



Engenharia Civil

Elipse

Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.

Consideremos no plano dois pontos distintos, F_1 e F_2 , tal que **$d(F_1, F_2) = 2c$** .

Seja um número real “a” tal que $2a > 2c$.

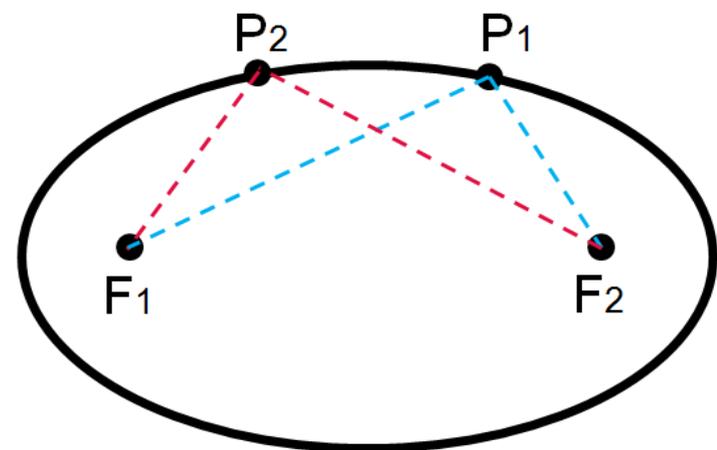
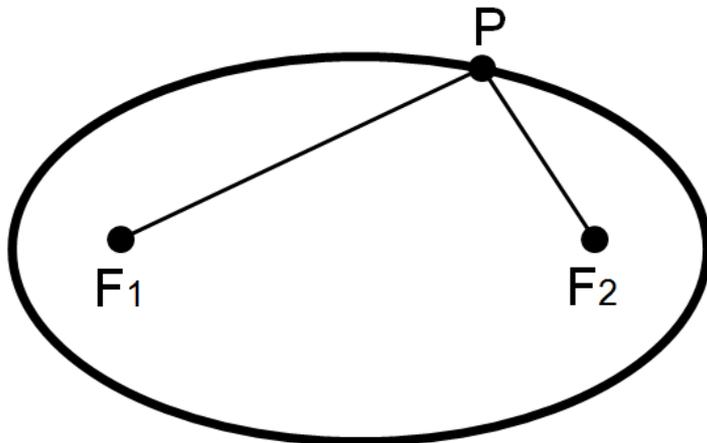


Elipse

Ao conjunto de todos os pontos **P** do plano tais que:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \quad \text{ou} \quad |\overrightarrow{PF_1}| + |\overrightarrow{PF_2}| = 2a$$

dá-se o nome de **Elipse**.





Elipse

Observação: quanto mais F_1 se aproxima de F_2 , mais a forma da Elipse se assemelha à da Circunferência, assim quando $F_1=F_2$ obtém-se uma Circunferência.



