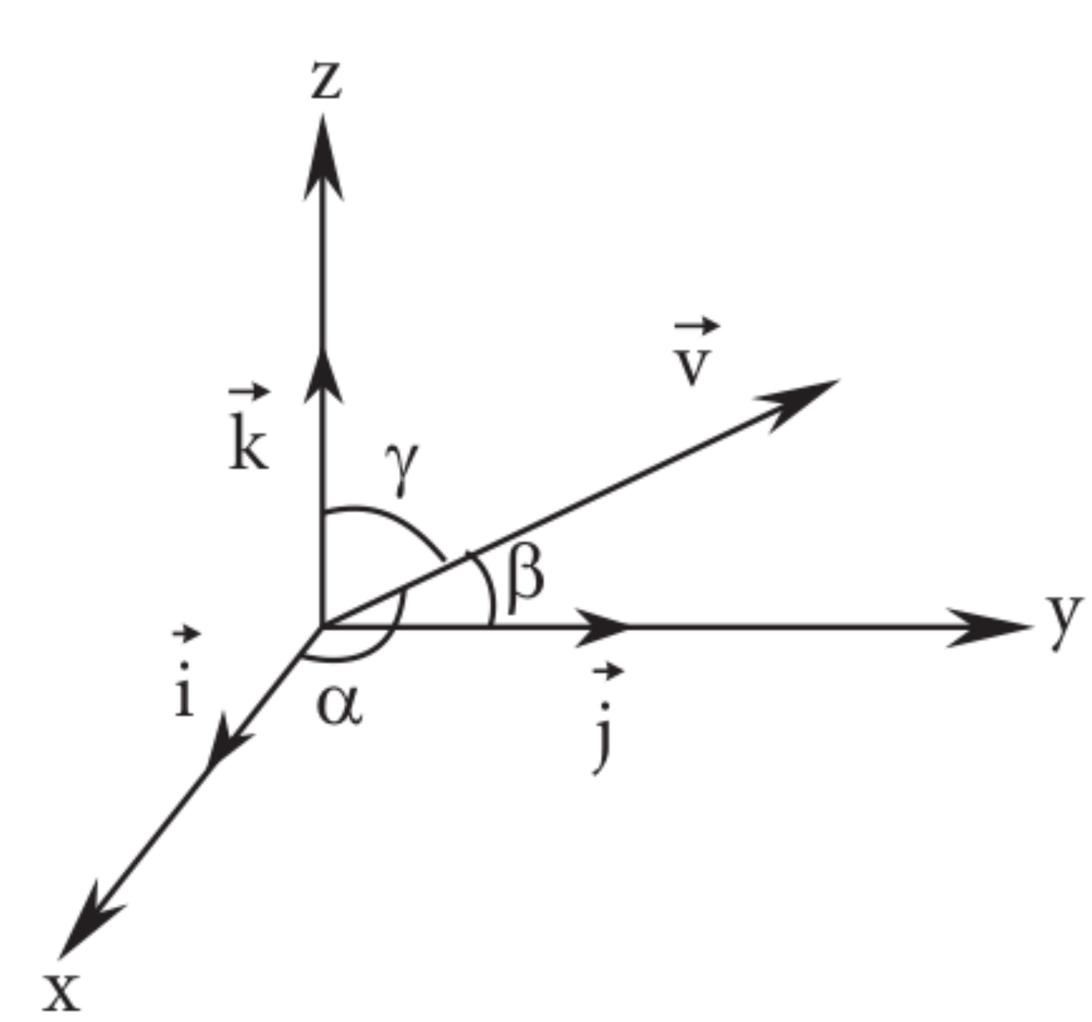


Figura 2.9

Para o cálculo desses valores utilizaremos a fórmula **(6)**:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{|\vec{v}||\vec{i}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(1,0,0)}{|\vec{v}|(1)} = \frac{x}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{|\vec{v}||\vec{j}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(0,1,0)}{|\vec{v}|(1)} = \frac{y}{|\vec{v}|} \qquad \textbf{(7)}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{|\vec{v}||\vec{k}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(0,0,1)}{|\vec{v}|(1)} = \frac{z}{|\vec{v}|}$$

Observação

Notemos que os cossenos diretores de $\vec{v}$ são precisamente os componentes do versor de $\vec{v}$:

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(x,y,z)}{|\vec{v}|} = \left(\frac{x}{|\vec{v}|}, \frac{y}{|\vec{v}|}, \frac{z}{|\vec{v}|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

Como o versor é um vetor unitário, decorre imediatamente que:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad \textbf{(8)}$$

Exemplos

1. Calcular os ângulos diretores de $\vec{v} = (1,-1,0)$.

Solução

$$|\vec{v}| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

Utilizando **(7)**, temos

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore \alpha = 45°$$

$$\cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \therefore \beta = 135°$$

$$\cos\gamma = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0 \therefore \gamma = 90°$$

2. Os ângulos diretores de um vetor são α, 45° e 60°. Determinar α.

Solução

Substituindo em **(8)**, β por 45° e γ por 60°, vem

$$\cos^2\alpha + \cos^2 45° + \cos^2 60° = 1$$

$$\cos^2\alpha + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{4-2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

Logo, α = 60° ou α = 120°.

3. Um vetor $\vec{v}$ do espaço forma com os vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ ângulos de 60° e 120°, respectivamente. Determinar o vetor $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}| = 2$.

Solução

Seja $\vec{v} = (x, y, z)$ o vetor procurado. No caso presente: α = 60° e β = 120°. Então, utilizando **(7)**, temos

$\cos 60° = \frac{x}{|\vec{v}|}$ ou $\frac{1}{2} = \frac{x}{2}$, em que x = 1

$\cos 120° = \frac{y}{|\vec{v}|}$ ou $-\frac{1}{2} = \frac{y}{2}$, em que y = −1

Como $|\vec{v}| = 2$, ou seja,

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2$$

vem

$$(1)^2 + (-1)^2 + z^2 = 4$$

$$z^2 = 2$$

$$z = \pm\sqrt{2}$$

Portanto,

$$\vec{v} = (1, -1, \sqrt{2}) \text{ ou } \vec{v} = (1, -1, -\sqrt{2})$$

4. Obter o vetor $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}|=4$, $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Oz, forma ângulo de $60°$ com o vetor $\vec{i}$ e ângulo obtuso com $\vec{j}$.

Solução

Sendo $\vec{v}$ ortogonal ao eixo Oz, ele é do tipo $\vec{v}=(x,y,0)$.
Por **(7)**, tem-se
$\cos 60° = \dfrac{x}{|\vec{v}|}$ ou $\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{4}$, em que x = 2
Como $|\vec{v}|=4$, ou seja,

$$\sqrt{x^2+y^2}=4$$

vem

$$(2)^2+y^2=16$$

$$y^2=12$$

$$y=\pm 2\sqrt{3}$$

Tendo em vista que β (ângulo de $\vec{v}$ com $\vec{j}$) é obtuso ($90° < \beta \le 180°$), na igualdade $\cos\beta=\dfrac{y}{|\vec{v}|}$, o valor de y é negativo.
Portanto,

$$\vec{v}=(2,-2\sqrt{3},0)$$

PROJEÇÃO DE UM VETOR SOBRE OUTRO

Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos e θ o ângulo entre eles. Pretendemos decompor um dos vetores, digamos $\vec{v}$, tal que

$$\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$$

sendo $\vec{v}_1 \parallel \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.

A Figura 2.10 ilustra as duas situações possíveis, podendo ser θ um ângulo agudo (Figura 2.10 (a)) ou obtuso (Figura 2.10 (b)).

O vetor $\vec{v}_1$ é chamado *projeção ortogonal de* $\vec{v}$ *sobre* $\vec{u}$ e indicado por

$$\vec{v}_1=\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} \qquad \textbf{(9)}$$

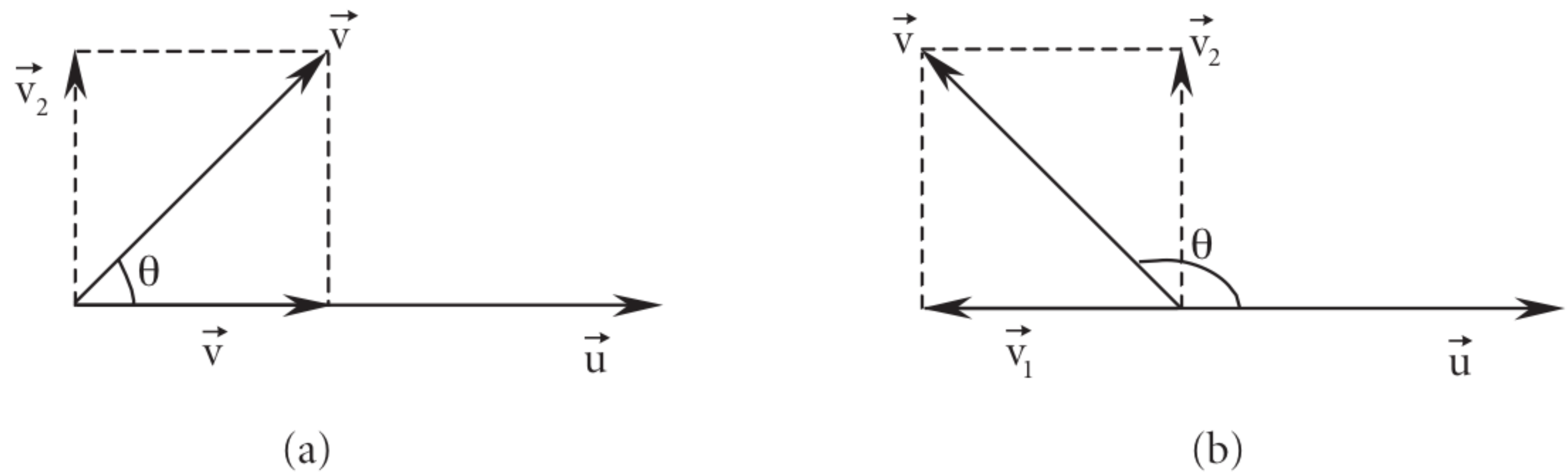


Figura 2.10

Ora, sendo $\vec{v}_1 \parallel \vec{u}$, temos $\vec{v}_1 = \alpha\vec{u}$ e como $\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1 = \vec{v} - \alpha\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{u}$, vem

$$(\vec{v} - \alpha\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0$$

ou

$$\vec{v} \cdot \vec{u} - \alpha\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$$

e

$$\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

Portanto, sendo $\vec{v}_1 = \alpha\vec{u}$, por **(9)**, conclui-se que

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\right)\vec{u} \qquad \textbf{(10)}$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÓDULO DO PRODUTO ESCALAR

Se em **(10)** o vetor $\vec{u}$ é unitário ($|\vec{u}| = 1$), tem-se

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u}\text{, pois } \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 = 1$$

e, portanto,

$$|\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}| = |(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u}| = |\vec{v} \cdot \vec{u}||\vec{u}|$$

ou

$$|\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}| = |\vec{v} \cdot \vec{u}|$$

Logo,

O comprimento do vetor projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, sendo $\vec{u}$ unitário, é igual ao módulo do produto escalar de $\vec{v}$ por $\vec{u}$.

Exemplos

1. Determinar o vetor projeção de $\vec{v}=(2,3,4)$ sobre $\vec{u}=(1,-1,0)$.

Solução

Temos

$$\vec{v}\cdot\vec{u}=2(1)+3(-1)+4(0)=-1$$

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2=(1)^2+(-1)^2+0^2=2$$

Logo

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}=\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u}=\left(\frac{-1}{2}\right)(1,-1,0)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$$

2. Dados os vetores $\vec{v}=(1,3,-5)$ e $\vec{u}=(4,-2,8)$, decompor $\vec{v}$ como $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 \parallel \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.

Solução

a) Pela Figura 2.10 e por **(10)**, temos

$$\vec{v}_1=\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}=\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u}$$

Como

$$\vec{v}\cdot\vec{u}=1(4)+3(-2)-5(8)=-42$$

e

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=4^2+(-2)^2+8^2=84\text{, vem}$$

$$\vec{v}_1=\frac{-42}{84}(4,-2,8)=-\frac{1}{2}(4,-2,8)=(-2,1,-4)$$

b) Sendo $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$, tem-se

$$\vec{v}_2=\vec{v}-\vec{v}_1=(1,3,-5)-(-2,1,-4)=(3,2,-1)$$

Observamos que $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$, pois,

$$\vec{v}_2\cdot\vec{u}=3(4)+2(-2)-1(8)=0$$

3. Sejam os pontos A(−1, −1, 2), B(2, 1, 1) e C(m, −5, 3).

a) Para qual valor de m o triângulo ABC é retângulo em A?

b) Determinar o ponto H, pé da altura relativa ao vértice A.

Solução

a) Sendo Â ângulo reto, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ (Figura 2.11) são ortogonais, ou seja, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

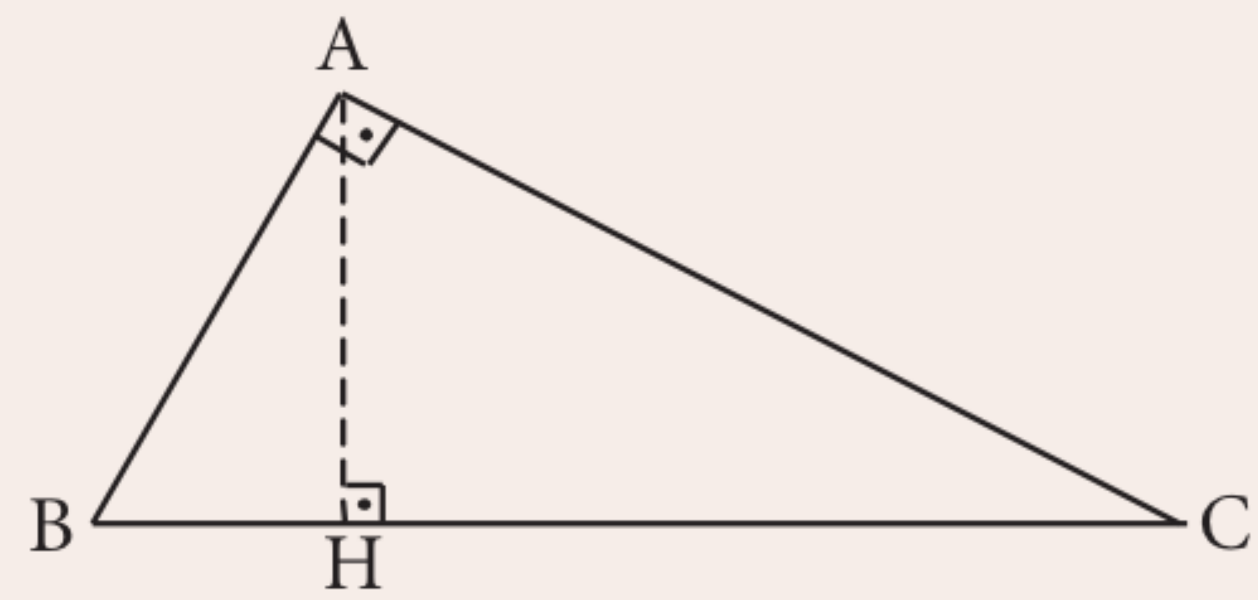


Figura 2.11

Como

$\overrightarrow{AB} = (3,2,-1)$ e $\overrightarrow{AC} = (m+1,-4,1)$, vem

$$3(m+1) + 2(-4) - 1(1) = 0$$

$$3m + 3 - 8 - 1 = 0$$

$$3m = 6$$

$$m = 2$$

b) O ponto H é dado por

$$H = B + \overrightarrow{BH}, \text{ sendo } \overrightarrow{BH} = \text{proj}_{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{BA} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}} \overrightarrow{BC}$$

Mas

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-3,-2,1) \cdot (0,-6,2) = 0 + 12 + 2 = 14$$

e

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (0,-6,2) \cdot (0,-6,2) = 0 + 36 + 4 = 40$$

Logo,

$$\overrightarrow{BH} = \frac{14}{40}(0,-6,2) = \frac{7}{20}(0,-6,2) = (0,-\frac{21}{10},\frac{7}{10})$$

e, portanto,

$$H = (2,1,1) + (0,-\frac{21}{10},\frac{7}{10})$$

ou

$$H(2,-\frac{11}{10},\frac{17}{10})$$

PRODUTO ESCALAR NO PLANO

Todo o estudo feito neste capítulo em relação a vetores do espaço é válido também para vetores no plano.

Considerando os vetores $\vec{u}=(x_1,y_1)$ e $\vec{v}=(x_2,y_2)$, temos

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2$;

b) validade das mesmas propriedades do produto escalar;

c) se θ é o ângulo entre $\vec{u}\neq\vec{0}$ e $\vec{v}\neq\vec{0}$, então $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

d) $\vec{u}\perp\vec{v}$ se, e somente se, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$;

e) se α e β são os ângulos diretores de $\vec{u},\vec{u}\neq\vec{0}$, então $\cos\alpha=\dfrac{x_1}{|\vec{u}|}$ e $\cos\beta=\dfrac{y_1}{|\vec{u}|}$;

f) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$;

g) $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}=\left(\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u}$, com $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos.

UMA APLICAÇÃO NA FÍSICA

O produto escalar é uma importante ferramenta matemática para a Física, uma vez que inúmeras grandezas físicas são definidas com seu emprego, como, por exemplo, o *trabalho*.

O trabalho realizado por uma força constante $\vec{F}$ ao longo de um determinado deslocamento $\vec{d}$ é definido como o produto escalar dessa força pelo deslocamento efetuado pelo corpo no qual a força está aplicada.

Podemos observar que a componente da força $\vec{F}$ que realiza o trabalho é $\vec{F}_x$ paralela ao deslocamento $\overrightarrow{AB}=\vec{d}$, conforme mostra a Figura 2.12.

