

## Lista de Exercícios 2

1) Dados os vetores  $\vec{u} = (1, -1)$ ,  $\vec{v} = (-3, 4)$  e  $\vec{w} = (8, -6)$ , calcular:

- a)  $|\vec{u}|$                       b)  $|2\vec{u} - \vec{w}|$                       c)  $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$
- d)  $|\vec{v}|$                       e)  $|\vec{u} + \vec{v}|$                       f)  $\left| \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right|$

2) Verificar se são unitários os seguintes vetores:

$$\vec{u} = (1, 1, 1) \quad \text{e} \quad \vec{v} = \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

3) Calcular os valores de  $a$  para que o vetor  $\vec{u} = (a, -2)$  tenha módulo 4.

4) Seja  $\mathbf{v} = (-1, 2, 5)$ . Encontre todos os escalares  $k$  tais que  $\|k\mathbf{v}\| = 4$ .

5) Dados os pontos  $A(-4, 3)$  e  $B(2, 1)$ , encontrar o ponto  $P$  nos casos

- a)  $P$  pertence ao eixo  $Oy$  e é equidistante de  $A$  e  $B$ ;  
b)  $P$  é equidistante de  $A$  e  $B$  e sua ordenada é o dobro da abscissa;

6) Obter um ponto  $P$  do eixo das cotas cuja distância ao ponto  $A(-1, 2, -2)$  seja igual a 3.

7) Calcular a distância do ponto  $A(3, 4, -2)$

- a) ao plano  $xy$ ;                      d) ao eixo dos  $x$ ;  
b) ao plano  $xz$ ;                      e) ao eixo dos  $y$ ;  
c) ao plano  $yz$ ;                      f) ao eixo dos  $z$ .

8) Encontrar o vetor unitário que tenha (I) o mesmo sentido de  $\vec{v}$  e (II) sentido contrário a  $\vec{v}$ , nos casos:

- a)  $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$                       b)  $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$   
c)  $\vec{v} = (1, \sqrt{3})$                       d)  $\vec{v} = (0, 4)$

9) Dado o vetor  $\vec{v} = (1, -3)$ , determinar o vetor paralelo a  $\vec{v}$  que tenha:

- a) sentido contrário ao de  $\vec{v}$  e duas vezes o módulo de  $\vec{v}$ ;  
b) o mesmo sentido de  $\vec{v}$  e módulo 2;  
c) sentido contrário ao de  $\vec{v}$  e módulo 4.

10) Apresentar o vetor genérico que satisfaz a condição:

- a) paralelo ao eixo dos  $x$ ;                      e) ortogonal ao eixo dos  $y$ ;  
b) representado no eixo dos  $z$ ;                      f) ortogonal ao eixo dos  $z$ ;  
c) paralelo ao plano  $xy$ ;                      g) ortogonal ao plano  $xy$ ;  
d) paralelo ao plano  $yz$ ;                      h) ortogonal ao plano  $xz$ .

11) Encontrar o vértice oposto a  $B$ , no paralelogramo  $ABCD$ , para:

$$A(-3, -1), B(4, 2) \text{ e } C(5, 5)$$

12) Quais dos seguintes vetores  $\vec{u} = (4, -6, 2)$ ,  $\vec{v} = (-6, 9, -3)$ ,  $\vec{w} = (14, -21, 9)$  e  $\vec{t} = (10, -15, 5)$  são múltiplos escalares um do outro?

13) Verificar se são colineares os pontos:  $A(-1, 4, -3)$ ,  $B(2, 1, 3)$  e  $C(4, -1, 7)$

14) Dados os vetores  $\vec{u} = (2, -3, -1)$  e  $\vec{v} = (1, -1, 4)$ , calcular  $2\vec{u} \cdot (-\vec{v})$

15) Determinar o vetor  $\vec{v}$ , paralelo ao vetor  $\vec{u} = (2, -1, 3)$ , tal que  $\vec{v} \cdot \vec{u} = -42$ .

16) Verificar para os vetores  $\vec{u} = (4, -1, 2)$  e  $\vec{v} = (-3, 2, -2)$  as desigualdades

a)  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$  (*Desigualdade de Schwarz*)

b)  $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$  (*Desigualdade Triangular*)

17) Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo equilátero cujo lado mede 20 cm. Calcular  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  e  $\vec{AB} \cdot \vec{CA}$ .

18) O quadrilátero ABCD (Figura 2.16) é um losango de lado 2. Calcular:

a)  $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$

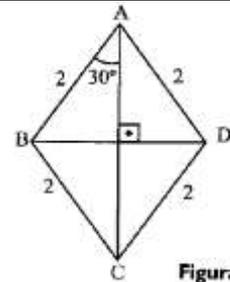
d)  $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$

b)  $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$

e)  $\vec{AB} \cdot \vec{DC}$

c)  $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$

f)  $\vec{BC} \cdot \vec{DA}$



19) Provar que os pontos A(-1, 2, 3), B(-3, 6, 0) e C(-4, 7, 2) são vértices de um triângulo retângulo.

