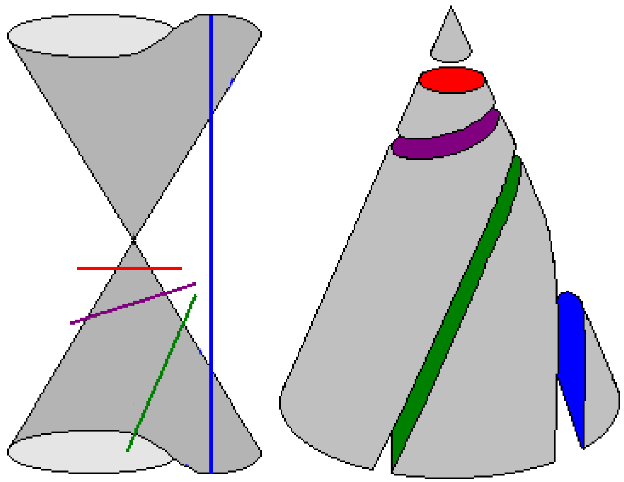
Engenharia Civil

Cônicas

As cônicas são curvas que se obtém com a interseção entre um cone circular reto e um plano. Elas se diferenciam em decorrência do ângulo com que o plano secante corta o cone.



Cônicas

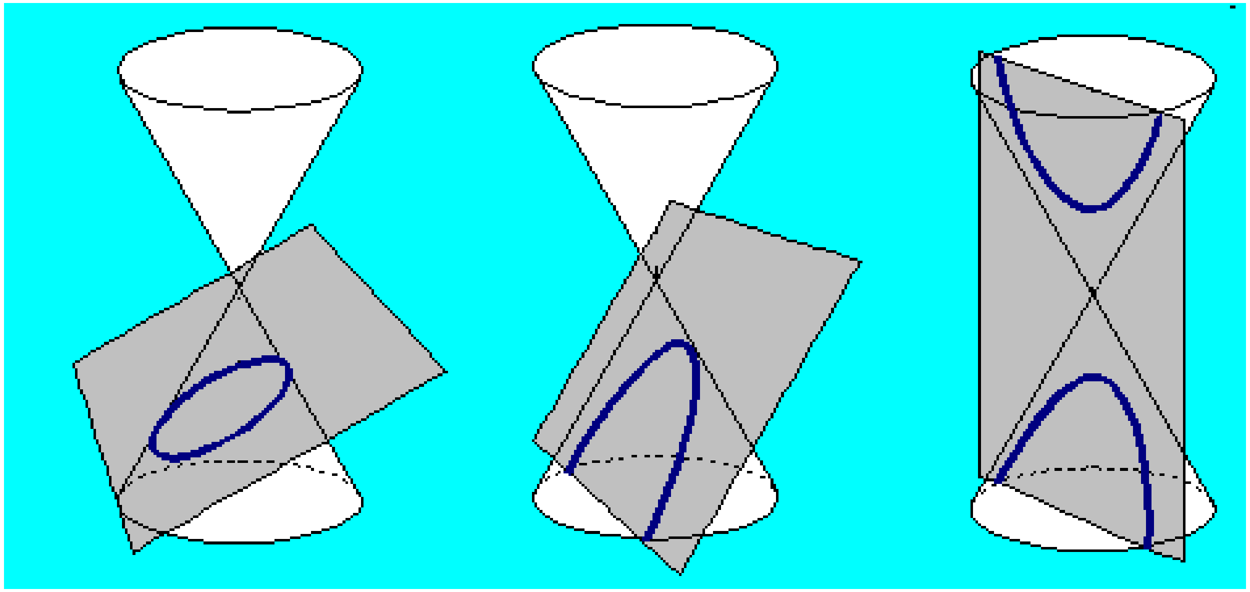
• Se o plano intercepta todas as geratrizes do cone, a curva obtida é uma **elipse**.