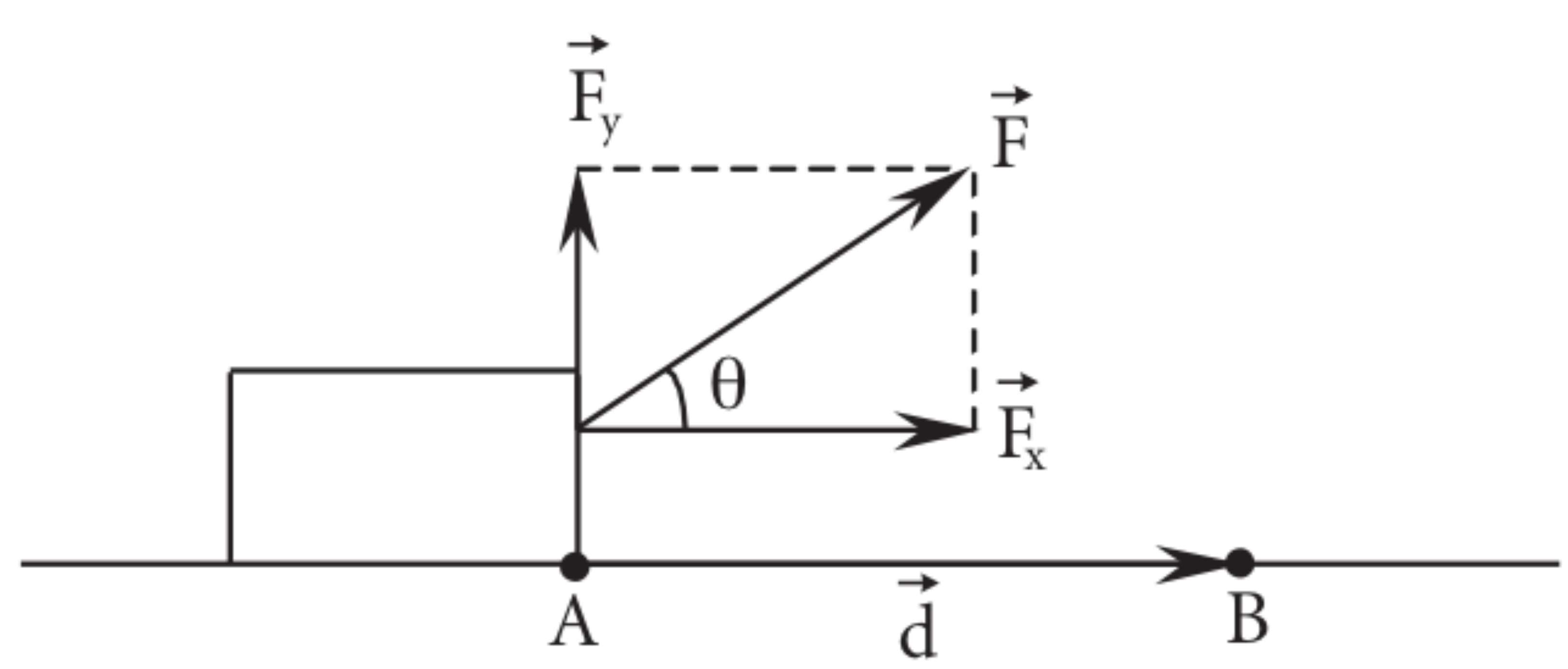


Figura 2.12

Então,

$$|\vec{F}_x|=|\vec{F}|\cos\theta$$

em que θ é o ângulo entre a força e o deslocamento.

A grandeza física *trabalho*, notada por W, é uma grandeza escalar e tem como unidade no Sistema Internacional o joule, notado por J.

A expressão para o cálculo do trabalho W é

$$W=\vec{F}\cdot\vec{d} \text{ ou } W=|\vec{F}||\vec{d}|\cos\theta$$

e

$$1J = 1N \cdot 1m \text{ (1 Newton vezes um metro)}$$

Exemplos

1. Calcular o trabalho realizado pelas forças constantes, $\vec{F}$, $\vec{F}_a$, $\vec{F}_N$ e $\vec{P}$ (Figura 2.13) e pela força resultante, para deslocar o bloco de A até B, sabendo que $|\vec{F}|=10N$, $|\vec{F}_a|=8N$, $|\vec{P}|=3N$, $|\vec{F}_N|=3N$, $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$ e $|\vec{d}|=10m$.

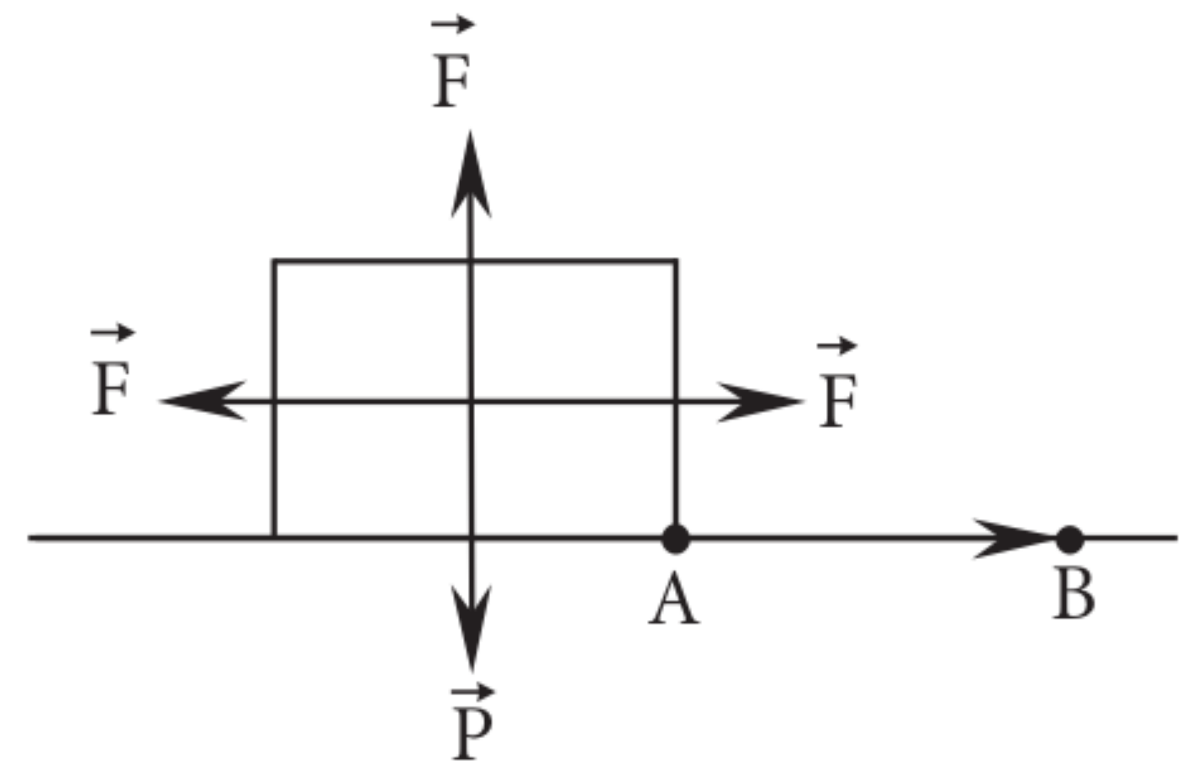


Figura 2.13

Solução

a) $W_F = |\vec{F}||\vec{d}|\cos\theta$

Como $\theta = 0°$ (ângulo entre $\vec{F}$ e $\vec{d}$), vem

$$W_p = (10N)(10m)(1) = 100\ J$$

b) $W_{F_a} = |\vec{F}_a||\vec{d}|\cos\theta$

Como $\theta = 180°$ (ângulo entre $\vec{F}_a$ e $\vec{d}$), vem

$$W_{F_a} = (8N)(10m)(-1) = -80\ J$$

c) $W_p = |\vec{P}||\vec{d}|\cos\theta$

Como $\theta = 90°$ (ângulo entre $\vec{P}$ e $\vec{d}$), vem

$$W_P = (3N)(10m)(0) = 0J$$

d) $W_{F_N} = |\vec{F}_N||\vec{d}|\cos\theta$

Como $\theta = 90°$ (ângulo entre $\vec{F}_N$ e $\vec{d}$), vem

$$W_{F_N} = (3N)(10m)(0) = 0J$$

Neste exemplo, o trabalho resultante W_R das quatro forças pode ser calculado de duas maneiras:

a) pela soma algébrica dos trabalhos realizados pelas forças:

$$W_R = W_F + W_{F_a} + W_p + W_{F_N}$$

ou

$$W_R = 100J - 80J + 0J + 0J = 20J$$

b) pelo trabalho realizado pela força resultante $\vec{F}_R$:

$$\vec{F}_R = \vec{F} + \vec{F}_a + \vec{P} + \vec{F}_N \text{ (soma de vetores)}$$

Como $\vec{P} + \vec{F}_N = 0$, conclui-se que $|\vec{F}_R| = 2N$

Logo,

$$W_R = |\vec{F}_R||\vec{d}|\cos\theta (\theta = 0°)$$

ou

$$W_R = (2N)(10m)(1) = 20J$$

2. Calcular o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ para deslocar o corpo de A até B (Figura 2.14), sabendo que $|\vec{F}| = 10N$, $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{d}| = 20m$ e $\theta \cong 36,9°$.

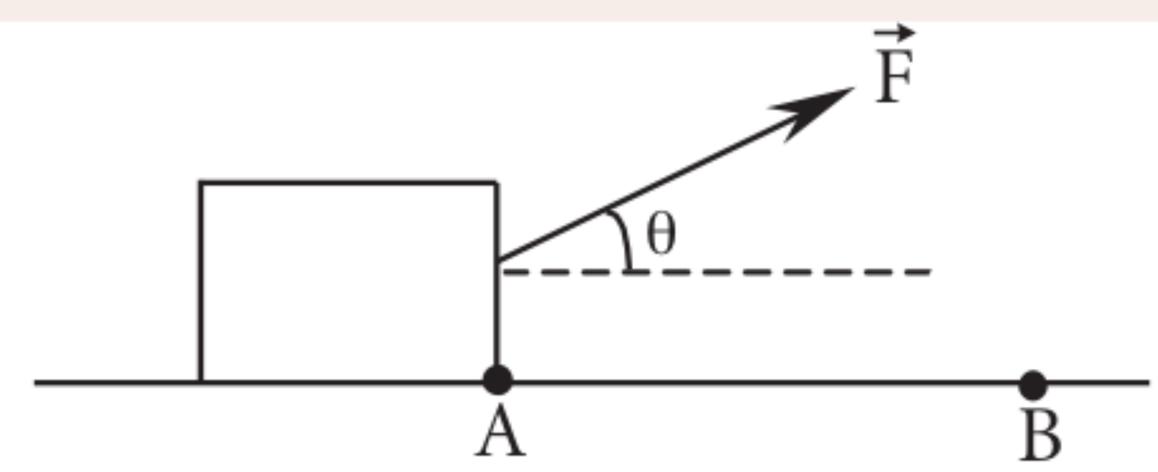


Figura 2.14

Solução

A Força $\vec{F}$ (Figura 2.15) é decomposta em $\vec{F} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$, na qual $8 = |\vec{F}|\cos\theta$, $6 = |\vec{F}|\operatorname{sen}\theta$ e $\vec{d} = 20\vec{i} + 0\vec{j}$.

O trabalho realizado pela força $\vec{F}$ pode ser calculado por

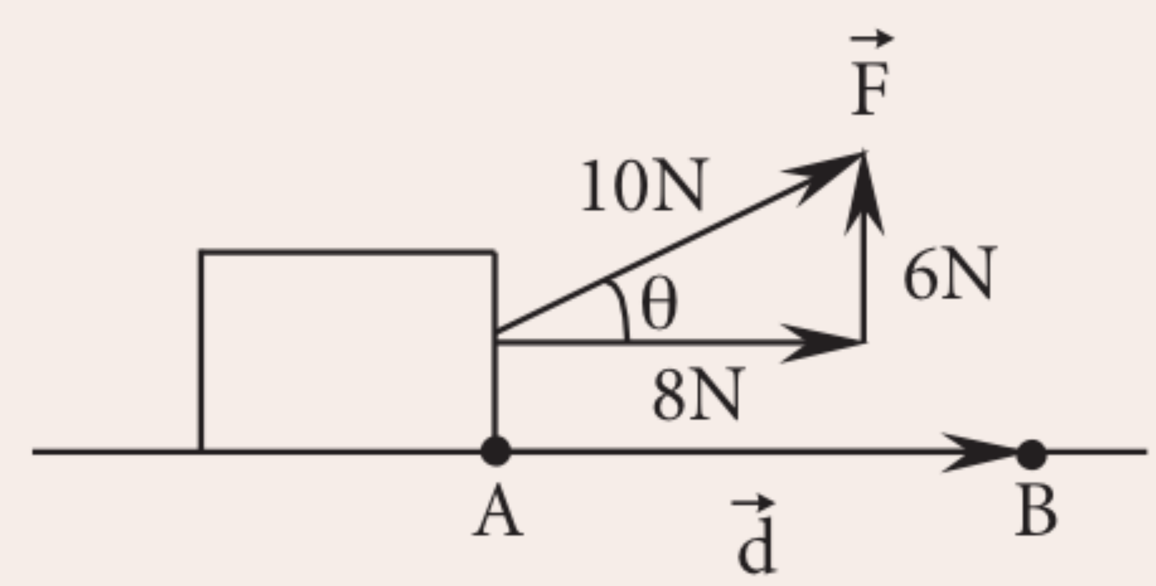


Figura 2.15

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \text{ (produto escalar)}$$

$$W = (8\vec{i} + 6\vec{j}) \cdot (20\vec{i} + 0\vec{j})$$

$$W = 160J$$

ou por

$$W = |\vec{F}||\vec{d}|\cos\theta$$

$$W = (10N)(20m)(\cos 36,9°)$$

$$W = 160J$$

Problemas propostos

1. Dados os vetores $\vec{u}=(2,-3,-1)$ e $\vec{v}=(1,-1,4)$, calcular:

a) $2\vec{u}\cdot(-\vec{v})$

b) $(\vec{u}+3\vec{v})\cdot(\vec{v}-2\vec{u})$

c) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

d) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{v}-\vec{u})$

2. Sejam os vetores $\vec{u}=(2,a,-1)$, $\vec{v}=(3,1,-2)$ e $\vec{w}=(2a-1,-2,4)$. Determinar *a* de modo que $\vec{u}\cdot\vec{v}=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{v}+\vec{w})$.

3. Dados os pontos A (4, 0, −1), B (2, −2, 1) e C (1, 3, 2) e os vetores $\vec{u}=(2,1,1)$ e $\vec{v}=(-1,-2,3)$, obter o vetor $\vec{x}$ tal que:

a) $3\vec{x}+2\vec{v}=\vec{x}+(\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u})\vec{v}$

b) $(\overrightarrow{BC}\cdot\vec{v})\vec{x}=(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{v}-3\vec{x}$

4. Determinar o vetor $\vec{v}$, paralelo ao vetor $\vec{u}=(2,-1,3)$, tal que $\vec{v}\cdot\vec{u}=-42$.

5. Determinar o vetor $\vec{v}$ do espaço, sabendo que $|\vec{v}|=5$, $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Ox, $\vec{v}\cdot\vec{w}=6$ e $\vec{w}=\vec{i}+2\vec{j}$.

6. Determinar o vetor $\vec{v}$, ortogonal ao eixo Oy, $\vec{v}\cdot\vec{v}_1=8$ e $\vec{v}\cdot\vec{v}_2=-3$, sendo $\vec{v}_1=(3,1,-2)$ e $\vec{v}_2=(-1,1,1)$.

7. Dados os vetores $\vec{u}=(1,2,-3)$, $\vec{v}=(2,0,-1)$ e $\vec{w}=(3,1,0)$, determinar o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{x}\cdot\vec{u}=-16$, $\vec{x}\cdot\vec{v}=0$ e $\vec{x}\cdot\vec{w}=3$.

8. Sabendo que $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ e $\vec{u}\cdot\vec{v}=-1$, calcular:

a) $(\vec{u}-3\vec{v})\cdot\vec{u}$

b) $(2\vec{v}-\vec{u})\cdot(2\vec{v})$

c) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{v}-4\vec{u})$

d) $(3\vec{u}+4\vec{v})\cdot(-2\vec{u}-5\vec{v})$

9. Calcular $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$, sabendo que $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$, $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ e $|\vec{w}|=5$.

10. Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo equilátero cujo lado mede 20 cm. Calcular $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$.

11. O quadrilátero ABCD (Figura 2.16) é um losango de lado 2.

Calcular:

a) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

c) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

e) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$

f) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}$

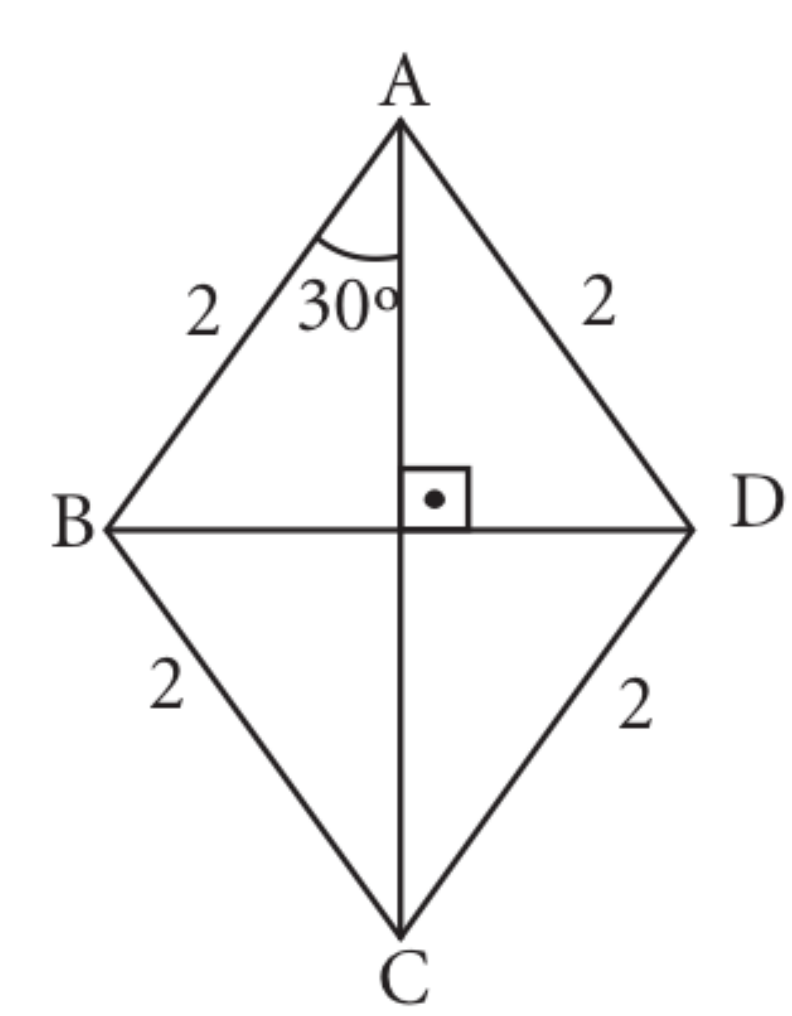


Figura 2.16

12. Calcular $|\vec{u}+\vec{v}|$, $|\vec{u}-\vec{v}|$ e $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$, sabendo que $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=3$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60°.

13. Sabendo que $|\vec{u}|=\sqrt{2}$, $|\vec{v}|=3$ e que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam ângulo de $\frac{3\pi}{4}$rad, determinar:

a) $|(2\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-2\vec{v})|$ **b)** $|\vec{u}-2\vec{v}|$

14. Verificar para os vetores $\vec{u}=(4,-1,2)$ e $\vec{v}=(-3,2,-2)$ as desigualdades

a) $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leq|\vec{u}||\vec{v}|$ (*Desigualdade de Schwarz*)

b) $|\vec{u}+\vec{v}|\leq|\vec{u}|+|\vec{v}|$ (*Desigualdade Triangular*)

15. Qual deve ser o valor de α para que os vetores $\vec{a}=\alpha\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ e $\vec{b}=2\vec{i}+(1-2\alpha)\vec{j}+3\vec{k}$ sejam ortogonais?

16. Dados os vetores $\vec{a}=(2,1,\alpha)$, $\vec{b}=(\alpha+2,-5,2)$ e $\vec{c}=(2\alpha,8,\alpha)$, determinar o valor de α para que o vetor $\vec{a}+\vec{b}$ seja ortogonal ao vetor $\vec{c}-\vec{a}$.