20) Seja o vetor  $\vec{v} = (2, -1, 1)$ . Obter

a) um vetor ortogonal a  $\vec{v}$ ;

b) um vetor unitário ortogonal a  $\vec{v}$ ;

c) um vetor de módulo 4 ortogonal a  $\vec{v}$ .

21) Calcular os ângulos internos do triângulo de vértices A(2, 1, 3), B(1, 0, -1) e C(-1, 2, 1).

22) Sendo  $\vec{a} \perp \vec{b}$ ,  $|\vec{a}| = 6$  e  $|\vec{b}| = 8$ , calcular  $|\vec{a} + \vec{b}|$  e  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .

23) Calcular  $n$  para que seja de  $30^\circ$  o ângulo entre os vetores  $\vec{v} = (-3, 1, n)$  e  $\vec{k}$ .

24) Determinar um vetor unitário ortogonal ao eixo Oz e que forme  $60^\circ$  com o vetor  $\vec{i}$ .

25) Determinar o vetor  $\vec{v}$  nos casos

a)  $\vec{v}$  é ortogonal ao eixo Oz,  $|\vec{v}| = 8$ , forma ângulo de  $30^\circ$  com o vetor  $\vec{i}$  e ângulo obtuso com  $\vec{j}$ ;

b)  $\vec{v}$  é ortogonal ao eixo Ox,  $|\vec{v}| = 2$ , forma ângulo de  $60^\circ$  com o vetor  $\vec{j}$  e ângulo agudo com  $\vec{k}$ .

26) Dados os vetores  $\vec{u} = (3, 0, 1)$  e  $\vec{v} = (-2, 1, 2)$ , determinar  $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$  e  $\text{proj}_{-\vec{u}} \vec{v}$ .

27) Determinar os vetores projeção de  $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$  sobre os eixos cartesianos x, y e z.

28) Sendo  $\vec{w} = (2, -3, -1)$ , escreva  $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ , com  $\vec{w}_1$  paralelo ao vetor (3,0,1) e  $\vec{w}_2$  ortogonal ao vetor (3,0,1).

29) Sejam  $A(2, 1, 3)$ ,  $B(m, 3, 5)$  e  $C(0, 4, 1)$  vértices de um triângulo (Figura 2.18).

- Para que valor de  $m$  o triângulo  $ABC$  é retângulo em  $A$ ?
- Calcular a medida da projeção do cateto  $AB$  sobre a hipotenusa  $BC$ .
- Determinar o ponto  $H$ , pé da altura relativa ao vértice  $A$ .
- Mostrar que  $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ .

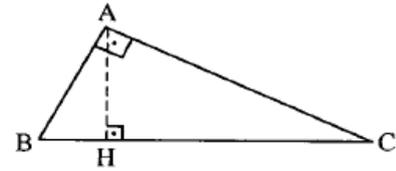


Figura 2.18

30) Determinar o valor de  $k$  para que os vetores  $\vec{u} = (-2, 3)$  e  $\vec{v} = (k, -4)$  sejam

- paralelos;
- ortogonais.

31) Determine se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  fazem um ângulo agudo, um ângulo obtuso ou são ortogonais.

- $\mathbf{u} = (6, 1, 4)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 0, -3)$
- $\mathbf{u} = (0, 0, -1)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$
- $\mathbf{u} = (-6, 0, 4)$ ,  $\mathbf{v} = (3, 1, 6)$
- $\mathbf{u} = (2, 4, -8)$ ,  $\mathbf{v} = (5, 3, 7)$

32) Seja o cubo de aresta  $a$  representado na Figura 2.17.

Determinar:

- $\overline{OA} \cdot \overline{OC}$
- $\overline{OA} \cdot \overline{OD}$
- $\overline{OE} \cdot \overline{OB}$
- $|\overline{OB}|$  e  $|\overline{OG}|$
- $\overline{EG} \cdot \overline{CG}$
- $(\overline{ED} \cdot \overline{AB}) \cdot \overline{OG}$

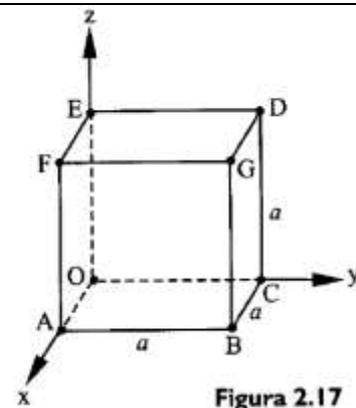
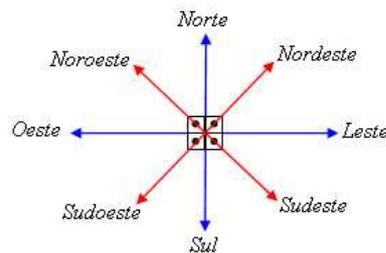


Figura 2.17

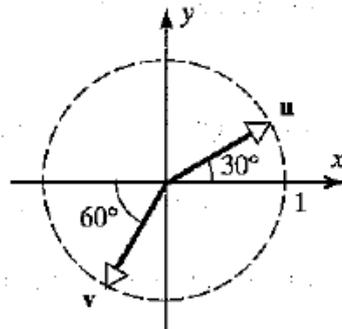
33) Um homem anda 25Km a nordeste, 15Km a leste e 10Km ao sul. Determine:

- Sua distância da posição de partida.
- O ângulo de sua posição final com relação à horizontal (eixo  $x$ ).