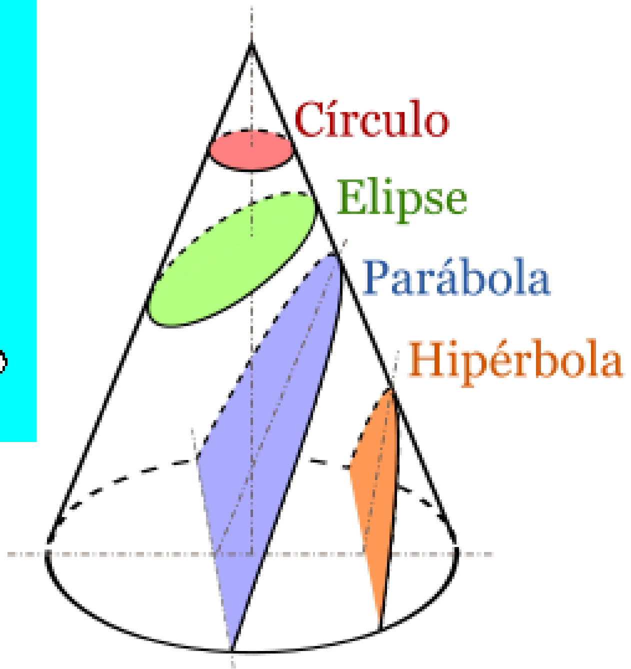
• Se o plano é paralelo apenas a uma geratriz, a curva obtida é uma **parábola**.

• Se o plano é paralelo ao eixo, a curva obtida é uma **hipérbole**.

Engenharia Civil

Cônicas





Cônicas

Definição:

Uma cônica é determinada pelo conjunto de todos os pontos **P** num plano, de modo que a distância de um ponto **P** desse plano a um ponto fixo **F** esteja numa razão constante e com a distância de **P** a uma reta fixa **d**, que não contenha o ponto fixo **F**.

Cônicas

Assim temos:

- O ponto fixo ***F*** : foco(s) da cônica;
- A razão constante ***e*** : excentricidade da cônica. Para cônicas não degeneradas representa um número não-negativo, uma vez que determina a razão entre duas distâncias;
- Reta fixa ***d*** : diretriz da cônica.

Cônicas

A excentricidade estabelecida pela razão, determina se a cônica possui somente um vértice, ou se esta possui dois vértices.

- Se $\left|\frac{\overline{PF}}{\overline{\overline{Pd}}}\right| = 1 \Rightarrow \varepsilon = 1$, a cônica possui um vértice. **Parábola.**
- Se $0 < \left|\frac{\overline{PF}}{\overline{\overline{Pd}}}\right| < 1 \Rightarrow 0 < \varepsilon < 1$, a cônica possui dois vértices. **Elipse.**
- Se $\left|\frac{\overline{PF}}{\overline{\overline{Pd}}}\right| > 1 \Rightarrow \varepsilon > 1$, a cônica possui dois vértices. **Hipérbole.**

Engenharia Civil

Cônicas

Exemplo:

- ✓ Usando a definição de cônica, determine a excentricidade e indique a curva sabendo que esta possui o ponto P(-2/3,1), foco F(2,3) e diretriz y = -4.

Cônicas

Equação geral das Cônicas

A equação geral de segundo grau em duas variáveis dada pela expressão

$$\boxed{ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0}$$

onde os coeficientes a, b e c não são todos nulos, representa uma Cônica.

Cônicas

Logo:

- ❑ Se $ab = 0$, a curva representa uma **Parábola**.
- ❑ Se $ab > 0$, a curva representa uma **Elipse**.
- ❑ Se $ab < 0$, a curva representa uma **Hipérbole**.

Cônicas

Exemplos:

Indique cada uma das cônicas representada pelas seguintes equações:

a) $12x^2 + 6y^2 + 18xy - 60 = 0$

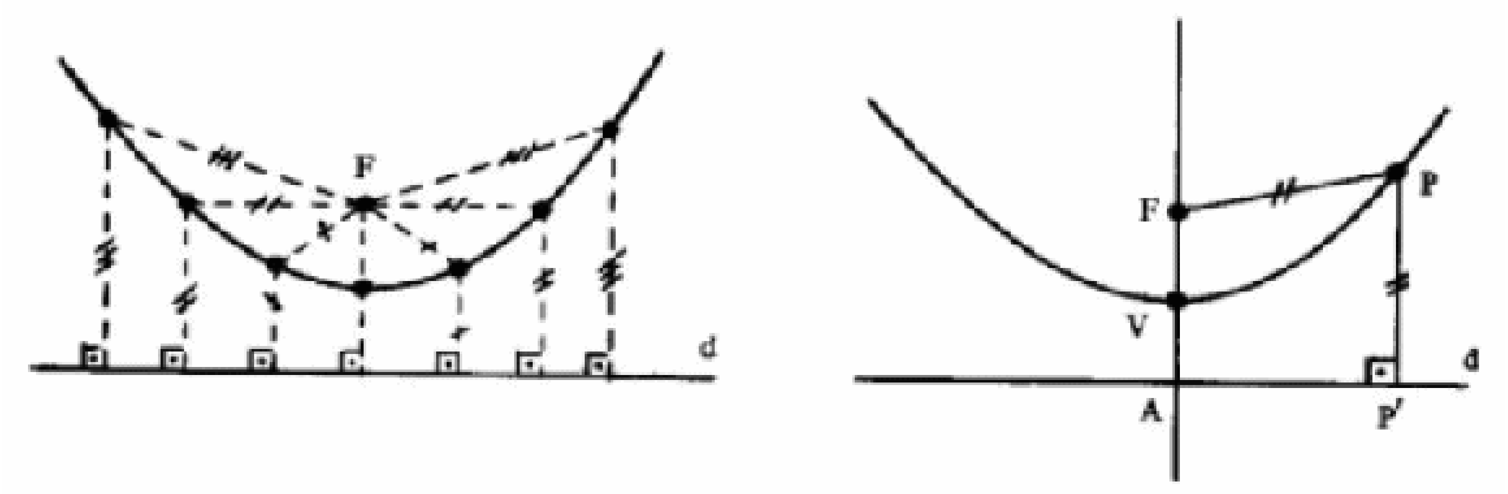
b) $9x^2 + 3y^2 - 18x + 27y - 36 = 0$

c) $y^2 + 4y - 3x = 0$

d) $4y^2 - 12x^2 + 8y - 36x + 72 = 0$

Parábola

Uma parábola pode ser definida como o conjunto dos pontos que são equidistantes de um ponto dado (chamado de **foco**) e de uma reta dada (chamada de **diretriz**). É uma curva plana



Parábola

Portanto:

Se P’ é o pé da perpendicular baixada de um ponto P do plano sobre a reta d, de acordo com a definição, P pertence à parábola se, e somente se:

$$d(P,F) = d(P,P')$$

ou ainda:

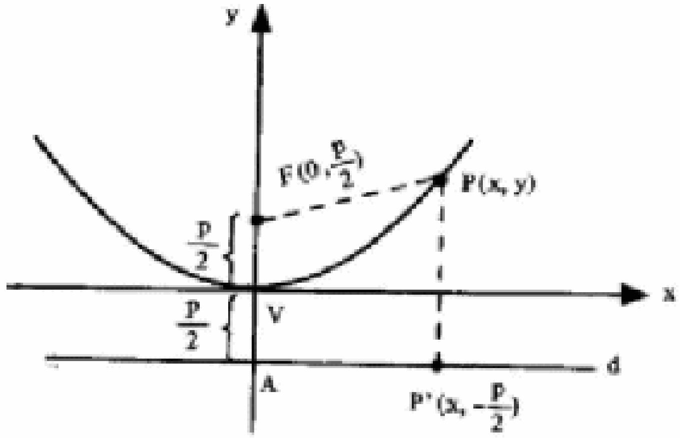
$$\left|\overrightarrow{PF}\right| = \left|\overrightarrow{PP'}\right|$$

Obs.: Consideremos o fato de F não pertence a d, pois, caso contrário, a parábola se degeneraria numa reta.

Parábola

Elementos da Parábola:

P = Um ponto qualquer da parábola;
F = Foco – ponto fixo;
d = Diretriz – reta fixa;
Vértice = ponto V médio entre F e d;
Eixo = é a reta que passa pelo foco, Vértice e é perpendicular à d;



Parâmetro = p – medida algébrica do segmento orientado (distância do foco à diretriz);
Raio Vetor = r Segmento (liga o foco F a um ponto P qualquer da parábola) **=** corda focal mínima.