17. Dados os pontos A(−1, 0, 5), B(2, −1, 4) e C(1, 1, 1), determinar x tal que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BP}$ sejam ortogonais, sendo P (x, 0, x − 3).

18. Provar que os pontos A(−1, 2, 3), B(−3, 6, 0) e C(−4, 7, 2) são vértices de um triângulo retângulo.

19. Dados os pontos A(m, 1, 0), B(m − 1, 2m, 2) e C(1, 3, −1), determinar m de modo que o triângulo ABC seja retângulo em A. Calcular a área do triângulo.

20. Encontrar os vetores unitários paralelos ao plano yOz e que são ortogonais ao vetor $\vec{v}=(4,1-2)$.

21. Determinar o vetor $\vec{u}$ tal que $|\vec{u}|=2$, sendo o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}=(1,-1,0)$ igual a 45° e $\vec{u}$ seja ortogonal a $\vec{w}=(1,1,0)$.

22. Seja o vetor $\vec{v}=(2,-1,1)$. Obter:

a) um vetor ortogonal a $\vec{v}$;

b) um vetor unitário ortogonal a $\vec{v}$;

c) um vetor de módulo 4 ortogonal a $\vec{v}$.

23. Sendo $\vec{a}\perp\vec{b}$, $|\vec{a}|=6$ e $|\vec{b}|=8$, calcular $|\vec{a}+\vec{b}|$ e $|\vec{a}-\vec{b}|$.

24. Demonstrar que, sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores dois a dois ortogonais, então:

a) $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$ **b)** $|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+|\vec{w}|^2$

25. Determinar o ângulo entre os vetores:

a) $\vec{u}=(2,-1,-1)$ e $\vec{v}=(-1,-1,2)$ **b)** $\vec{u}=(1,-2,1)$ e $\vec{v}=(-1,1,0)$

26. Seja o triângulo de vértices A(3, 4, 4), B(2, −3, 4) e C(6, 0, 4). Determinar o ângulo interno ao vértice B. Qual o ângulo externo ao vértice B?

27. Calcular os ângulos internos do triângulo de vértices A(2, 1, 3), B(1, 0, −1) e C(−1, 2, 1).

28. Calcular o valor de *m* de modo que o ângulo entre os vetores $\vec{u}=(1,-2,1)$ e $\vec{v}=(-2,1,m+1)$ seja 120°.

29. Calcular *n* para que o ângulo entre os vetores $\vec{v}=(-3,1,n)$ e $\vec{k}$ seja de 30°.

30. Se $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=2$ e 120° o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, determinar o ângulo entre $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$ e construir uma figura correspondente a esses dados.

31. Seja o cubo de aresta *a* representado na Figura 2.17. Determinar:

a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

b) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$

c) $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OB}$

d) $|\overrightarrow{OB}|$ e $|\overrightarrow{OG}|$

e) $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{CG}$

f) $(\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{AB})\overrightarrow{OG}$

g) o ângulo agudo entre a diagonal do cubo e uma aresta;

h) o ângulo agudo formado por duas diagonais do cubo.

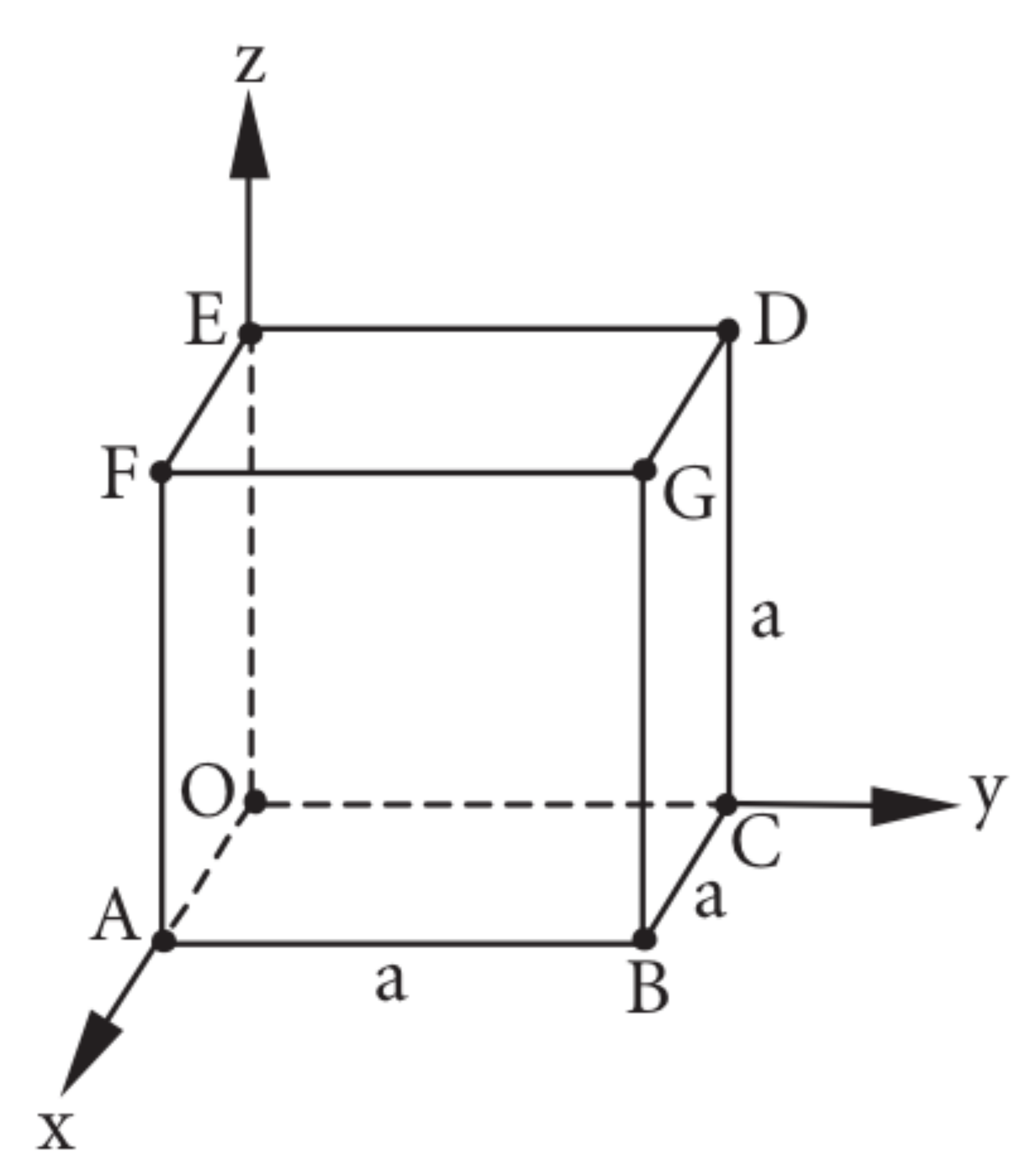


Figura 2.17

32. Calcular os ângulos diretores do vetor $\vec{v}=(6,-2,3)$.

33. Os ângulos diretores de um vetor $\vec{a}$ são 45°, 60° e 120° e $|\vec{a}|=2$. Determinar $\vec{a}$.

34. Os ângulos diretores de um vetor podem ser de 45°, 60° e 90°? Justificar.

35. Mostrar que existe vetor cujos ângulos diretores são 30°, 90° e 60°, respectivamente, e determinar aquele que tem módulo 10.

36. Determinar um vetor unitário ortogonal ao eixo Oz e que forme 60° com o vetor $\vec{i}$.

37. Determinar o vetor $\vec{a}$ de módulo 5, sabendo que é ortogonal ao eixo Oy e ao vetor $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{k}$, e forma ângulo obtuso com o vetor $\vec{i}$.

38. Determinar o vetor $\vec{v}$ nos seguintes casos:

a) $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Oz, $|\vec{v}|=8$, forma ângulo de 30° com o vetor $\vec{i}$ e ângulo obtuso com $\vec{j}$;

b) $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Ox, $|\vec{v}|=2$, forma ângulo de 60° com o vetor $\vec{j}$ e ângulo agudo com $\vec{k}$.

39. O vetor $\vec{v}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u}=(1,2,0)$ e $\vec{w}=(2,0,1)$ e forma ângulo agudo com o vetor $\vec{j}$. Determinar $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}|=\sqrt{21}$.

40. Dados os vetores $\vec{u}=(3,0,1)$ e $\vec{v}=(-2,1,2)$, determinar $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ e $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$.

41. Determinar os vetores projeção de $\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ sobre os eixos cartesianos x, y e z.

42. Para cada um dos pares de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, encontrar a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e decompor $\vec{v}$ como soma de $\vec{v}_1$ com $\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 \parallel \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.

a) $\vec{u}=(1,2,-2)$ e $\vec{v}=(3,-2,1)$

b) $\vec{u}=(1,1,1)$ e $\vec{v}=(3,1,-1)$

c) $\vec{u}=(2,0,0)$ e $\vec{v}=(3,5,4)$

d) $\vec{u}=(3,1,-3)$ e $\vec{v}=(2,-3,1)$

43. Sejam A(2, 1, 3), B(m, 3, 5) e C(0, 4, 1) vértices de um triângulo (Figura 2.18) responda:

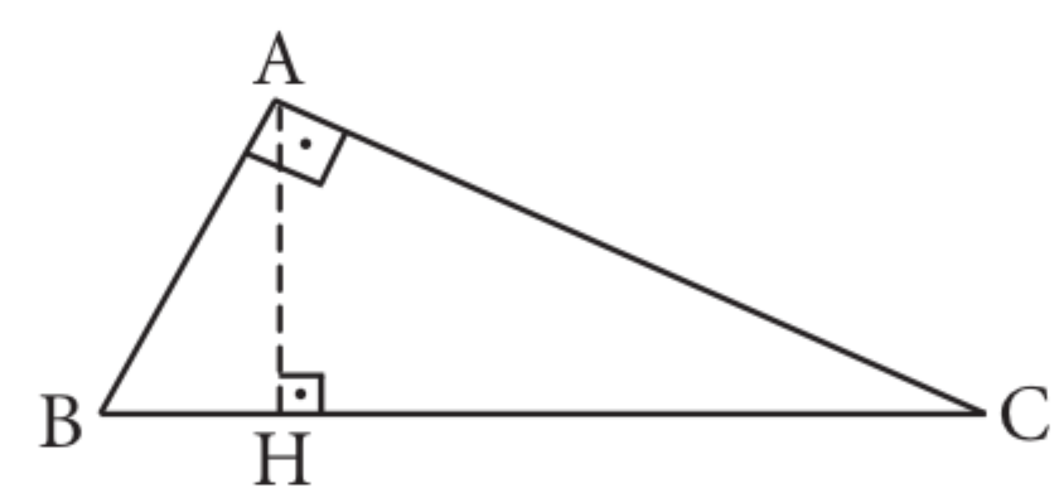


Figura 2.18

a) Para qual valor de m o triângulo ABC é retângulo em A?

b) Calcular a medida da projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC.

c) Determinar o ponto H, pé da altura relativa ao vértice A.

d) Mostrar que $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$.

44. Determinar o valor de k para que os vetores $\vec{u}=(-2,3)$ e $\vec{v}=(k,-4)$ sejam:

a) paralelos

b) ortogonais

45. Obter os dois vetores unitários ortogonais a cada um dos vetores:

a) $4\vec{i}+3\vec{j}$

b) $(-2, 3)$

c) $(-1, -1)$

46. Determinar um par de vetores unitários e ortogonais entre si, em que um deles seja paralelo a $\vec{v}=6\vec{i}+8\vec{j}$.

47. Determinar, aproximadamente, o ângulo entre os pares de vetores:

a) $\vec{u}=(2,1)$ e $\vec{v}=(4,-2)$

b) $\vec{u}=(1,-1)$ e $\vec{v}=(-4,-2)$

c) $\vec{u}=(1,1)$ e $\vec{v}=(-1,1)$

48. Dados os vetores $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$ e $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}$, determinar o módulo e o ângulo que os seguintes vetores formam com o vetor $\vec{i}$:

a) $\vec{u}$ **b)** $\vec{v}$ **c)** $\vec{u}+\vec{v}$ **d)** $\vec{u}-\vec{v}$ **e)** $\vec{v}-\vec{u}$

49. Determinar o valor de *a* para que seja 45° o ângulo entre os vetores $\vec{u}=(2,1)$ e $\vec{v}=(1,a)$.

50. Para cada um dos pares de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, encontrar o vetor projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e decompor $\vec{v}$ como soma de $\vec{v}_1$ com $\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 \parallel \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.

a) $\vec{u}=(1,0)$ e $\vec{v}=(4,3)$ **b)** $\vec{u}=(1,1)$ e $\vec{v}=(2,5)$ **c)** $\vec{u}=(4,3)$ e $\vec{v}=(1,2)$

Respostas de problemas propostos

1. **a)** -2 **b)** 21 **c)** -4 **d)** 4

2. $a=\frac{5}{8}$

3. **a)** $(3, 6, -9)$ **b)** $(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1)$

4. $\vec{v}=(-6,3,-9)$

5. $\vec{v}=(0,3,4)$ ou $\vec{v}=(0,3,-4)$

6. $\vec{v}=(2,0,-1)$

7. $\vec{x}=(2,-3,4)$

8. **a)** 7 **b)** 38 **c)** -4 **d)** -181

9. -19

10. 200 e -200

11. **a)** 0 **b)** 2 **c)** -2 **d)** 2 **e)** 4 **f)** -4

12. $\sqrt{37}$, $\sqrt{13}$ e 7

13. **a)** 37 **b)** $\sqrt{50}$

15. $\alpha = -5$

16. $\alpha = 3$ ou $\alpha = -6$

17. $x=\frac{25}{2}$

18. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

19. $m = 1$ e $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$

20. $(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ ou $(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$

21. $\vec{u} = (1, -1, \sqrt{2})$ ou $\vec{u} = (1, -1, -\sqrt{2})$

22. **a)** Entre os infinitos possíveis: $(1, 1, -1)$

b) Um deles: $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ **c)** Um deles: $(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}})$

23. 10 e 10

25. **a)** $120°$ **b)** $150°$

26. $45°$ e $135°$

27. $\hat{A} \cong 50°57'$, $\hat{B} \cong 57°1'$ e $\hat{C} \cong 72°2'$

28. $m = 0$ ou $m = -18$

29. $n = \sqrt{30}$

30. $\arccos \frac{3}{\sqrt{21}} \cong 49°6'$

31. **a)** 0 **c)** 0 **e)** a^2 **g)** $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \cong 54°44'$

b) 0 **d)** $a\sqrt{2}$ e $a\sqrt{3}$ **f)** (a^3, a^3, a^3) **h)** $\arccos(\frac{1}{3}) \cong 70°31'$

32. $\alpha = \arccos(\frac{6}{7}) \cong 31°$, $\beta = \arccos(-\frac{2}{7}) \cong 107°$ e $\gamma = \arccos(\frac{3}{7}) \cong 65°$

33. $\vec{a} = (\sqrt{2}, 1, -1)$

34. Não, pois $\cos^2 45° + \cos^2 60° + \cos^2 90° \neq 1$

35. $(5\sqrt{3}, 0, 5)$

36. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ou $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$

37. $\vec{a} = (-2\sqrt{5}, 0, -\sqrt{5})$

38. **a)** $(4\sqrt{3}, -4, 0)$ **b)** $(0, 1, \sqrt{3})$

39. $\vec{v} = (-2,1,4)$

40. $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = (\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{8}{9})$ e $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = (-\frac{6}{5}, 0, -\frac{2}{5})$

41. $4\vec{i}$, $-3\vec{j}$, $2\vec{k}$

42. **a)** $\vec{v}_1 = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}), \vec{v}_2 = (\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$

b) $\vec{v}_1 = (1,1,1)$ e $\vec{v}_2 = (2,0,-2)$

c) $\vec{v}_1 = (3,0,0)$ e $\vec{v}_2 = (0,5,4)$

d) $\vec{v}_1 = (0,0,0)$ ($\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais) e $\vec{v}_2 = \vec{v}$

43. **a)** m = 3 **b)** $\frac{9}{26}\sqrt{26}$ **c)** $H(\frac{51}{26}, \frac{87}{26}, \frac{94}{26})$

44. **a)** $\frac{8}{3}$ **b)** -6

45. **a)** $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ e $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ **b)** $(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$ e $(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}})$

c) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

46. $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ e $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ ou $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ e $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$

47. **a)** $\text{arc cos}(\frac{3}{5}) \cong 53°$ **b)** $\text{arc cos}(-\frac{1}{\sqrt{10}}) \cong 108°$ **c)** $90°$

48. **a)** $\sqrt{2}, 45°$ **d)** $\sqrt{5}, \text{arc cos}(-\frac{1}{\sqrt{5}}) = 117°$

b) $\sqrt{5}, \text{arc cos}(\frac{2}{\sqrt{5}}) \cong 26°$ **e)** $\sqrt{5}, \text{arc cos}(\frac{1}{\sqrt{5}}) \cong 63°$

c) $3, 0°$

49. $\alpha = 3$ ou $\alpha = -\frac{1}{3}$

50. **a)** $\vec{v}_1 = (4,0)$, $\vec{v}_2 = (0,3)$ **b)** $\vec{v}_1 = (\frac{7}{2}, \frac{7}{2}), \vec{v}_2 = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

c) $\vec{v}_1 = (\frac{8}{5}, \frac{6}{5}), \vec{v}_2 = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

3 PRODUTO VETORIAL

PRELIMINARES

Antes de definirmos produto vetorial de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, faremos algumas considerações importantes:

a) O produto vetorial é um *vetor*, ao contrário do produto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$, que é um escalar (número real).

b) Para simplicidade de cálculo do produto vetorial, faremos uso de determinantes. Um determinante de ordem 2 é definido como

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$$

Por exemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = (3)(5) - (-4)(2) = 15 + 8 = 23$$

c) Algumas propriedades dos determinantes serão utilizadas nesta seção:

c_1) a permutação de duas linhas inverte o sinal do determinante.

Em relação ao exemplo anterior, temos:

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-4)(2) - (3)(5) = -8 - 15 = -23$$

c_2) se duas linhas forem constituídas de elementos proporcionais, o determinante é zero (duas linhas iguais é um caso particular).

No determinante a seguir, os elementos da segunda linha são o triplo dos elementos da primeira:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

c_3) se uma das linhas for constituída de zeros, o determinante é zero.

Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

d) Um determinante de ordem 3 pode ser dado por

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c$$

A expressão da direita é conhecida como *desenvolvimento do determinante pelo Teorema de Laplace aplicado à primeira linha*. Notemos que os três determinantes de ordem 2 dessa expressão são obtidos a partir das duas últimas linhas, desprezando-se nelas, pela ordem, a 1ª coluna, a 2ª coluna e a 3ª coluna, trocando-se o sinal do determinante intermediário.

Por exemplo:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}(3) - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}(-2) + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}(-4) \\ &= (6-5)(3) - (2+10)(-2) + (1+6)(-4) \\ &= 3 + 24 - 28 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Observação

Todas as propriedades dos determinantes anteriormente citadas fazem referência às linhas da matriz pelo fato de, no estudo do produto vetorial, haver menção somente a linhas. No entanto, as propriedades valem também para as colunas.