Elipse

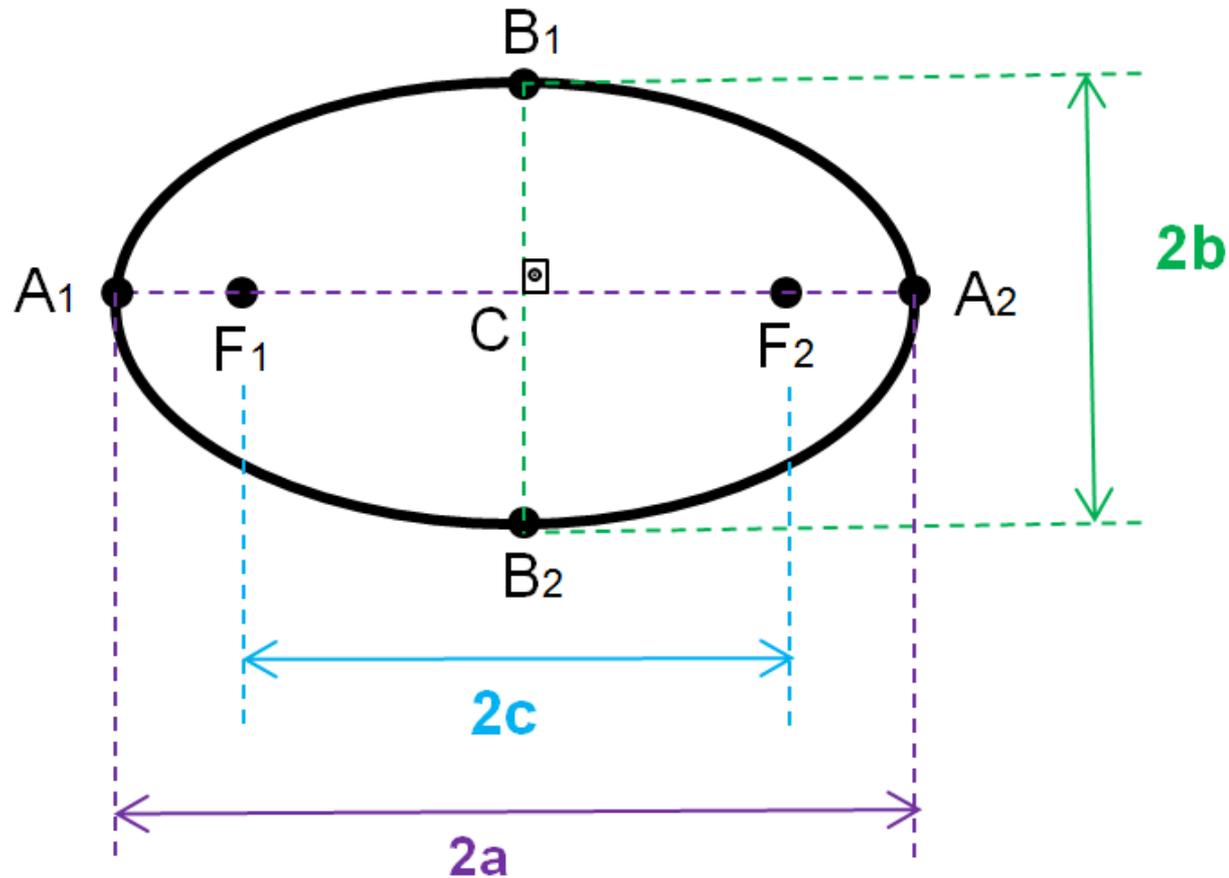
Elementos:

- Focos: são os pontos F_1 e F_2 .
- Distância Focal: é a distância $2c$ entre os focos.
- Centro: é o ponto médio C do segmento F_1F_2 .
- Eixo maior: é o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$.
- Eixo menor: é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$.
- Vértices: são os pontos A_1 , A_2 , B_1 e B_2 .



Engenharia Civil

Elipse





Elipse

- Excentricidade: é o número “e” dado por
$$e = \frac{c}{a}$$

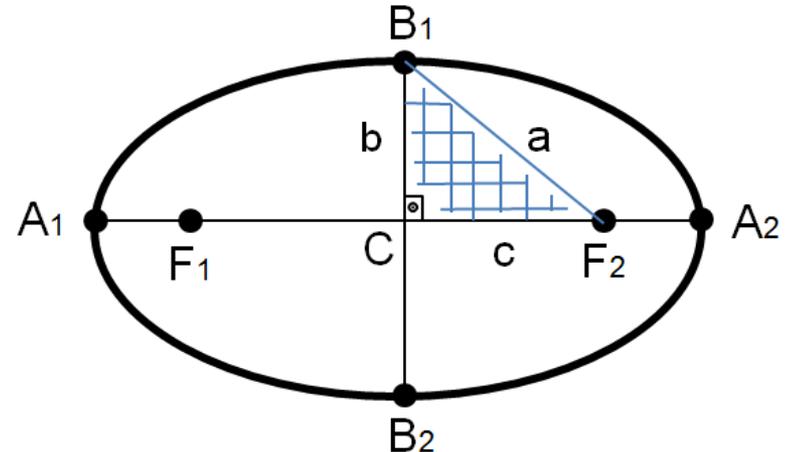
Tendo em vista que $c < a$, tem-se:

$$0 < e < 1.$$

Observação: Em toda a Elipse

vale a relação:

do Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo B_1CF_2 .