Parábola

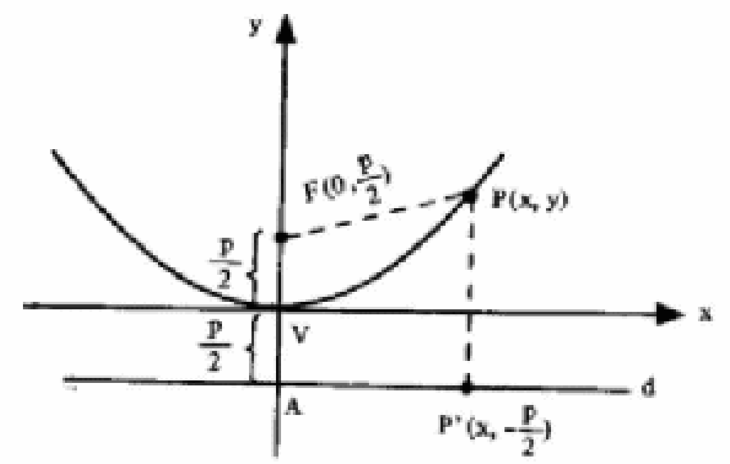
Equação da parábola de vértice na origem do sistema

❖ *O eixo da parábola é o eixo dos y.*

Seja P(x,y) um ponto qualquer da parábola de foco F(0,p/2).

Da definição da parábola, tem-se:

$$\left|\overrightarrow{PF}\right| = \left|\overrightarrow{PP'}\right| \quad \text{ou} \quad \left|\overrightarrow{FP}\right| = \left|\overrightarrow{P'P}\right|$$



Ou Seja: $\boxed{x^2 = 2py}$

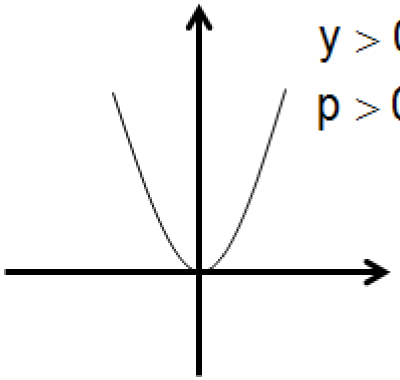
INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

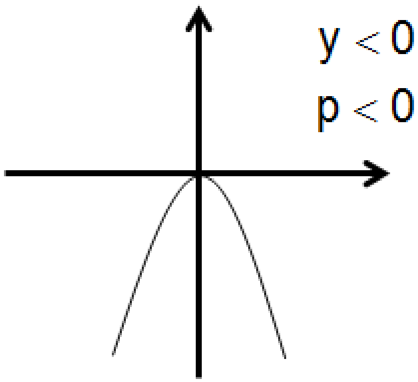
Engenharia Civil

Parábola

Equação da parábola de vértice na origem do sistema

Da análise desta equação conclui-se que, p e y sempre tem o mesmo sinal, pois a multiplicação desses dará sempre positivo já que $x^2 = 2py$. Logo:





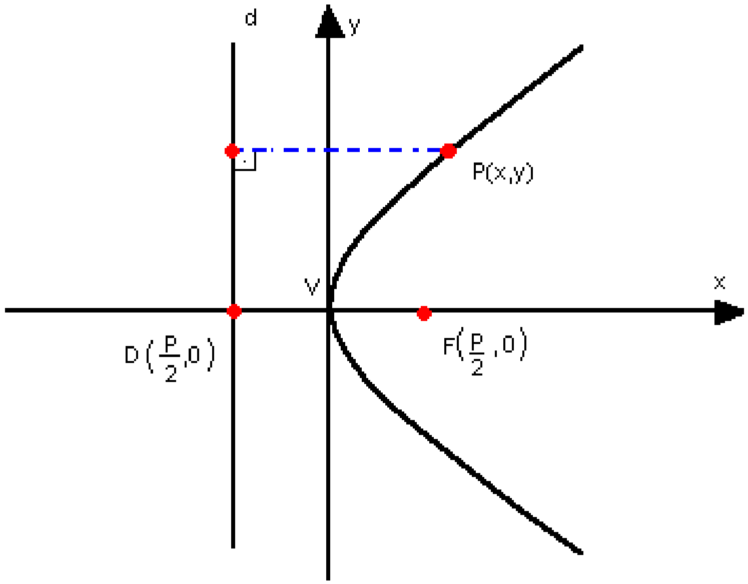
Este número real $p \neq 0$ é conhecido como *parâmetro* da parábola.