DEFINIÇÃO DO PRODUTO VETORIAL

Chama-se *produto vetorial* de dois vetores

$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, tomados nessa ordem, e se representam por $\vec{u} \times \vec{v}$, ao vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k} \qquad \textbf{(1)}$$

O produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ também é indicado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e lê-se "$\vec{u}$ vetorial $\vec{v}$".

Observemos que a definição de $\vec{u} \times \vec{v}$ dada em **(1)** pode ser obtida do desenvolvimento segundo o Teorema de Laplace (item d das Preliminares) substituindo-se a, b e c pelos vetores unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, fato que sugere a notação

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

O símbolo à direita de **(2)** não é um determinante, pois a primeira linha contém vetores em vez de escalares. No entanto, usaremos essa notação pela facilidade de memorização que ela propicia no cálculo do produto vetorial.

Exemplo

Calcular $\vec{u}\times\vec{v}$ para $\vec{u}=5\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$ e $\vec{v}=\vec{i}+\vec{k}$.

Solução

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 4 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}4 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}5 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}5 & 4\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(4-0)\vec{i}-(5-3)\vec{j}+(0-4)\vec{k}$$

$$=4\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}$$

Dispositivo prático para o cálculo de $\vec{u}\times\vec{v}$

Dispõe-se os dois vetores em linha e repete-se, pela ordem, as duas primeiras colunas. As três componentes de $\vec{u}\times\vec{v}$ são dadas pelos três determinantes, conforme indicado a seguir. A vantagem do dispositivo é que não se corre o risco de esquecer a troca de sinal do determinante intermediário.

$$\begin{vmatrix}5 & 4 & 3 & 5 & 4\\ 1 & \underbrace{0 \quad 1}_{4} & & \underbrace{1 \quad 0}_{-4} & \end{vmatrix} \qquad \underbrace{1 \quad 1}_{-2}$$

Levando-se em consideração as afirmações feitas sobre as propriedades dos determinantes, concluímos de imediato que:

1) $\vec{v}\times\vec{u}=-(\vec{u}\times\vec{v})$, ou seja, os vetores $\vec{v}\times\vec{u}$ e $\vec{u}\times\vec{v}$ são opostos (Figura 3.1), pois a troca de ordem dos vetores no produto vetorial $\vec{u}\times\vec{v}$ implica troca de sinal de todos os determinantes de ordem 2, ou seja, troca de sinal de todas as suas componentes.

   Por outro lado, como $\vec{u}\times\vec{v}\neq\vec{v}\times\vec{u}$, conclui-se que o produto vetorial não é comutativo (ao contrário do produto escalar: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$). Portanto, no produto vetorial *a ordem dos fatores é importante.*

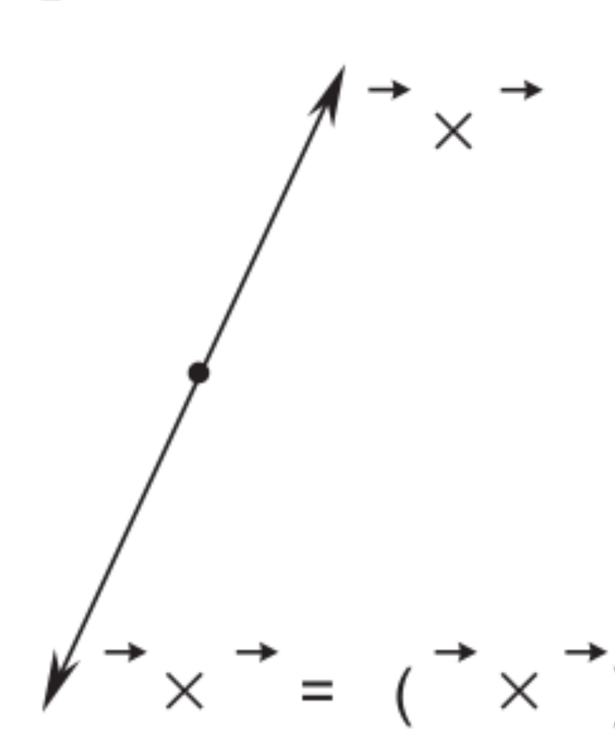


Figura 3.1

2) $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ *se, e somente se,* $\vec{u}\,||\,\vec{v}$, pois, nesse caso, todos os determinantes de ordem 2 têm suas linhas constituídas por elementos proporcionais.

Estão aí também incluídos os casos particulares:

I) $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$ (determinantes de ordem 2 com linhas iguais)

II) $\vec{u}\times\vec{0}=\vec{0}$ (determinantes de ordem 2 com uma linha de zeros)

Exemplos de produto vetorial de vetores paralelos:

a) $\vec{u}\times(3\vec{u})=\vec{0}$

b) $(2\vec{u})\times(-7\vec{u})=\vec{0}$

c) $(\vec{u}\times\vec{v})\times(\vec{v}\times\vec{u})=\vec{0}$

d) $(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{v}-\vec{u})=\vec{0}$

e) $(2\vec{u}+3\vec{v})\times(6\vec{u}+9\vec{v})=\vec{0}$

f) $(5\vec{u})\times\vec{0}=\vec{0}$

Sabemos que um vetor está bem definido quando conhecemos sua direção, seu sentido e seu comprimento. A seguir passaremos a definir o vetor $\vec{u}\times\vec{v}$ no caso de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serem *não nulos* e *não paralelos.*

CARACTERÍSTICAS DO VETOR $\vec{u}\times\vec{v}$

Consideremos os vetores $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ e $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$.

a) Direção de $\vec{u}\times\vec{v}$

O vetor $\vec{u}\times\vec{v}$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Considerando que dois vetores são ortogonais quando o seu produto escalar é zero, basta mostrar que

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}=0 \text{ e } (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v}=0$$

Temos, então:

$$\begin{aligned}(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}&=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}x_1-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}y_1+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}z_1\\ &=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}\\ &=0 \text{ (primeira e segunda linhas iguais)}\end{aligned}$$

Logo, $\vec{u}\times\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$.

De forma análoga, demonstra-se que $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v}=0$.

Como o vetor $\vec{v}\times\vec{u}$ tem a mesma direção de $\vec{u}\times\vec{v}$ (apenas seus sentidos são opostos), ele também é ortogonal tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$. A Figura 3.2 apresenta os vetores $\vec{u}\times\vec{v}$ e $\vec{v}\times\vec{u}$ ortogonais a um plano π determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

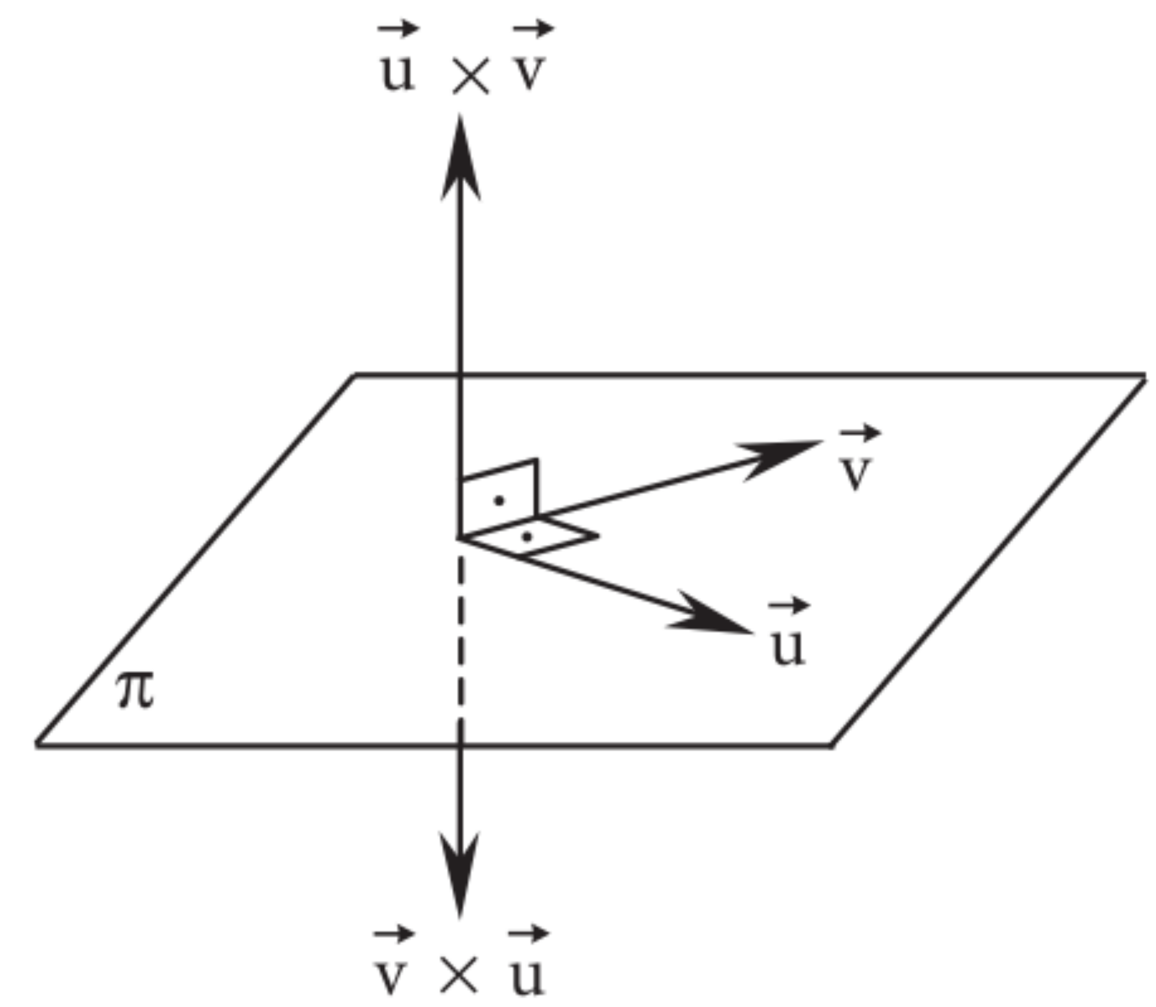


Figura 3.2

Exemplo

Dados os vetores $\vec{u}=(3,1,2)$ e $\vec{v}=(-2,2,5)$, tem-se

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 5\end{vmatrix}=(1,-19,8)$$

e

$$(\vec{u}x\vec{v})\cdot\vec{u}=(1,-19,8)\cdot(3,1,2)=3-19+16=0$$
$$(\vec{u}x\vec{v})\cdot\vec{v}=(1,-19,8)\cdot(-2,2,5)=-2-38+40=0$$

b) Sentido de $\vec{u}\times\vec{v}$

O sentido de $\vec{u}\times\vec{v}$ pode ser determinado utilizando-se a "*regra da mão direita*" (Figura 3.3(a)). Sendo θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, suponhamos que $\vec{u}$ (1º vetor) sofra uma rotação de ângulo θ até coincidir com $\vec{v}$. Se os dedos da mão direita forem dobrados na mesma direção da rotação, então, o polegar estendido indicará o sentido de $\vec{u}\times\vec{v}$.

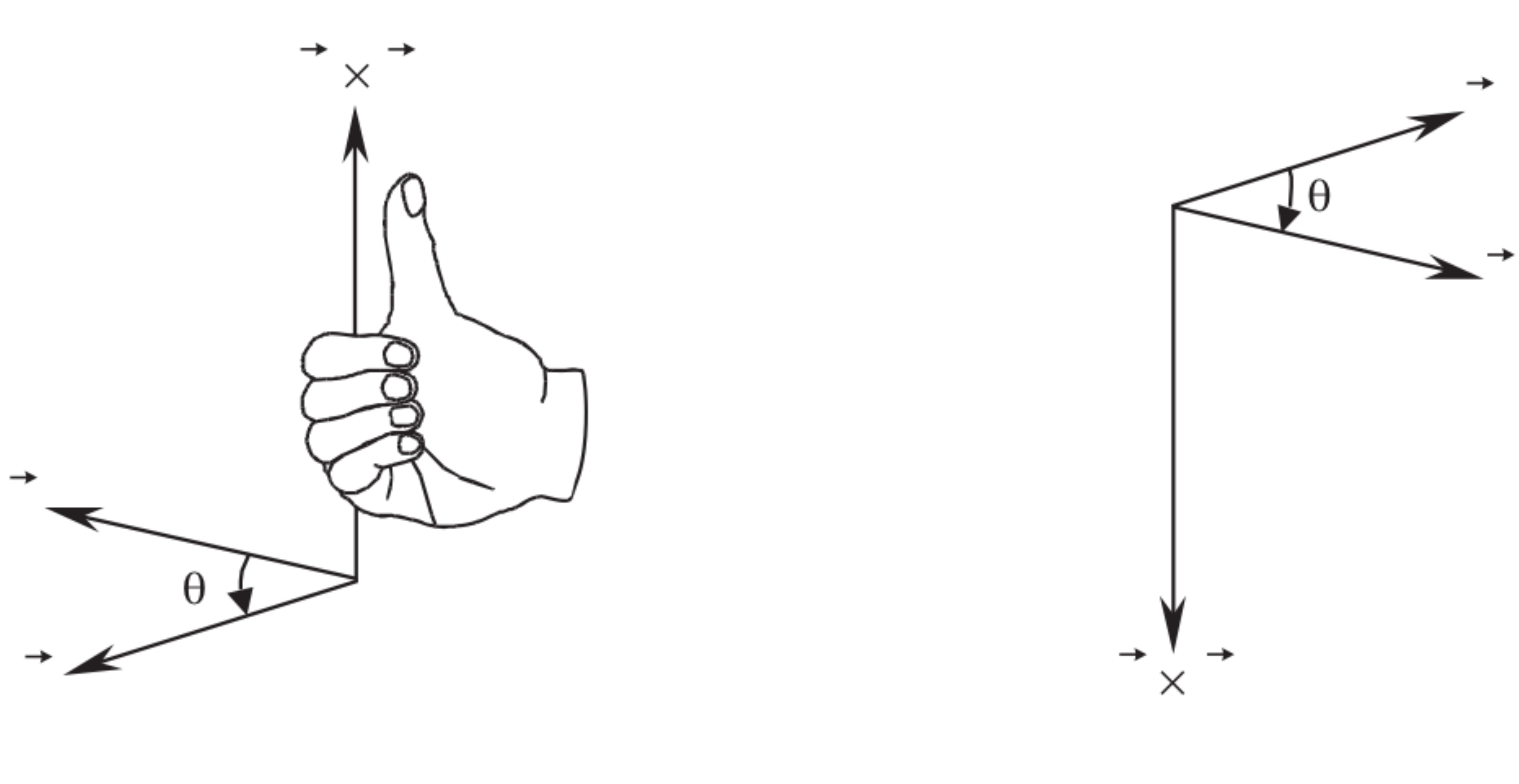


Figura 3.3

A Figura 3.3 (b) mostra que o produto vetorial muda de sentido quando a ordem dos vetores é invertida. Observemos que só será possível dobrar os dedos na direção de $\vec{v}$ para $\vec{u}$ se invertermos a posição da mão, quando, então, o dedo polegar apontará para baixo.

Caso tenhamos dúvidas sobre o sentido de $\vec{u}\times\vec{v}$, podemos associar esses dois vetores a uma dupla de vetores unitários escolhidos entre $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$. Por exemplo, associando $\vec{u}\times\vec{v}$ com $\vec{i}\times\vec{j}$ e tendo em vista que

$$\vec{i}\times\vec{j}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(0,0,1)=\vec{k},$$

o sentido de $\vec{k}$ daria o sentido de $\vec{u}\times\vec{v}$. Da mesma forma, temos

$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} \text{ e } \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

Na Figura 3.4 apresentamos um dispositivo mnemônico para lembrar os seis produtos vetoriais possíveis com esses três vetores unitários que determinam o sistema cartesiano. Associando esses vetores a três pontos distintos de uma circunferência, e adotando o sentido anti-horário, o produto vetorial de dois vetores sucessivos quaisquer é o vetor seguinte. Assim, nesse dispositivo temos imediatamente $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ (sentido anti-horário) e, consequentemente, $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$ (sentido horário).

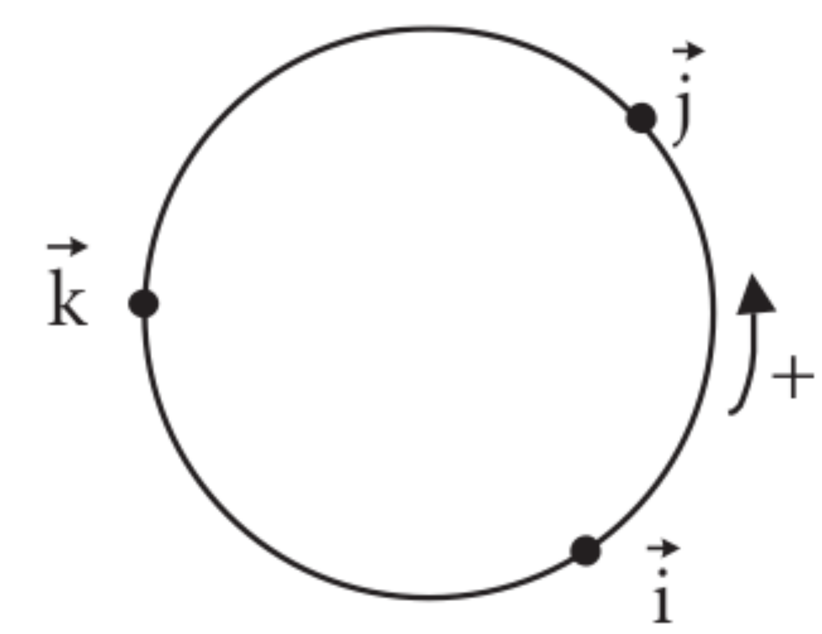


Figura 3.4

A tabela de dupla entrada apresenta as seis possibilidades com produto vetorial não nulo:

x	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

c) Comprimento de $\vec{u}\times\vec{v}$

Se θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, então

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\operatorname{sen}\theta \qquad (3)$$

Esse resultado é imediato quando se conhece a identidade de Lagrange:

$$|\vec{u}\times\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \qquad \textbf{(4)}$$

Como

$$\begin{aligned}|\vec{u}\times\vec{v}|^2 &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= (y_1z_2-y_2z_1)^2+(x_1z_2-x_2z_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2 \end{aligned} \qquad \textbf{(5)}$$

e

$$|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2-(\vec{u}.\vec{v})^2=(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2 \qquad \textbf{(6)}$$

a identidade **(4)** poderá ser verificada desenvolvendo-se os membros da direita de **(5)** e **(6)** e constatando sua igualdade (a cargo do leitor).