A figura abaixo relaciona ângulos e localização espacial.



34) Encontre os componentes de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  e  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  para os vetores dados na figura.



35) Encontre a projeção ortogonal de  $\mathbf{u}$  em  $\mathbf{a}$ .

(a)  $\mathbf{u} = (6, 2)$ ,  $\mathbf{a} = (3, -9)$       (b)  $\mathbf{u} = (-1, -2)$ ,  $\mathbf{a} = (-2, 3)$

(c)  $\mathbf{u} = (3, 1, -7)$ ,  $\mathbf{a} = (1, 0, 5)$       (d)  $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{a} = (4, 3, 8)$

Faça a representação gráfica dos itens (a) e (b).

---

36) Encontre dois vetores ortogonais a  $\vec{v} = (2, -3)$ .

---

37) Encontre cinco vetores não-nulos distintos que são ortogonais a  $\mathbf{u} = (5, -2, 3)$ .

---

## Respostas

1) a)  $\sqrt{2}$       b)  $2\sqrt{13}$       c)  $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

d) 5      e)  $\sqrt{13}$       f) 1

---

2)  $\vec{v}$  é unitário

---

3)  $\pm 2\sqrt{3}$

---

4)  $k = \pm \frac{4}{\sqrt{30}}$

---

5) a) P(0, 5)      b) P(-5, -10)

---

6) P(0, 0, 0) ou P(0, 0, -4)

---

7) a) 2      c) 3      e)  $\sqrt{13}$

b) 4      d)  $2\sqrt{5}$       f) 5

---

8) a)  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  e  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$       b)  $(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})$  e  $(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$

---

c)  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  e  $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$       d) (0, 1) e (0, -1)

---

- 9) a)  $(-2, 6)$       b)  $(\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{6}{\sqrt{10}})$       c)  $(-\frac{4}{\sqrt{10}}, \frac{12}{\sqrt{10}})$
- 
- 10) a)  $(x, 0, 0)$       c)  $(x, y, 0)$       e)  $(x, 0, z)$       g)  $(0, 0, z)$   
b)  $(0, 0, z)$       d)  $(0, y, z)$       f)  $(x, y, 0)$       h)  $(0, y, 0)$
- 
- 11)  $D(-2,4)$
- 
- 12)  $\vec{u}, \vec{v} \text{ e } \vec{t}$
- 
- 13) Sim
- 
- 14) -2
- 
- 15)  $(-6, 3, -9)$
- 
- 17) 200 e -200
- 
- 18) a) 0      b) 2      c) -2      d) 2      e) 4      f) -4
- 
- 19)  $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 0$
- 
- 20) a) Dentre os infinitos possíveis:  $(1, 1, -1)$   
b) Um deles:  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$   
c) Um deles:  $(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}})$
- 
- 21)  $\hat{A} \cong 50^\circ 57'$ ,  $\hat{B} \cong 57^\circ 1'$ ,  $\hat{C} \cong 72^\circ 2'$
- 
- 22) 10 e 10
- 
- 23)  $\sqrt{30}$
- 
- 24)  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$  ou  $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$
- 
- 25) a)  $(4\sqrt{3}, -4, 0)$       b)  $(0, 1, \sqrt{3})$
- 
- 26)  $(\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{8}{9})$  e  $(-\frac{6}{5}, 0, -\frac{2}{5})$
- 
- 27)  $4\vec{i}, -3\vec{j}, 2\vec{k}$
- 
- 28)  $\vec{w} = (\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}, -3, -\frac{3}{2})$
- 
- 29) a)  $m = 3$       b)  $\frac{9}{26}\sqrt{26}$       c)  $H(\frac{51}{26}, \frac{87}{26}, \frac{94}{26})$
- 
- 30) a)  $\frac{8}{3}$       b) -6
- 
- 31) (a) Ortogonal      (b) Obtuso      (c) Agudo      (d) Obtuso
- 
- 32) a) 0      c) 0      e)  $a^2$   
b) 0      d)  $a\sqrt{2}$  e  $a\sqrt{3}$       f)  $(a^3, a^3, a^3)$
- 
- 33) a) 33,6Km      b)  $13,2^\circ$
- 
- 34)  $\mathbf{u} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $\mathbf{v} = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2})$ ,  $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2})$
- 
- 35) (a)  $(0, 0)$       (b)  $(\frac{8}{13}, -\frac{12}{13})$       (c)  $(-\frac{16}{13}, 0, -\frac{80}{13})$       (d)  $(\frac{16}{89}, \frac{12}{89}, \frac{32}{89})$
- 
- 36)  $(3k, 2k)$  com um escalar  $k$  qualquer.
- 
- 37) Por exemplo,  $(2, -5, 0)$ ,  $(-3, 0, 5)$ ,  $(0, 3, 2)$ ,  $(1, -5, -5)$ ,  $(-3, 3, 7)$
-