Parábola

Equação da parábola de vértice na origem do sistema

❖ *O eixo da parábola é o eixo dos x.*

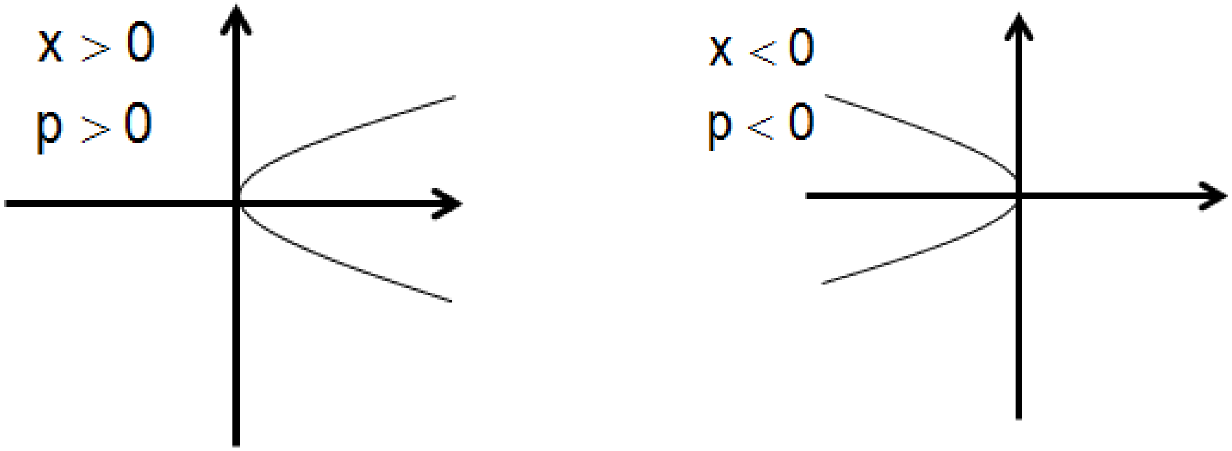
Seja P(x,y) um ponto qualquer da parábola de foco F(p/2,0), obteremos de forma análoga ao caso anterior, a equação reduzida: $\boxed{y^2 = 2px}$



Parábola

Equação da parábola de vértice na origem do sistema

Da análise desta equação conclui-se que, de forma análoga, p e x sempre tem o mesmo sinal. Logo:



Parábola

Exemplos:

- ✓ Determinar o foco e a equação da diretriz das parábolas $x^2 = 8y$ e $y^2 = -2x$. Construir o gráfico.