Tendo em vista que

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

a igualdade **(4)** pode ser escrita como

$$\begin{aligned}|\vec{u}\times\vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2-|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\cos^2\theta \\ &= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2(1-\cos^2\theta) \\ &= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\,\text{sen}^2\,\theta\end{aligned}$$

Extraindo as raízes quadradas e notando que sen $\theta \geq 0$ (pois $0° \leq \theta \leq 180°$), obtemos

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\,\text{sen}\,\theta$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÓDULO DO PRODUTO VETORIAL

Observando que no paralelogramo determinado pelos vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (Figura 3.5), a medida da base é $|\vec{u}|$ e da altura é $|\vec{v}|\,\text{sen}\,\theta$, a área A deste paralelogramo é

$$A = (\text{base})\cdot(\text{altura}) = |\vec{u}||\vec{v}|\,\text{sen}\,\theta$$

ou seja,

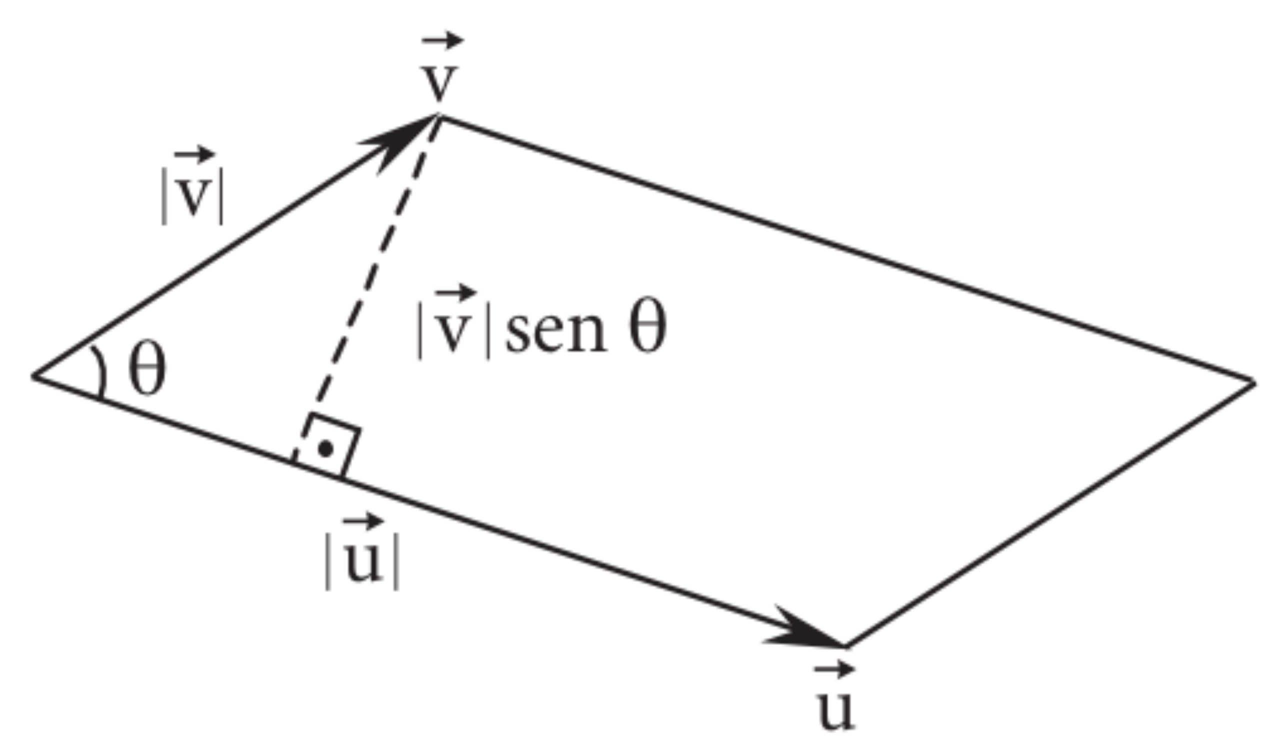


Figura 3.5

$$A=|\vec{u}\times\vec{v}| \qquad \textbf{(7)}$$

O resultado dado em **(7)** poderá ser expresso por: "*a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é numericamente igual ao comprimento do vetor $\vec{u}\times\vec{v}$*".

Vamos comprovar esse resultado por meio de um exemplo particular tomando os vetores $\vec{u}=2\vec{i}$ e $\vec{v}=3\vec{j}$. Temos, então,

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\end{vmatrix}=(0,0,6)=6\vec{k}$$

e

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=6$$

A Figura 3.6 mostra claramente que o paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem 6 u.a. (unidades de área), e o vetor $\vec{u}\times\vec{v}$ tem 6 u.c. (unidades de comprimento). Numericamente essas medidas são iguais.

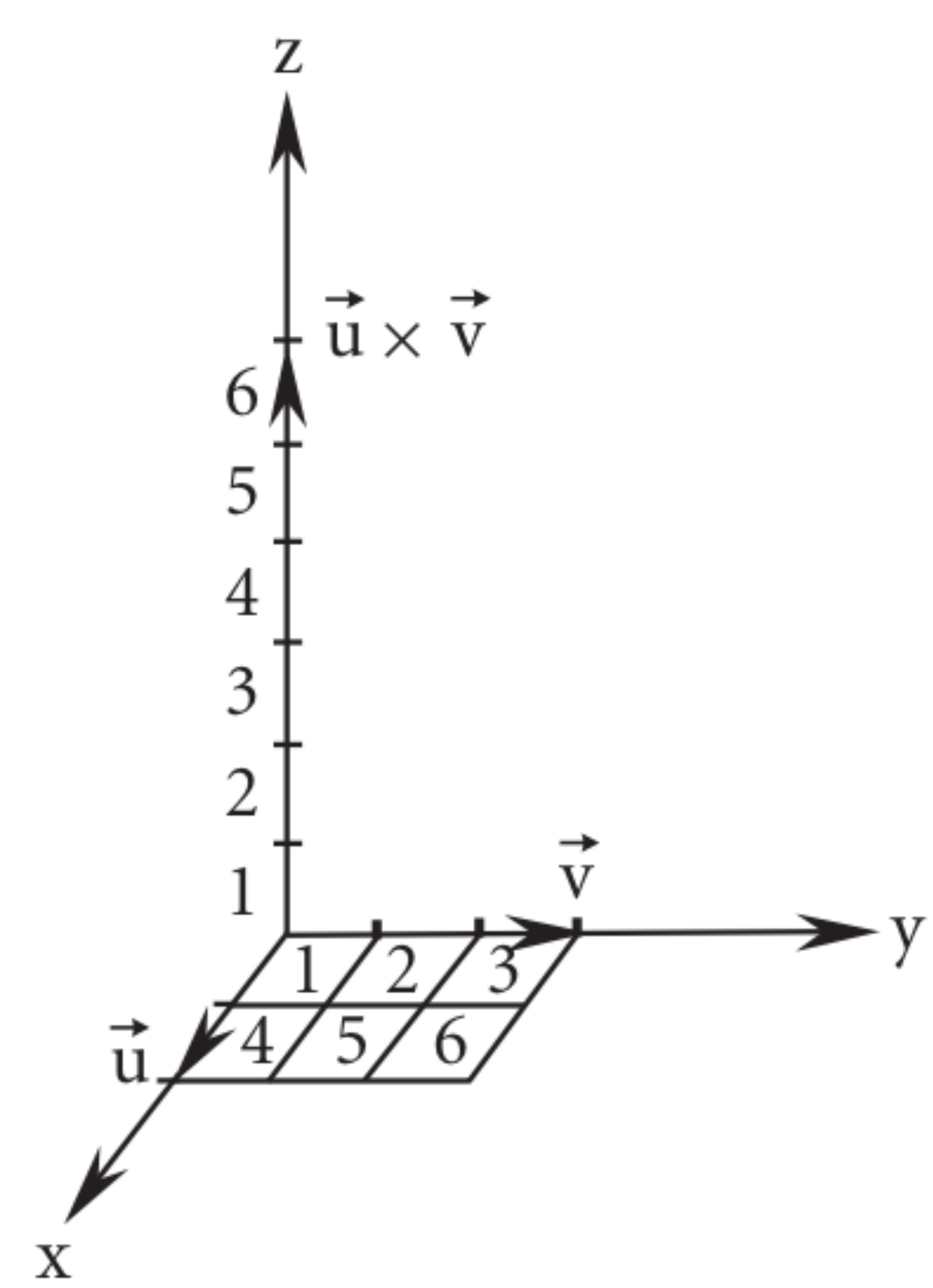


Figura 3.6

Para encerrar o estudo do produto vetorial, as conclusões finais são:

1) O produto vetorial *não é associativo*, ou seja, em geral é

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}\neq\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$$

Basta considerar, por exemplo,

$$(\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$$

enquanto que

$$\vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{j})=\vec{i}\times\vec{0}=\vec{0}$$

2) Para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e o escalar α, são válidas as propriedades

I) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{w})$ e
$(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w}=(\vec{u}\times\vec{w})+(\vec{v}\times\vec{w})$

II) $\alpha(\vec{u}\times\vec{v})=(\alpha\vec{u})\times\vec{v}=\vec{u}\times(\alpha\vec{v})$

III) $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

As demonstrações dessas propriedades, todas ligadas à aplicação da definição **(1)** e de propriedades dos determinantes além das citadas no texto, deixamos a cargo do leitor como desafio.

Exemplos

1. Determinar o vetor $\vec{x}$, tal que $\vec{x}$ seja ortogonal ao eixo dos y e $\vec{u}=\vec{x}\times\vec{v}$, sendo $\vec{u}=(1,1,-1)$ e $\vec{v}=(2,-1,1)$.

Solução

Como $\vec{x}\perp 0y$, ele pode ser expresso da forma $\vec{x}=(x,0,z)$.

Então, $\vec{u}=\vec{x}\times\vec{v}$ equivale a

$$(1,1,-1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & 0 & z\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

ou

$$(1,1,-1)=(z,-x+2z,-x)$$

Pela condição de igualdade de dois vetores resulta o sistema

$$\begin{cases} z=1\\ -x+2z=1\\ -x=-1\end{cases}$$

cuja solução é $x = 1$ e $z = 1$.

Portanto, $\vec{x}=(1,0,1)$.

2. Sejam os vetores $\vec{u}=(1,-1,-4)$ e $\vec{v}=(3,2,-2)$. Determinar um vetor que seja

a) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e unitário;

c) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e tenha módulo 4;

d) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e tenha cota igual a 7.

Solução

a) Sabe-se que o vetor $\vec{u}\times\vec{v}$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Como multiplicar um vetor por um número real não altera a sua direção, todos os vetores do tipo $\alpha(\vec{u}\times\vec{v}),\alpha\in\mathbb{R}$, são também ortogonais a $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Portanto, esse problema tem infinitas soluções.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -4\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix}=(10,-10,5)$$

Logo, as infinitas soluções são

$$\alpha(10,-10,5),\alpha\in\mathbb{R}$$

Observação

Se chamarmos de $\vec{x}=(x,y,z)$ todos os vetores ortogonais a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, essas mesmas soluções seriam obtidas resolvendo-se o sistema:

$$\begin{cases}\vec{x}\cdot\vec{u}=0\\ \vec{x}\cdot\vec{v}=0\end{cases}\quad \text{ou}\quad \begin{cases}x-y-4z=0\\ 3x+2y-2z=0\end{cases}$$

b) A partir de $\vec{u}\times\vec{v}$ (ou de qualquer $\alpha(u\times v)$, $\alpha\neq 0$), obtém-se dois vetores unitários:

$$\vec{u}_1=\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{(10,-10,5)}{15}=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$$

e

$$\vec{u}_2=-\vec{u}_1=(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$$

c) Para obter um vetor de módulo 4 que seja ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, basta multiplicar por 4 um vetor unitário:

$$4(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})=(\frac{8}{3},-\frac{8}{3},\frac{4}{3})$$

ou

$$4(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})=(-\frac{8}{3},\frac{8}{3},-\frac{4}{3})$$

d) Entre as infinitas soluções $\alpha(10, -10, 5) = (10\alpha, -10\alpha, 5\alpha)$, deseja-se aquela cuja cota é 7. Então, $5\alpha = 7$, ou seja, $\alpha=\frac{7}{5}$. Logo, temos a solução

$$\frac{7}{5}(10,-10,5)=(14,-14,7)$$

3. Seja um triângulo equilátero ABC de lado 10. Calcular $|\vec{AB}\times\vec{AC}|$.

Solução

É uma aplicação direta da relação **(3)**:

$$|\vec{AB} \quad \vec{AC}| \quad |\vec{AB}||\vec{AC}|\,\text{sen}\,\hat{A}$$

Como $\hat{A} = 60°$ (Figura 3.7), vem

$$|\vec{AB}\times\vec{AC}| = (10)(10)(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 50\sqrt{3}$$

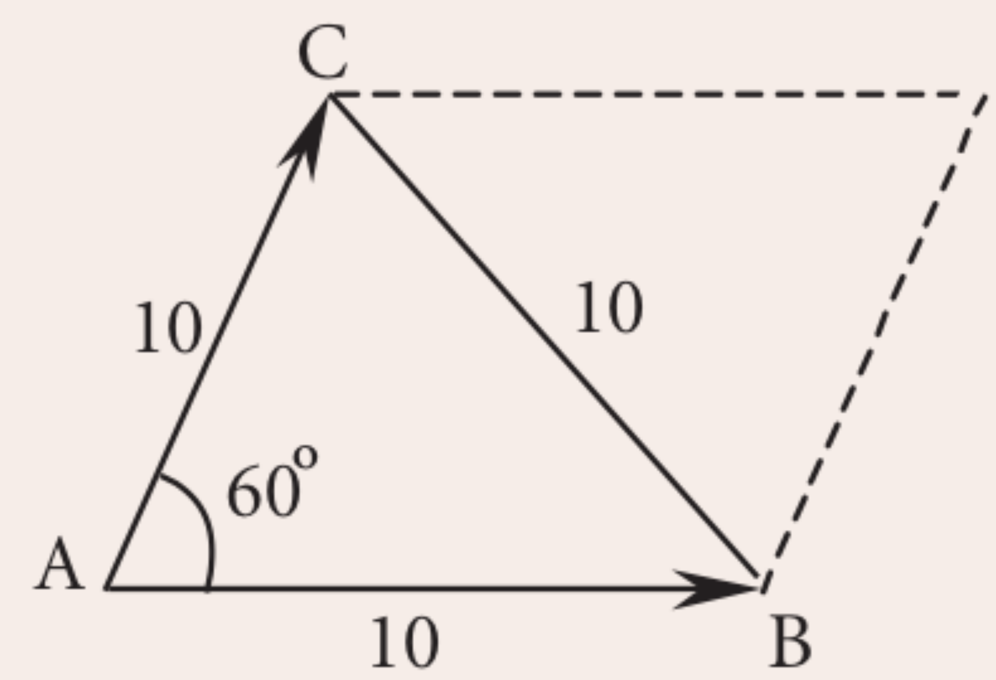


Figura 3.7

Observação

Esse resultado representa a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$.

Logo, a área do triângulo da figura é a metade dessa área, ou seja, $25\sqrt{3}$.

4. Dados os vetores $\vec{u} = (1,-1,1)$ e $\vec{v} = (2,-3,4)$, calcular:

a) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) a altura do paralelogramo relativa à base definida pelo vetor $\vec{u}$.

Solução

a) Sabemos de **(7)** que a área A é dada por

$$A = |\vec{u}\times\vec{v}|$$

Como

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (-1,-2,-1)$$

tem-se

$$A = |(-1,-2,-1)| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \text{ u.a (unidades de área).}$$

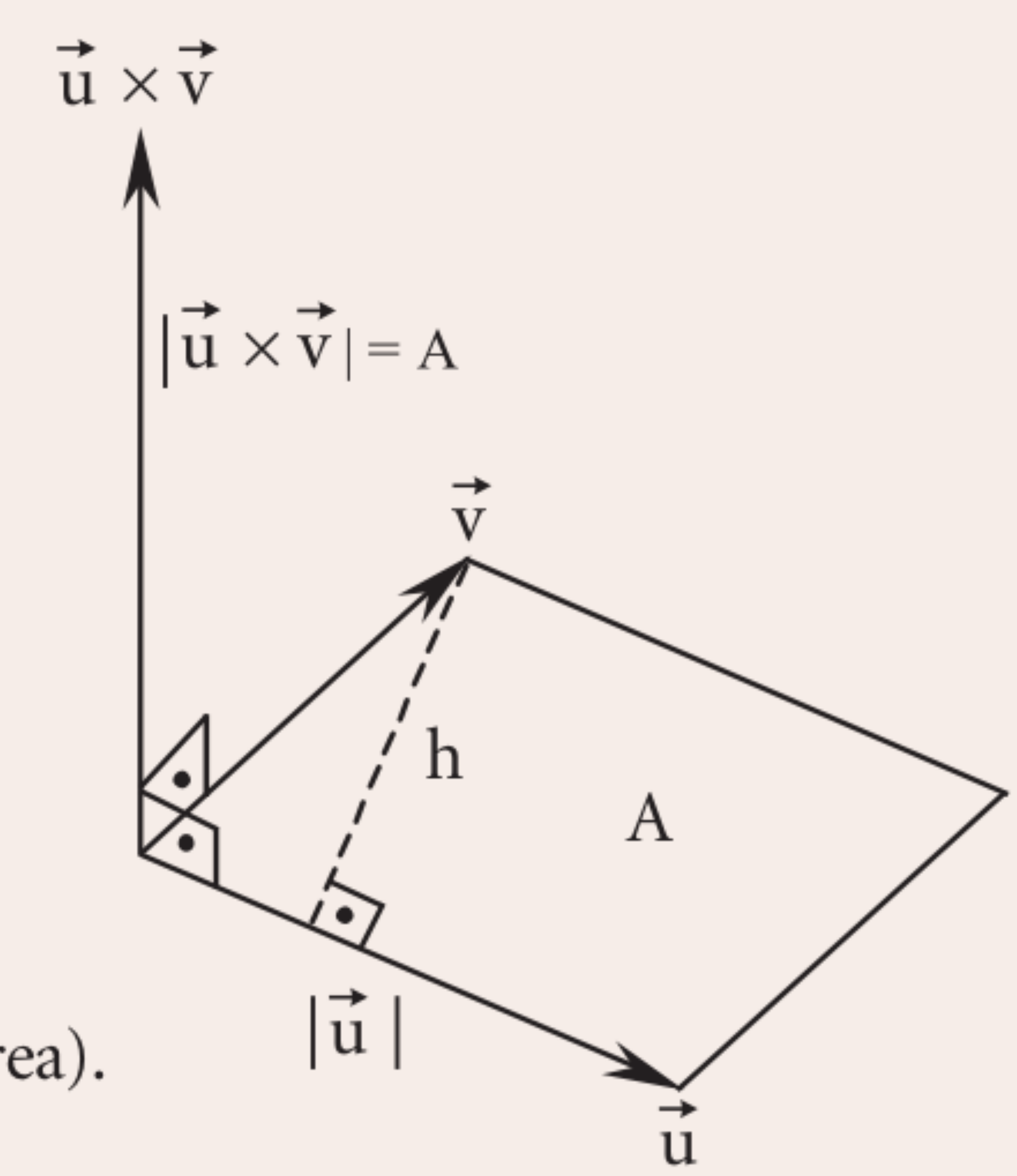


Figura 3.8

b) A Figura 3.8 ilustra novamente o significado geométrico de $|\vec{u}\times\vec{v}|$ e indica a altura h que se pretende calcular.

De

$A = (\text{base})(\text{altura}) = |\vec{u}|\cdot h$

vem

$$h=\frac{A}{|\vec{u}|}=\frac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{|\vec{u}|}$$

ou seja,

$$h=\frac{\sqrt{6}}{|(1,-1,1)|}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}\ \text{u.c. (unidades de comprimento)}$$

5. Determinar a distância do ponto P(5, 1, 2) à reta r que passa por A (3, 1, 3) e B (4, −1, 1).

Solução

Seja d a distância do ponto P à reta r (Figura 3.9). Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AP}$ determinam um paralelogramo cuja altura relativa à base AB é a distância d de P a r.

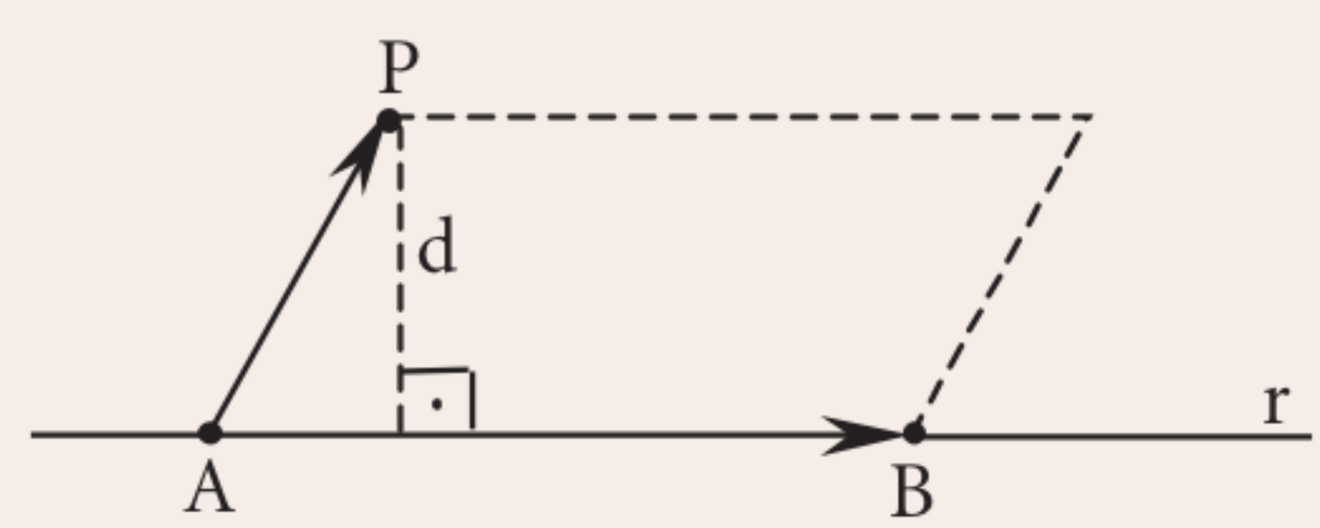


Figura 3.9

Logo, de acordo com o problema anterior, temos

$$d=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|}$$

Como $\overrightarrow{AB}=(1,-2,-2)$, $\overrightarrow{AP}=(2,0,-1)$ e

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & -2\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=(2,-3,4)$$

vem

$$d=\frac{|(2,-3,4)|}{|(1,-2,-2)|}=\frac{\sqrt{4+9+16}}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{\sqrt{29}}{3}\text{u.c.}$$

6. Dados os vetores $\vec{u}=(2,1,-1)$ e $\vec{v}=(1,-1,a)$, calcular o valor de a para que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja igual a $\sqrt{62}$.

Solução

A área A do paralelogramo é dada por

$$A=|\vec{u}\times\vec{v}|$$

Deseja-se que

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{62}$$

Mas,

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & a\end{vmatrix}=(a-1,-2a-1,-3)$$

e

$$|(a-1,-2a-1,-3)|=\sqrt{62}$$

ou

$$\sqrt{(a-1)^2+(-2a-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{62}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e ordenando os termos, vem

$$a^2-2a+1+4a^2+4a+1+9=62$$

$$5a^2+2a-51=0$$

em que

$$a=3 \quad \text{ou} \quad a=-\frac{17}{5}$$

7. Dados os pontos A(2, 1, 1), B(3, −1, 0) e C(4, 2, −2), determinar

a) a área do triângulo ABC;

b) a altura do triângulo relativa ao vértice C.

Solução

a) A Figura 3.10 mostra que, a partir do triângulo ABC, é possível construir um paralelogramo ABDC, cuja área é o dobro da área do triângulo.

Como o paralelogramo é determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e$\overrightarrow{AC}$, conclui-se que a área A do triângulo é

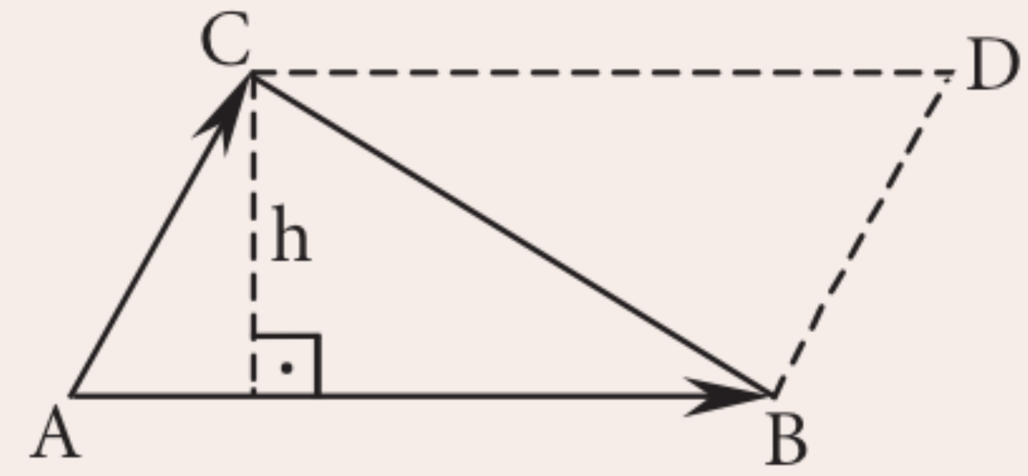


Figura 3.10

$$A_\Delta = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

Mas,

$$\overrightarrow{AB}=(1,-2,-1),\ \overrightarrow{AC}=(2,1,-3) \text{ e}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}=(7,1,5)$$

Logo,

$$A_\Delta = \frac{1}{2}|(7,1,5)|=\frac{1}{2}\sqrt{49+1+25}=\frac{1}{2}\sqrt{75}=\frac{5}{2}\sqrt{3} \text{ u.a.}$$

b) A altura do triângulo indicada na figura é a mesma do paralelogramo de base AB. Como a área A do paralelogramo é

$$A = (\text{base})\cdot(\text{altura}) = b\cdot h \text{ , vem}$$

$$h=\frac{A}{b}=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{\sqrt{75}}{|(1,-2,-1)|}=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{5}{2}\sqrt{2} \text{ u.c}$$

UMA APLICAÇÃO NA FÍSICA

O produto vetorial é uma importante ferramenta matemática utilizada na Física. Entre algumas de suas aplicações pode-se citar o *torque*.

O torque é uma grandeza vetorial, representado por τ, e está relacionada com a possibilidade de um corpo sofrer uma torção ou alterar seu movimento de rotação.

A equação para o cálculo do torque é

$$\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$$

em que $|\vec{r}|$ é a distância do ponto de aplicação da força $\vec{F}$ ao eixo de rotação, ao qual o corpo está vinculado.

Lembrando o cálculo do módulo do produto vetorial visto em **(3)**, tem-se

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}|\operatorname{sen}\theta$$

em que θ é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$.

Exemplo

Calcular o torque sobre a barra $\overrightarrow{AB}$ (Figura 3.11), na qual $\overrightarrow{AB} = \vec{r} = 2\vec{j}$ (em metros), $\vec{F} = 10\vec{i}$ (em newtons) e o eixo de rotação é o eixo z.

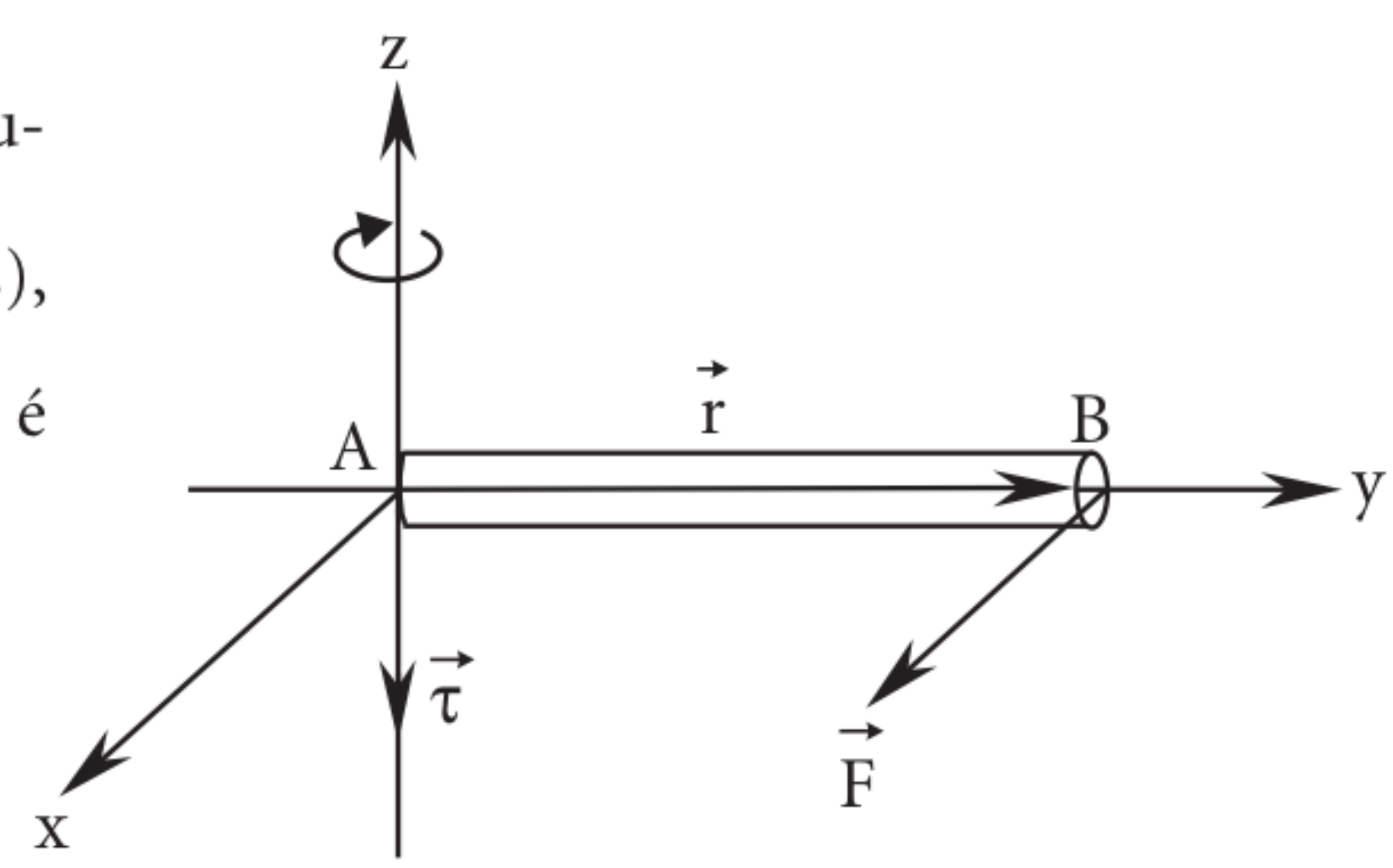


Figura 3.11

Solução

O vetor torque, para o caso dessa figura, é dado por

$$\vec{\tau} = (0\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k})\text{m} \times (10\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k})\text{N}$$

ou

$$\vec{\tau} = (0\vec{i} + 0\vec{j} - 20\vec{k})\text{mN}$$

ou

$$\vec{\tau} = (-20\vec{k})\text{mN}$$

A intensidade (módulo) do torque pode ser calculada por

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}|\operatorname{sen}\theta = (2\text{m})(10\text{N})(\operatorname{sen}90°) = 20\text{mN}$$

ou por

$$|\vec{\tau}| = \sqrt{(-20)^2} = 20\text{mN}$$

Observação

Caso a força $\vec{F}$ seja invertida (Figura 3.12), ou seja, $\vec{F} = -10\vec{i}$ (em newtons), o torque é dado por

$$\vec{\tau}=(0\vec{i}+2\vec{j}+0\vec{k})\mathrm{m}\times(-10\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k})\mathrm{N}$$

ou

$$\vec{\tau}=(20\vec{k})\mathrm{mN}$$

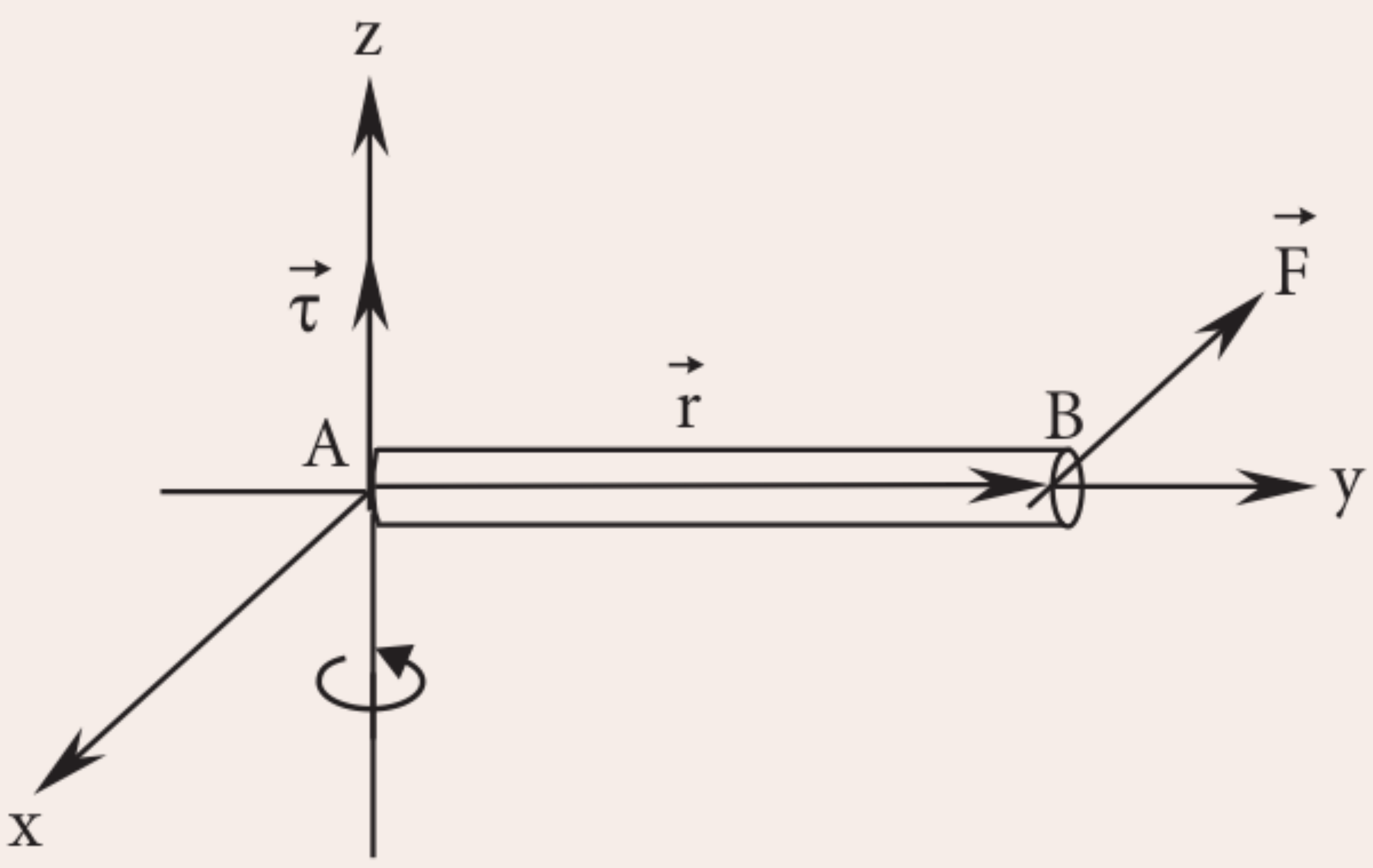


Figura 3.12

Problemas propostos

1. Se $\vec{u}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}, \vec{v}=2\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$ e $\vec{w}=-\vec{i}+\vec{k}$, determinar

a) $|\vec{u}\times\vec{u}|$

b) $(2\vec{v})\times(3\vec{v})$

c) $(\vec{u}\times\vec{w})+(\vec{w}\times\vec{u})$

d) $(\vec{u}\times\vec{v})\times(\vec{v}\times\vec{u})$

e) $(\vec{u}-\vec{v})\times\vec{w}$

f) $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$

g) $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$

h) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})$

i) $\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$

j) $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v}$

k) $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

l) $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

2. Efetuar

a) $\vec{i}\times\vec{k}$

b) $\vec{j}\times(2\vec{i})$

c) $(3\vec{i})\times(2\vec{k})$

d) $\vec{i}\cdot(\vec{j}\times\vec{k})$

e) $(3\vec{i})\cdot(2\vec{j})$

f) $(3\vec{i})\times(2\vec{j})$

g) $\vec{i}\cdot(\vec{j}\times\vec{i})$

h) $\vec{j}\cdot(\vec{j}\times\vec{k})$

i) $(\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{k}$

j) $(\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{j}$

k) $\vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{j})$

l) $(\vec{j}\times\vec{k})\cdot\vec{i}$

3. Dados os pontos A(2, 1, −1), B(3, 0, 1) e C(2, −1, −3), determinar o ponto D tal que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AC}$.

4. Determinar o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{x}\cdot(1,4,-3)=-7$ e $\vec{x}\times(4,-2,1)=(3,5,-2)$.

5. Resolver os sistemas

a) $\begin{cases}\vec{x}\times\vec{j}=\vec{k}\\ \vec{x}\cdot(4\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})=10\end{cases}$

b) $\begin{cases}\vec{x}\times(2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k})=\vec{0}\\ \vec{x}\cdot(\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k})=12\end{cases}$

6. Dados os vetores $\vec{u}=(3,1,1)$, $\vec{v}=(-4,1,3)$ e $\vec{w}=(1,2,0)$, determinar $\vec{x}$ de modo que $\vec{x}\perp\vec{w}$ e $\vec{x}\times\vec{u}=\vec{v}$.