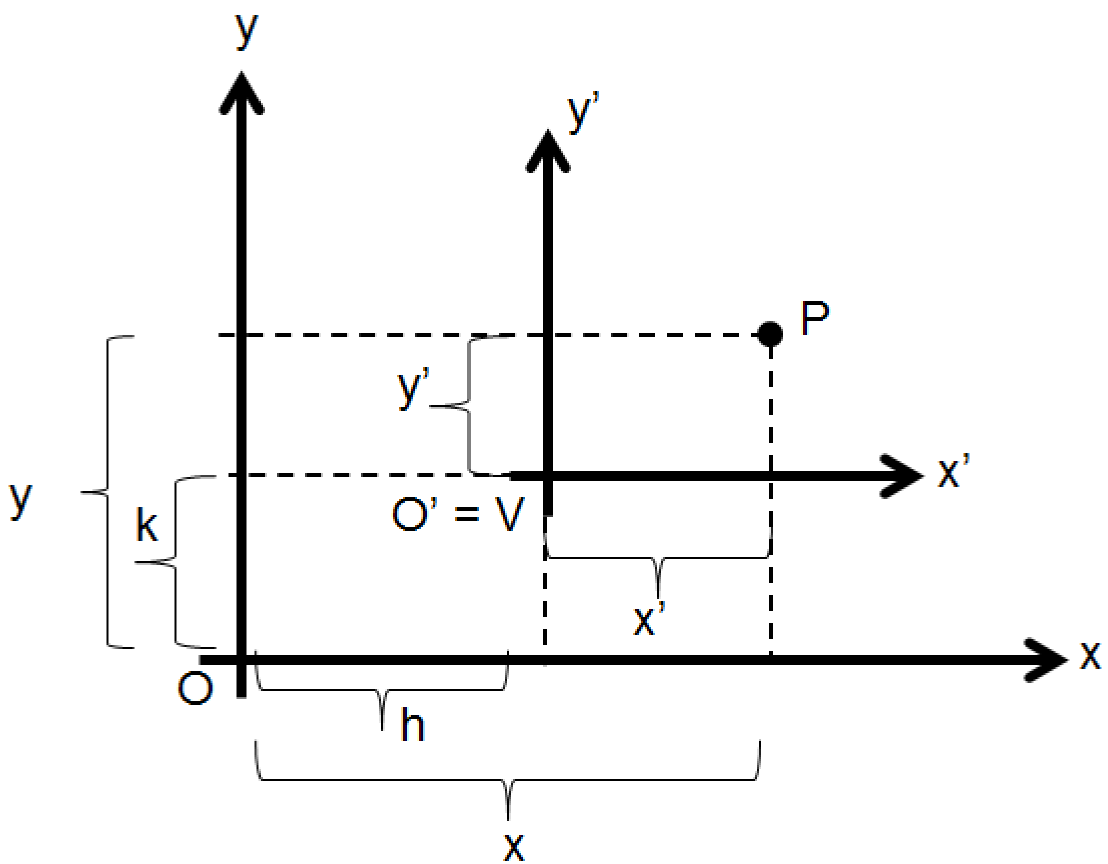
- ✓ Determinar a equação e o gráfico de cada uma das parábolas, sabendo que: a) V(0,0) e F(1,0)

b) V(0,0) e diretriz y = 3. c) V(0,0), passa pelo ponto P(-2,5) e concavidade voltada para cima.

Translação de Eixos

Consideremos no plano cartesiano xOy um ponto O'(h,k), arbitrário. Vamos introduzir um novo sistema x'O'y' tal que os eixos O'x' e O'y' tenham a mesma unidade, a mesma direção e o mesmo sentido dos eixos Ox e Oy. Nessas condições, um sistema pode ser obtido do obtido do outro, através de uma translação de eixos.

Translação de Eixos



Translação de Eixos

Seja um ponto P qualquer do plano tal que suas coordenadas são:

x e y em relação ao sistema xOy.

x' e y' em relação ao sistema x'O'y'

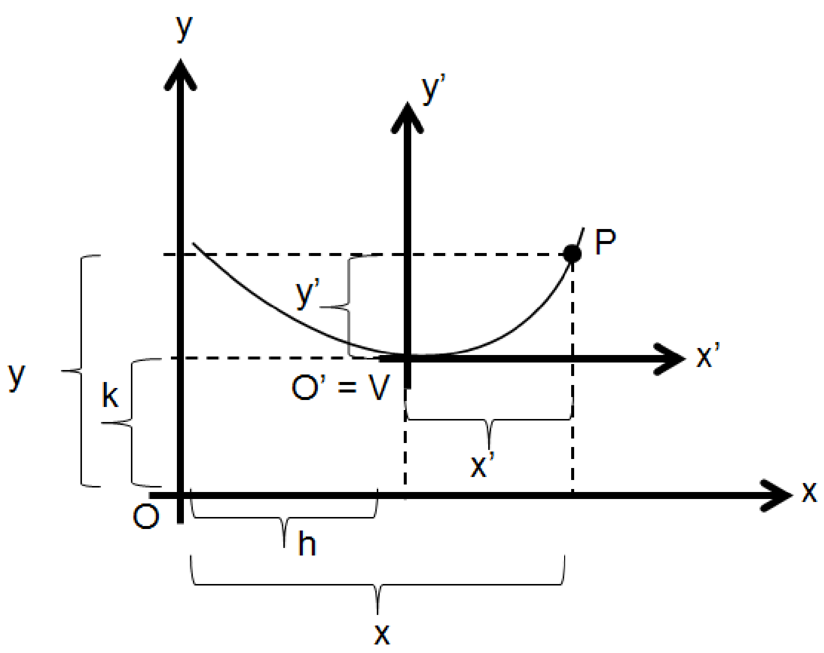
Pela figura, obtém-se:

$$\boxed{\begin{array}{llll} x = x' + h & \text{e} & y = y' + k & \text{ou} \\ x' = x - h & \text{e} & y' = y - k & \end{array}}$$