7. Considerando a Figura 3.13, calcular

a) $\overrightarrow{OF}\times\overrightarrow{OD}$
b) $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{FA}$
c) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$
d) $\overrightarrow{EC}\times\overrightarrow{EA}$
e) $\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OE})$
f) $\overrightarrow{GB}\times\overrightarrow{AF}$

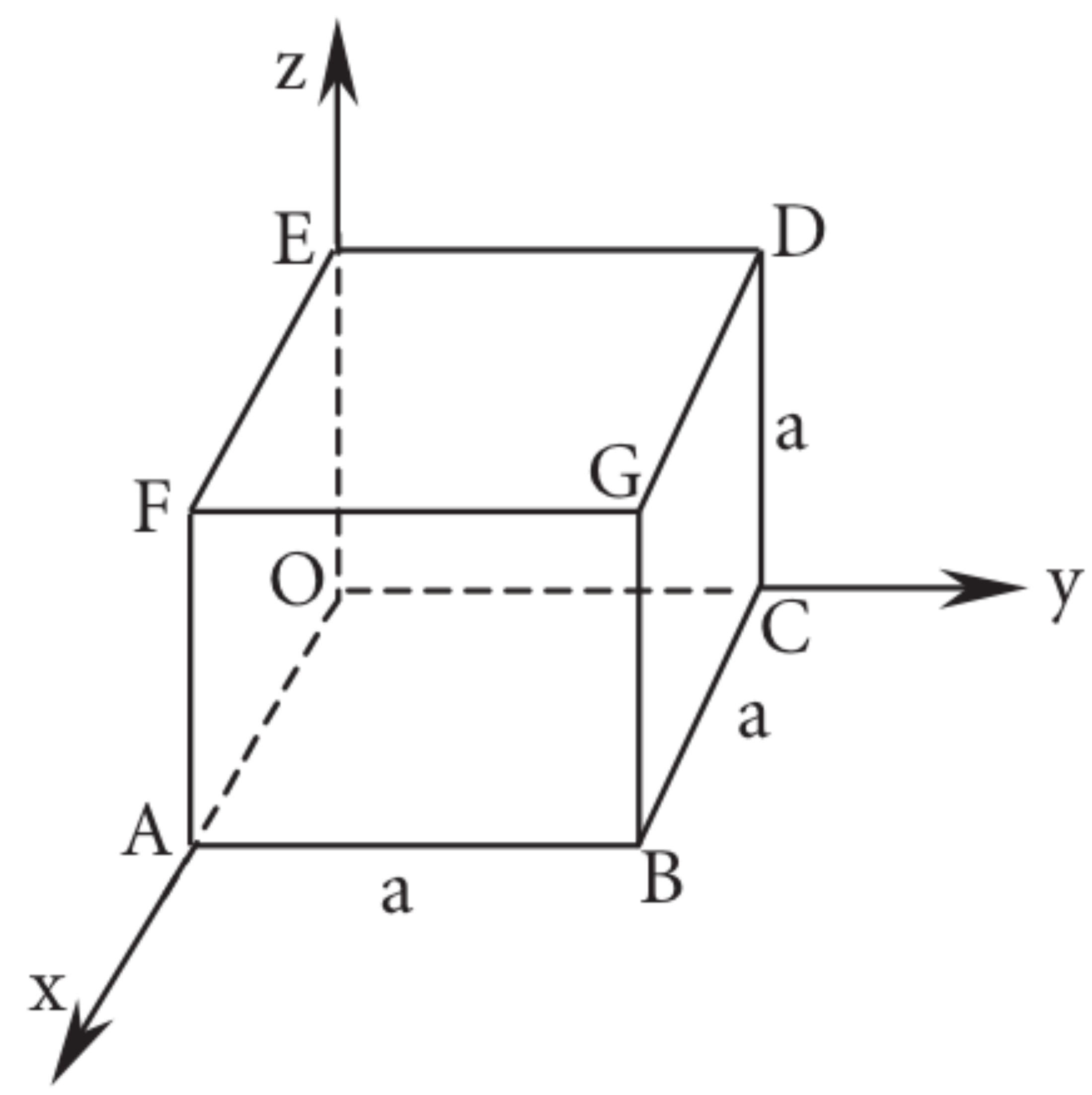


Figura 3.13

8. Sejam os vetores $\vec{u}=(1,-2,1)$, $\vec{v}=(1,1,1)$ e $\vec{w}=(1,0,-1)$.

a) Utilizar o produto escalar para mostrar que os vetores são, dois a dois, ortogonais.

b) Utilizar o produto vetorial para mostrar que o produto vetorial de quaisquer dois deles é paralelo ao terceiro vetor.

c) Mostrar que $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{0}$.

9. Determinar um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u}+2\vec{v}$ e $\vec{v}-\vec{u}$, sendo $\vec{u}=(-3,2,0)$ e $\vec{v}=(0,-1,-2)$.

10. Obter um vetor ortogonal ao plano determinado pelos pontos A(2, 3, 1), B(1, −1, 1) e C(4, 1, −2).

11. Dado $\vec{v}_1=(1,-2,1)$, determinar vetores $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ de modo que os três sejam mutuamente ortogonais.

12. Dados os vetores $\vec{u}=(1,1,0)$ e $\vec{v}=(-1,1,2)$, determinar:

a) um vetor unitário simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) um vetor de módulo 5 simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

13. Determinar um vetor de módulo 2 ortogonal a $\vec{u}=(3,2,2)$ e a $\vec{v}=(0,1,1)$.

14. Com base na Figura 3.14, calcular

a) $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|$
b) $|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|$
c) $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{DC}|$
d) $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}|$
e) $|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{AC}|$
f) $|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{CD}|$

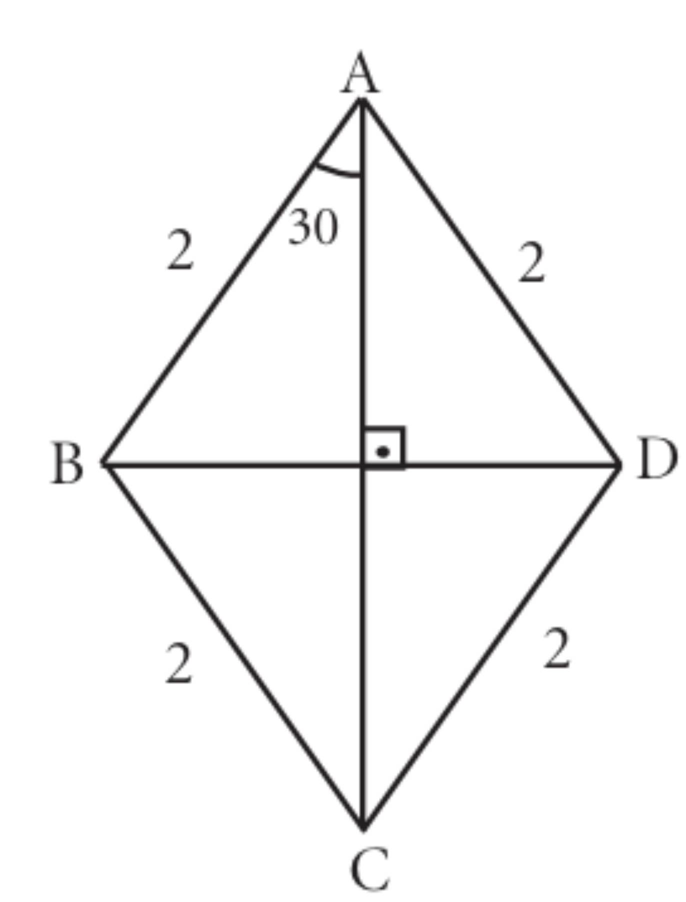


Figura 3.14

15. Sendo $|\vec{u}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{v}|=4$ e 45° o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular

a) $|2\vec{u}\times\vec{v}|$

b) $\left|\frac{2}{5}\vec{u}\times\frac{1}{2}\vec{v}\right|$

16. Determinar $\vec{u}\cdot\vec{v}$, sabendo que $|\vec{u}\times\vec{v}|=12$, $|\vec{u}|=13$ e $\vec{v}$ é unitário.

17. Dados os vetores $\vec{u}=(3,-1,2)$ e $\vec{v}=(-2,2,1)$, calcular:

a) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) a altura do paralelogramo relativa à base definida pelo vetor $\vec{v}$.

18. Mostrar que o quadrilátero ABCD de vértices A(4, 1, 2), B(5, 0, 1), C(−1, 2, −2) e D (−2, 3, −1) é um paralelogramo e calcular sua área.

19. Dois vértices consecutivos de um paralelogramo são A(2, −4, 0) e B(1, −3, −1), e o ponto médio das diagonais é M (3, 2, −2). Calcular a área do paralelogramo.

20. Calcular o valor de *m* para que a área do paralelogramo determinada por $\vec{u}=(m,-3,1)$ e $\vec{v}=(1,-2,2)$ seja igual a $\sqrt{26}$.

21. Sabendo que $|\vec{u}|=6$, $|\vec{v}|=4$ e 30° o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular:

a) a área do triângulo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $(-\vec{v})$;

c) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$.

22. Calcular a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabendo que suas diagonais são $\vec{u}+\vec{v}=(-1,3,4)$ e $\vec{u}-\vec{v}=(1,-1,2)$.

23. Calcular a distância do ponto P(4, 3, 3) à reta que passa por A(1, 2, −1) e B(3, 1, 1).

24. Calcular a área do triângulo ABC e a altura relativa ao lado BC, dado que:

a) A(−4, 1, 1), B(1, 0, 1) e C(0, −1, 3);

b) A(4, 2, 1), B(1, 0, 1) e C(1, 2, 0).

25. Encontrar um vetor ortogonal ao plano determinado pelos pontos P, Q e R e calcular a área do triângulo PQR, dado que:

a) P(3, 0, 0), Q(0, 3, 0), R(0, 0, 2);

b) P(2, 3, 0), Q(0, 2, 1), R(2, 0, 2).

26. Calcular *z*, sabendo-se que A (2, 0, 0), B(0, 2, 0) e C(0, 0, *z*) são vértices de um triângulo de área 6.

27. Dados os pontos A(2, 1, −1) e B(0, 2, 1), determinar o ponto C do eixo Oy de modo que a área do triângulo ABC seja 1,5 u.a.

28. Sabendo que os pontos A(4, 0, 0), B(0, 0, 2), C(0, 3, 0) e D(4, 3, −2) são coplanares, calcular a área do quadrilátero ABCD.

29. Os pontos médios dos lados do triângulo ABC são M(0, 1, 3), N(3, −2, 2) e P(1, 0, 2). Determinar a área do triângulo ABC.

Respostas de problemas propostos

1. a) 0
   b) $\vec{0}$
   c) $\vec{0}$
   d) $\vec{0}$
   e) (−5, 0, −5)
   f) (−1, −23, −1)
   g) (−6, −20, 1)
   h) (8, −2, 13)
   i) (8, −2, 13)
   j) 0
   k) 5
   l) 5

2. a) $-\vec{j}$
   b) $-2\vec{k}$
   c) $-6\vec{j}$
   d) 1
   e) 0
   f) $6\vec{k}$
   g) 0
   h) 0
   i) $\vec{0}$
   j) $-\vec{i}$
   k) $\vec{0}$
   l) 1

3. D (−4, −1, 1)

4. $\vec{x}=(3,-1,2)$

5. a) $\vec{x}=(1,-3,0)$
   b) $\vec{x}=(-4,2,-6)$

6. Não existe $\vec{x}$, pois $\vec{u}$ não é ortogonal a $\vec{v}$.

7. a) $(-a^2,-a^2,a^2)$
   b) $(-a^2,-a^2,0)$
   c) $(0,0,a^2)$
   d) $(-a^2,-a^2,-a^2)$
   e) a^3
   f) $\vec{0}$

9. Um deles: $(\vec{u}+2\vec{v})\times(\vec{v}-\vec{u})=(-12,-18,9)$

10. Um deles: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(12,-3,10)$

11. Uma das infinitas soluções: $\vec{v}_1=(1,-2,1)$, $\vec{v}_2=(1,1,1)$ e $\vec{v}_3=(-1,0,1)$

12. a) $(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ ou $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$
    b) $(\frac{5}{\sqrt{3}},-\frac{5}{\sqrt{3}},\frac{5}{\sqrt{3}})$ ou $(-\frac{5}{\sqrt{3}},\frac{5}{\sqrt{3}},-\frac{5}{\sqrt{3}})$

13. $(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})$ ou $(0,-\sqrt{2},\sqrt{2})$

14. **a)** $2\sqrt{3}$ **d)** 0

b) $2\sqrt{3}$ **e)** $4\sqrt{3}$

c) 0 **f)** $2\sqrt{3}$

15. **a)** 16 **b)** $\frac{8}{5}$

16. 5 ou -5

17. **a)** $3\sqrt{10}$

b) $\sqrt{10}$

18. $\sqrt{122}$

19. $2\sqrt{74}$

20. $m = 0$ ou $m = 2$

21. **a)** 6 **b)** 12 **c)** 24

22. $\sqrt{35}$

23. $\frac{\sqrt{65}}{3}$

24. **a)** $\sqrt{35}$ e $\frac{2\sqrt{35}}{\sqrt{6}}$ **b)** $\frac{7}{2}$ e $\frac{7}{\sqrt{5}}$

25. **a)** $t(2,2,3), t \in \mathbb{R}$ e $\frac{3\sqrt{17}}{2}$ **b)** $t(1,4,6), t \in \mathbb{R}$ e $\frac{\sqrt{53}}{2}$

26. $z = 4$ ou $z = -4$

27. $C(0,1,0)$ ou $C(0,\frac{5}{2},0)$

28. $2\sqrt{61}$

29. $4\sqrt{2}$

4 PRODUTO MISTO

DEFINIÇÃO

Chama-se *produto misto* dos vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ e $\vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$, tomados nesta ordem, ao número real $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.

O produto misto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ também é indicado por $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Tendo em vista que

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

vem

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

e, portanto,

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

Exemplo

Calcular o produto misto dos vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{w} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

Solução

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 27$$

PROPRIEDADES DO PRODUTO MISTO

As propriedades do produto misto decorrem, em sua maioria, das propriedades dos determinantes.

I) O produto misto $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ muda de sinal ao trocarmos a posição de dois vetores.

Em relação ao exemplo anterior, em que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=27$, teríamos

$$(\vec{v},\vec{u},\vec{w})=-27 \quad (\text{permuta de } \vec{u} \text{ e } \vec{v})$$

$$(\vec{w},\vec{v},\vec{u})=-27 \quad (\text{permuta de } \vec{u} \text{ e } \vec{w})$$

$$(\vec{u},\vec{w},\vec{v})=-27 \quad (\text{permuta de } \vec{v} \text{ e } \vec{w})$$

Se em qualquer um desses três últimos produtos efetuarmos nova permutação de dois vetores, o produto misto resultante volta a ser 27.

É o que acontece com $(\vec{v},\vec{w},\vec{u})=27$, onde no primeiro deles permutamos $\vec{u}$ e $\vec{w}$.

Então, se em relação ao produto misto $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ ocorrer

a) uma permutação – haverá troca de sinal;

b) duas permutações – não altera o valor.

Resulta dessa propriedade que os sinais $\cdot$ e $\times$ podem ser permutados, ou seja,

$$\boxed{\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}}$$

pois,

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = (\vec{w},\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$$

II) $(\vec{u}+\vec{x},\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})+(\vec{x},\vec{v},\vec{w})$

$(\vec{u},\vec{v}+\vec{x},\vec{w})=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})+(\vec{u},\vec{x},\vec{w})$

$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}+\vec{x})=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})+(\vec{u},\vec{v},\vec{x})$

III) $(\alpha\vec{u},\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\alpha\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{v},\alpha\vec{w})=\alpha(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$

IV) $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$ se, e somente se, os três vetores forem coplanares.

Admitindo-se que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$, ou seja, $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=0$, conclui-se que $(\vec{v}\times\vec{w})\perp\vec{u}$. Por outro lado, no estudo do produto vetorial vimos que o vetor $\vec{v}\times\vec{w}$ é também ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Assim, como $\vec{v}\times\vec{w}$ é ortogonal aos três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, estes são coplanares (Figura 4.1).

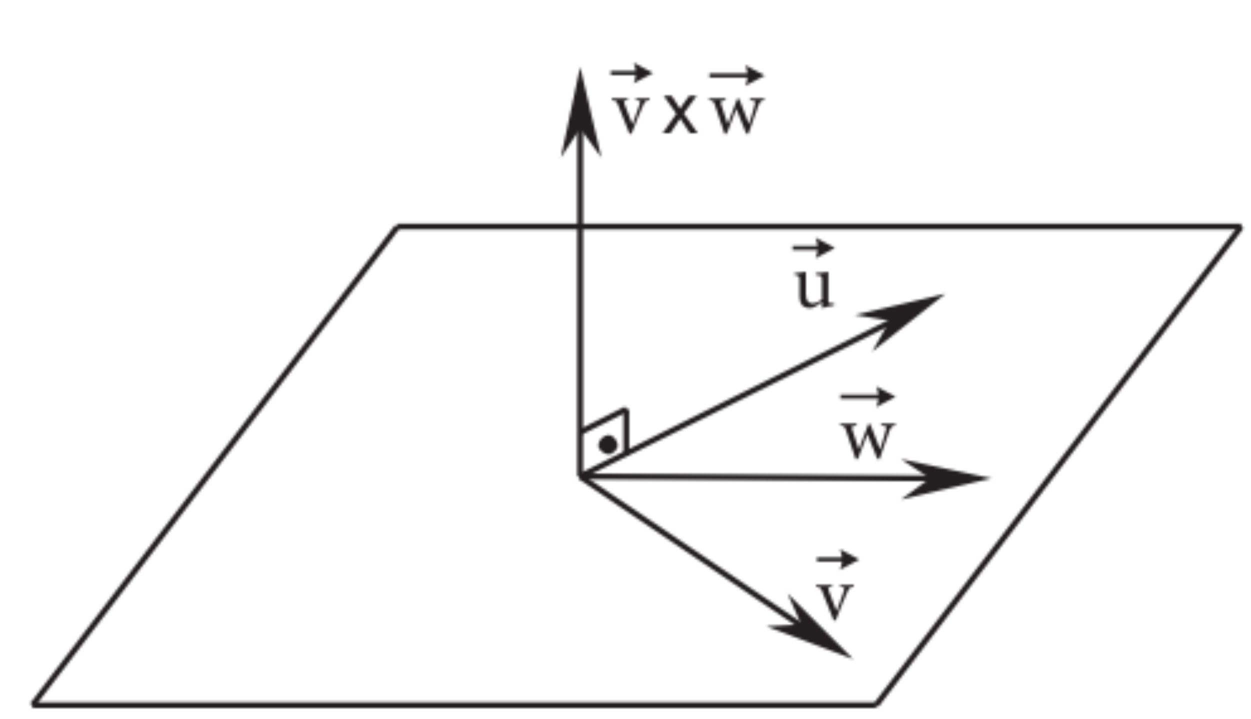


Figura 4.1

Reciprocamente, admitindo-se que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam coplanares, o vetor $\vec{v}\times\vec{w}$, por ser ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{w}$, é também ortogonal a $\vec{u}$.

Ora, se $\vec{u}$ e $\vec{v}\times\vec{w}$ são ortogonais, o produto escalar deles é igual a zero, ou seja,

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$$

Observação

A equivalência da propriedade IV continua válida em situações particulares, tais como:

a) *se pelo menos um dos vetores for nulo* (o determinante (1) é zero por ter uma fila de zeros e os três vetores são coplanares);

b) *se dois deles forem paralelos* (o determinante (1) é zero por apresentar duas filas de elementos proporcionais ou iguais e os três vetores são coplanares).

Exemplos

1. Verificar se são coplanares os vetores $\vec{u}=(2,-1,1)$, $\vec{v}=(1,0,-1)$ e $\vec{w}=(2,-1,4)$.

Solução

Como

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=3\neq 0$$

os vetores não são coplanares.

2. Qual deve ser o valor de m para que os vetores $\vec{u}=(2,m,0)$, $\vec{v}=(1,-1,2)$ e $\vec{w}=(-1,3,-1)$ sejam coplanares?

Solução

Para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam coplanares, deve-se ter $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$, ou seja,

$$\begin{vmatrix}2 & m & 0\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 3 & -1\end{vmatrix}=0$$

ou

$$2-2m-12+m=0$$

e, portanto,

$$m=-10$$

3. Verificar se os pontos A(1, 2, 4), B(−1, 0, −2), C (0, 2, 2) e D(−2, 1, −3) estão no mesmo plano.

Solução

Os quatro pontos dados são coplanares se forem coplanares os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ (Figura 4.2), e, para tanto, deve-se ter

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})=0$$

Como

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix} -2 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -7 \end{vmatrix}=0$$

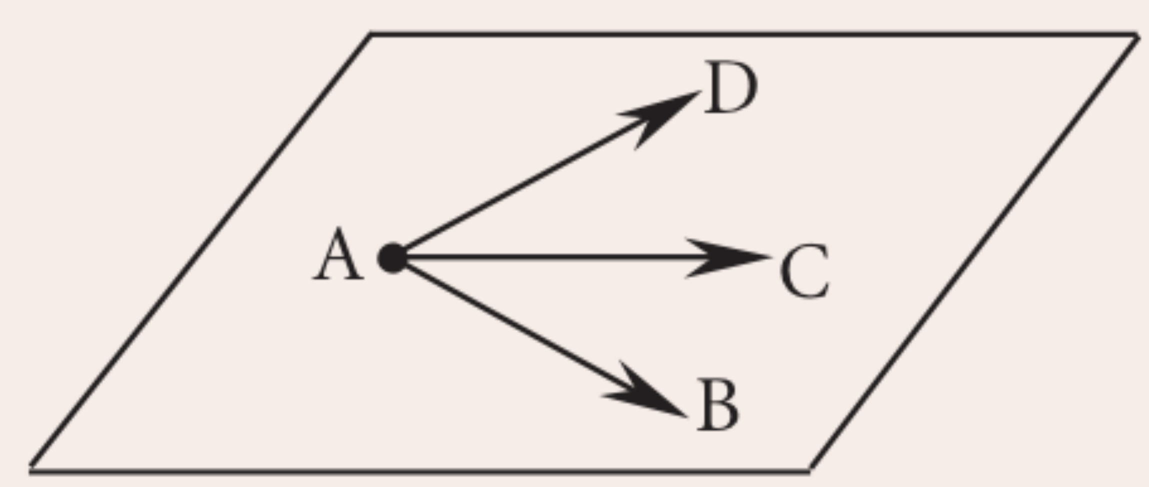


Figura 4.2

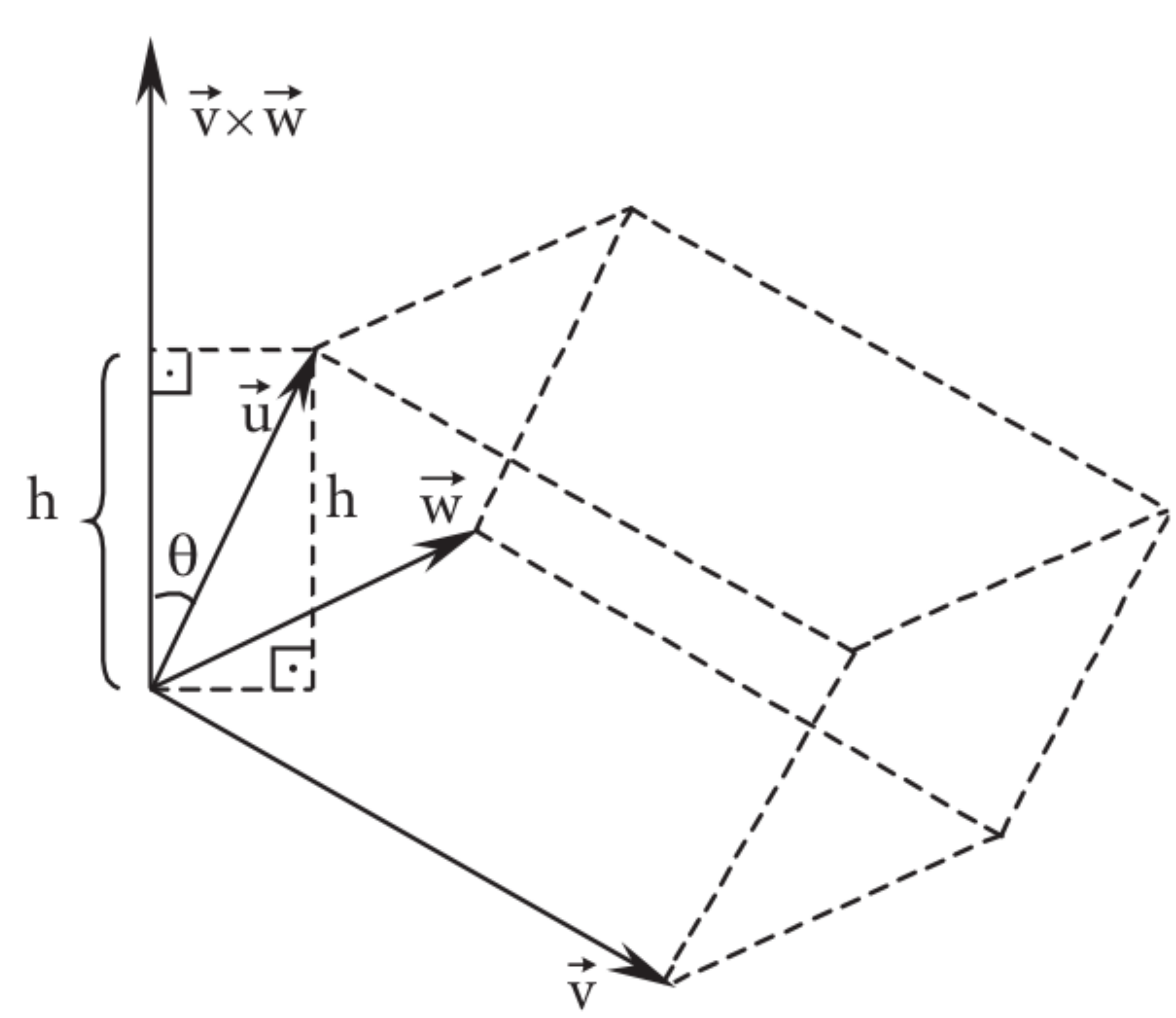
os pontos dados são coplanares.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÓDULO DO PRODUTO MISTO

Geometricamente, o produto misto $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ é igual, em módulo, ao volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores não coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (Figura 4.3).

A área da base do paralelepípedo é $|\vec{v}\times\vec{w}|$.

Seja θ o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}\times\vec{w}$. Sendo $\vec{v}\times\vec{w}$ um vetor ortogonal à base, a altura será paralela a ele, e, portanto,



$$h=|\vec{u}||\cos\theta|$$

Figura 4.3

(É necessário considerar o valor absoluto $|\cos\theta|$, pois θ pode ser um ângulo obtuso.)

Então, o volume V do paralelepípedo é

$$\begin{aligned} V &= (\text{área da base})(\text{altura}) \\ &= |\vec{v}\times\vec{w}||\vec{u}||\cos\theta| \\ &= ||\vec{u}||\vec{v}\times\vec{w}|\cos\theta| \\ &= |\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})| \end{aligned}$$

no qual a última igualdade decorre da relação (2) do Produto Escalar.

Portanto,

$$\boxed{V = |(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|}$$

Exemplo

Sejam os vetores $\vec{u}=(3,m,-2)$, $\vec{v}=(1,-1,0)$ e $\vec{w}=(2,-1,2)$. Calcular o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja 16 u.v. (unidades de volume).

Solução

O volume do paralelepípedo é dado por

$$V = |(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|$$

e, no caso presente, deve-se ter

$$|(\vec{u},\vec{v},\vec{w})| = 16$$

Sendo

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & m & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2m-8$$

vem

$$|-2m-8| = 16$$

que, pela definição de módulo, implica duas hipóteses:

$$-2m-8=16 \quad \text{ou} \quad -2m-8=-16$$

e, portanto,

$$m=-12 \quad \text{ou} \quad m=4$$

VOLUME DO TETRAEDRO

Sejam A, B, C e D pontos não coplanares. Portanto, os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ também são não coplanares. Em consequência, esses vetores determinam um paralelepípedo (Figura 4.4) cujo volume é

$$V = |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$$

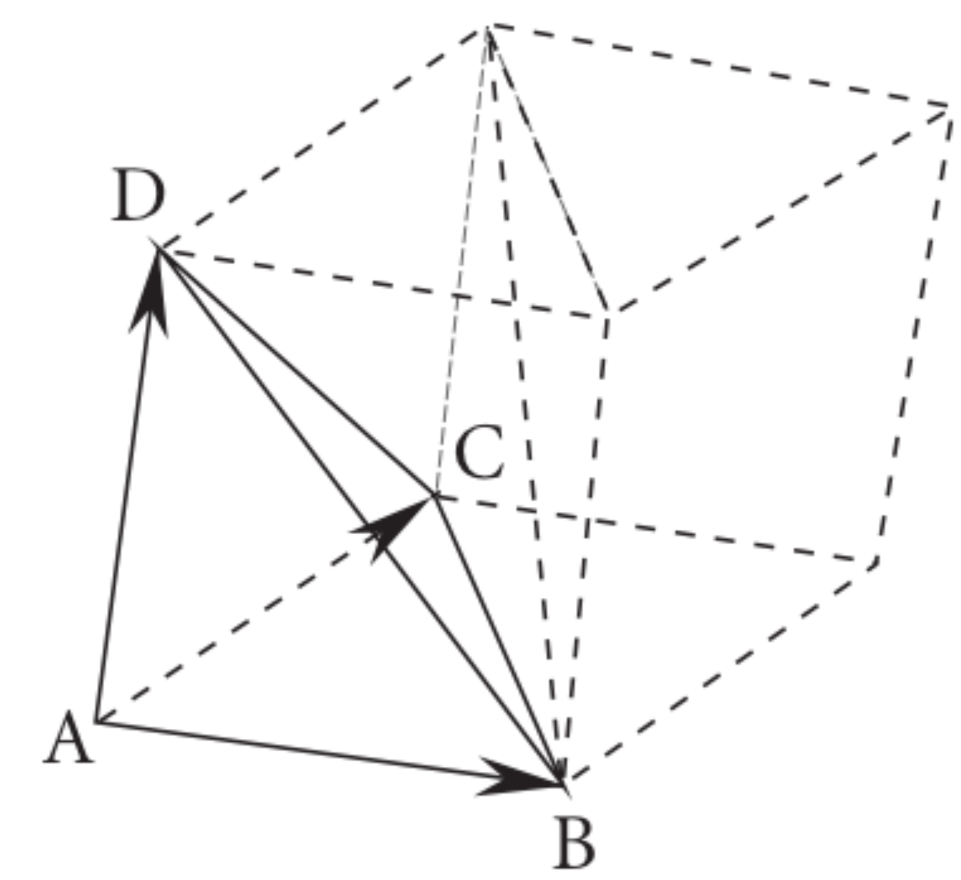


Figura 4.4

O paralelepípedo, por sua vez, pode ser repartido em dois prismas triangulares de mesmo tamanho (conforme figura) e, portanto, o volume V_p de cada prisma é a metade do volume V do paralelepípedo $(V_p = \frac{1}{2}V)$.

Por outro lado, da Geometria Espacial sabemos que o prisma pode ser repartido em três pirâmides de mesmo volume, sendo uma delas o tetraedro ABCD. Assim, o volume V_t do tetraedro é um terço do volume do prisma, ou seja,

$$V_t = \frac{1}{3}V_p = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}V)$$

ou

$$V_t = \frac{1}{6}V$$

ou

$$\boxed{V_t = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|}$$

Exemplo

Sejam A(1, 2, –1), B(5, 0, 1), C(2, –1, 1) e D(6, 1, –3) vértices de um tetraedro. Calcular:

a) o volume do tetraedro;

b) a altura do tetraedro relativa ao vértice D.

Solução

a) O volume do tetraedro é dado por

$$V_t = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$$

Mas

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}4 & -2 & 2\\ 1 & -3 & 2\\ 5 & -1 & -2\end{vmatrix}=36$$

Portanto, o volume do tetraedro é

$$V_t=\frac{1}{6}\cdot 36=6 \text{ u.v.}$$

b) Observemos na Figura 4.4 que a altura do tetraedro traçada do vértice D é a própria altura do paralelepípedo de base determinada por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Como o volume V do paralelepípedo é dado por

$$\begin{aligned}V &= (\text{área da base})(\text{altura})\\ &=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|\cdot h\end{aligned}$$

tem-se

$$h=\frac{V}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}$$

mas,

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -2 & 2\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=(2,-6,-10)$$

e, portanto,

$$h=\frac{36}{|(2,-6,-10)|}=\frac{36}{\sqrt{4+36+100}}=\frac{36}{\sqrt{140}}=\frac{18}{\sqrt{35}} \text{ u.c.}$$

Problemas propostos

1. Dados os vetores $\vec{u}=(3,-1,1)$, $\vec{v}=(1,2,2)$ e $\vec{w}=(2,0,-3)$, calcular

a) $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$

b) $(\vec{w},\vec{u},\vec{v})$

2. Sabendo que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=-5$, calcular

a) $(\vec{w},\vec{v},\vec{u})$

b) $(\vec{v},\vec{u},\vec{w})$

c) $(\vec{w},\vec{u},\vec{v})$

d) $\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})$

3. Sabendo que $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=2$, calcular

a) $\vec{u}\cdot(\vec{w}\times\vec{v})$

b) $\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})$

c) $(\vec{v}\times\vec{w})\cdot\vec{u}$

d) $(\vec{u}\times\vec{w})\cdot(3\vec{v})$

e) $\vec{u}\cdot(2\vec{w}\times\vec{v})$

f) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}\times\vec{w})$

4. Sabendo que $(\vec{u},\vec{w},\vec{x})=2$ e $(\vec{v},\vec{w},\vec{x})=5$, calcular

a) $(\vec{u},\vec{x},-\vec{w})$

b) $(3\vec{u},3\vec{w},-2\vec{x})$

c) $(2\vec{u}+4\vec{v},\vec{w},\vec{x})$

d) $(5\vec{u}-3\vec{v},2\vec{w},\vec{x})$

5. Verificar se são coplanares os vetores

a) $\vec{u}=(1,-1,2)$, $\vec{v}=(2,2,1)$ e $\vec{w}=(-2,0,-4)$

b) $\vec{u}=(2,-1,3)$, $\vec{v}=(3,1,-2)$ e $\vec{w}=(7,-1,4)$

6. Determinar o valor de k para que sejam coplanares os vetores

a) $\vec{u}=(2,-1,k)$, $\vec{v}=(1,0,2)$ e $\vec{w}=(k,3,k)$

b) $\vec{u}=(2,k,1)$, $\vec{v}=(1,2,k)$ e $\vec{w}=(3,0,-3)$

7. Verificar se são coplanares os pontos

a) A(1, 1, 0), B(−2, 1, −6), C(−1, 2, −1) e D(2, −1, −4)

b) A(2, 1, 2), B(0, 1, −2), C(1, 0, −3) e D(3, 1, −2)

8. Para que valor de m os pontos A(m, 1, 2), B(2, −2, −3), C(5, −1, 1) e D(3, −2, −2) são coplanares?

9. Qual o volume do cubo determinado pelos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$?

10. Um paralelepípedo é determinado pelos vetores $\vec{u}=(3,-1,4)$, $\vec{v}=(2,0,1)$ e $\vec{w}=(-2,1,5)$. Calcular seu volume e a altura relativa à base definida pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

11. Calcular o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{v}_1=(0,-1,2)$, $\vec{v}_2=(-4,2,-1)$ e $\vec{v}_3=(3,m,-2)$ seja igual a 33. Calcular a altura desse paralelepípedo relativa à base definida por $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

12. O ponto A(1, −2, 3) é um dos vértices de um paralelepípedo, e os três vértices adjacentes são B(2, −1, −4), C(0, 2, 0) e D(−1, m, 1). Determinar o valor de m para que o volume desse paralelepípedo seja igual ao 20 u.v. (unidades de volume).

13. Dados os pontos A(2, 1, 1), B(−1, 0, 1) e C(3, 2, −2), determinar o ponto D do eixo Oz para que o volume do paralelepípedo determinado por $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ seja 25 u.v.

14. Representar graficamente o tetraedro ABCD e calcular seu volume, sendo A(1, 1, 0), B(6, 4, 1), C(2, 5, 0) e D(0, 3, 3).

15. Calcular o volume do tetraedro de base ABC e vértice P, sendo A (2, 0, 0), B (2, 4, 0), C(0, 3, 0) e P(2, –2, 9). Qual é a altura do tetraedro relativa ao vértice P?

16. Sabendo que os vetores $\overrightarrow{AB}=(2,1,-4)$, $\overrightarrow{AC}=(m,-1,3)$ e $\overrightarrow{AD}=(-3,1,-2)$ determinam um tetraedro de volume 3, calcular o valor de m.

17. Três vértices de um tetraedro de volume 6 são A(–2, 4, –1), B(–3, 2, 3) e C(1, –2, –1). Determinar o quarto vértice D, sabendo que ele pertence ao eixo Oy.

18. Calcular a distância do ponto D(2, 5, 2) ao plano determinado pelos pontos A(3, 0, 0), B(0, –3, 0) e C(0, 0, 3).

19. Sendo $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=4$ e 120° o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular

a) $|\vec{u}+\vec{v}|$

b) $|\vec{u}\times(\vec{v}-\vec{u})|$

c) o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}\times\vec{v}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

20. Determinar m e n para que se tenha

a) $(m,n,2)\cdot(4,-1,3)=-2$

b) $(m,n,2)\times(4,-1,3)=(8,-1,-11)$

c) $(m,n,2)\cdot((3,1,2)\times(0,1,-1))=9$

Respostas de problemas propostos

1. a) –29 **b)** –29

2. a) 5 **b)** 5 **c)** –5 **d)** –5

3. a) –2 **b)** 2 **c)** 2 **d)** –6

e) –4 **f)** –2

4. a) 2 **b)** –36 **c)** 24 **d)** –10

5. a) Não **b)** Sim

6. a) 6 **b)** 2 ou –3

7. a) Sim **b)** Não

8. m = 4

9. 1

10. 17 e $\dfrac{17}{\sqrt{30}}$

11. $m = 4$ ou $m = -\dfrac{17}{4}$ e $h = \dfrac{33}{\sqrt{89}}$

12. $m = 6$ ou $m = 2$

13. $D(0, 0, -10)$ ou $D(0, 0, 15)$

14. $V = \dfrac{19}{2}$ u.v.

15. $V = 12$ u.v. e $h = 9$ u.c.

16. $m = -\dfrac{17}{2}$ ou $m = \dfrac{19}{2}$

17. $D(0, 2, 0)$ ou $D(0, -4, 0)$

18. $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ u.c.

19. **a)** $\sqrt{13}$ **b)** $6\sqrt{3}$ **c)** $V = 108$ u.v.

20. **a)** $n = 4m + 8$ **b)** $m = 3$ e $n = 2$ **c)** $n = m + 1$