Equação da parábola fora da origem do Sistema

✓ ***O eixo da parábola é paralelo ao eixo dos y.***

Seja uma parábola de vértice V(h,k) e eixo paralelo ao eixo dos y, sendo h e k coordenadas de V em relação ao sistema xOy.



INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Engenharia Civil

Equação da parábola fora da origem do Sistema

Sabe-se que a equação da parábola referida ao sitema

x’O’y’ é $x'^2 = 2py'$

mas $x' = x - h$ e $y' = y - k$

logo

$$\boxed{(x-h)^2 = 2p(y-k)}$$

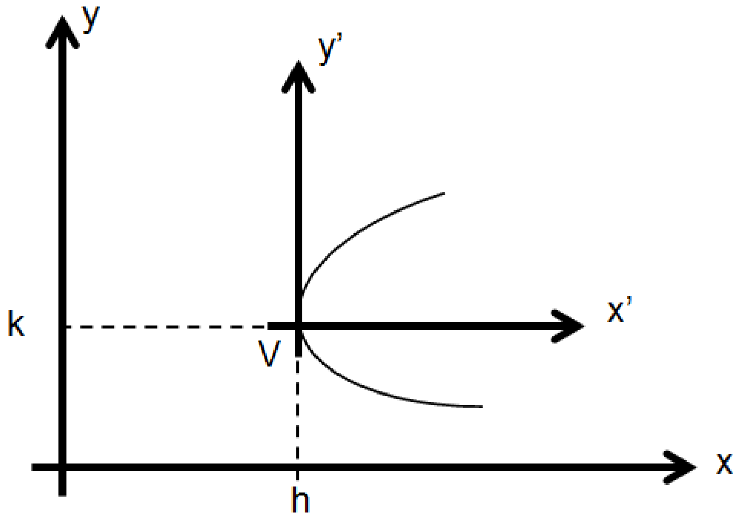
Que é a forma padrão da parábola de vértice V(h,k) e o eixo y.

Equação da parábola fora da origem do Sistema

✓ ***O eixo da parábola é paralelo ao eixo dos x.***

De modo análogo ao caso

Anterior, teremos: $\boxed{(y-k)^2 = 2p(x-h)}$



Obs.: Se (h,k) = (0,0),

voltamos ao caso particular.

Equação da parábola fora da origem do Sistema

Exemplos:

1) Determinar a equação da parábola de vértice V(3,-1), sabendo que y – 1 = 0 é a equação de sua diretriz.

2) Determinar a equação da parábola de foco em F(1,2), sendo x = 5 a equação da diretriz.

3) Determinar o vértice, um esboço do gráfico, o foco e a equação da diretriz da parábola $y^2 + 6y - 8x + 1 = 0$.

Equação da parábola na forma Explícita

Sabemos que a equação de uma parábola de vértice V(h,k) e eixo paralelo ao eixo dos y tem a forma padrão:

$$(x-h)^2 = 2p(y-k)$$

Por exemplo, para V(2,-1) e p = 1/8, teríamos: $(x-2)^2 = \frac{1}{4}(y+1)$

Com o objetivo de explicitar **y** nesta equação, faremos:

$$y = 4x^2 - 16x + 15$$

Equação da parábola na forma Explícita

Ou seja, uma equação na forma padrão $y = ax^2 + bx + c$ é chamada forma explícita da equação da parábola cujo eixo é paralelo ao eixo Oy.

Reciprocamente, dada uma equação na forma explícita, podemos conduzi-la à forma padrão.

Equação da parábola na forma Explícita

De forma análoga temos a equação da parábola paralela ao eixo Ox na forma explícita:

$$x = ay^2 + by + c$$

Exemplo:

Determinar a equação da parábola que passa pelos pontos (0,1), (1,0) e (3,0) e tem concavidade voltada para cima. Esboce o gráfico.