Engenharia Civil

Elipse

Equação da Elipse

1) Centro na origem do sistema.

1.1) o eixo maior está sobre o eixo dos x

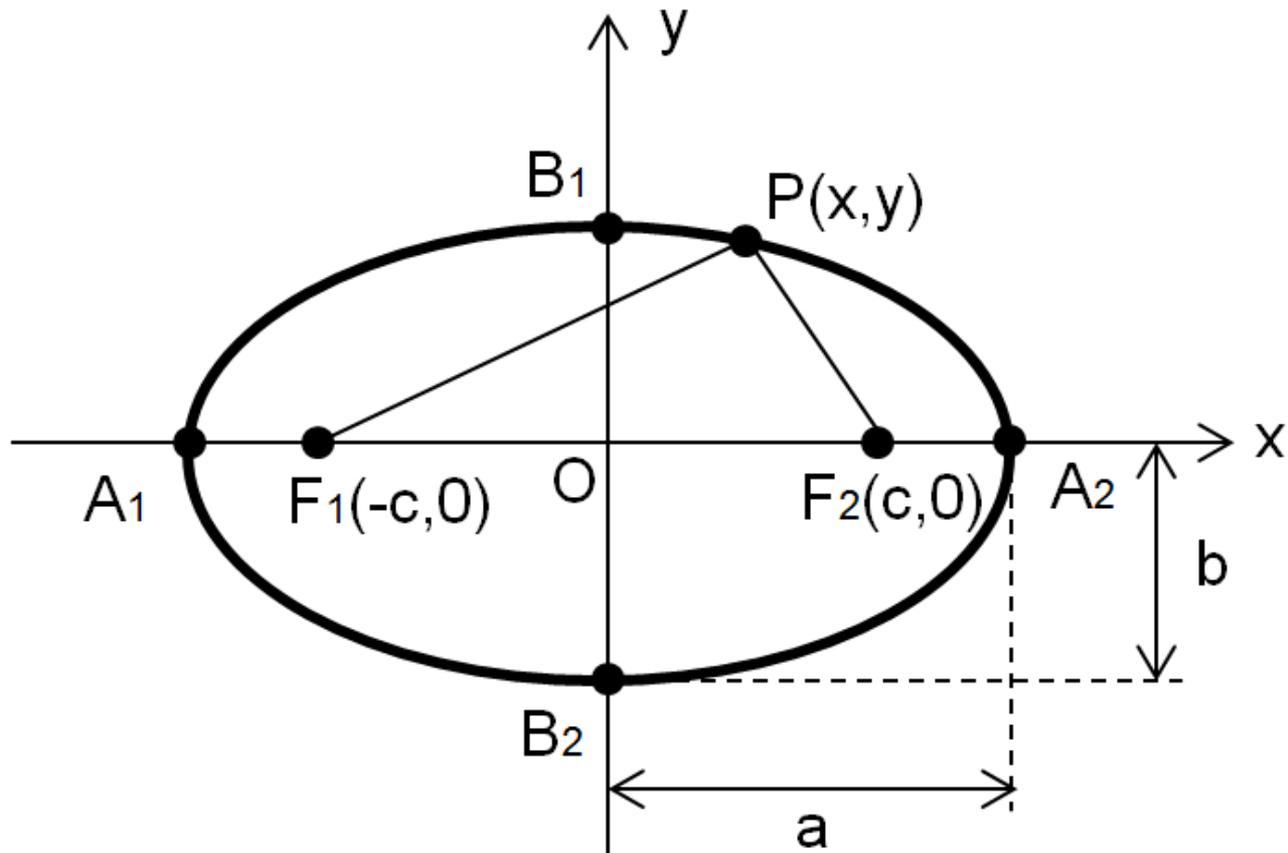
Seja P (x,y) um ponto qualquer de uma elipse de focos

$F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$.

Logo:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Elipse





Engenharia Civil

Elipse

Equação da Elipse

1) Centro na origem do sistema.

1.2) o eixo maior está sobre o eixo dos y

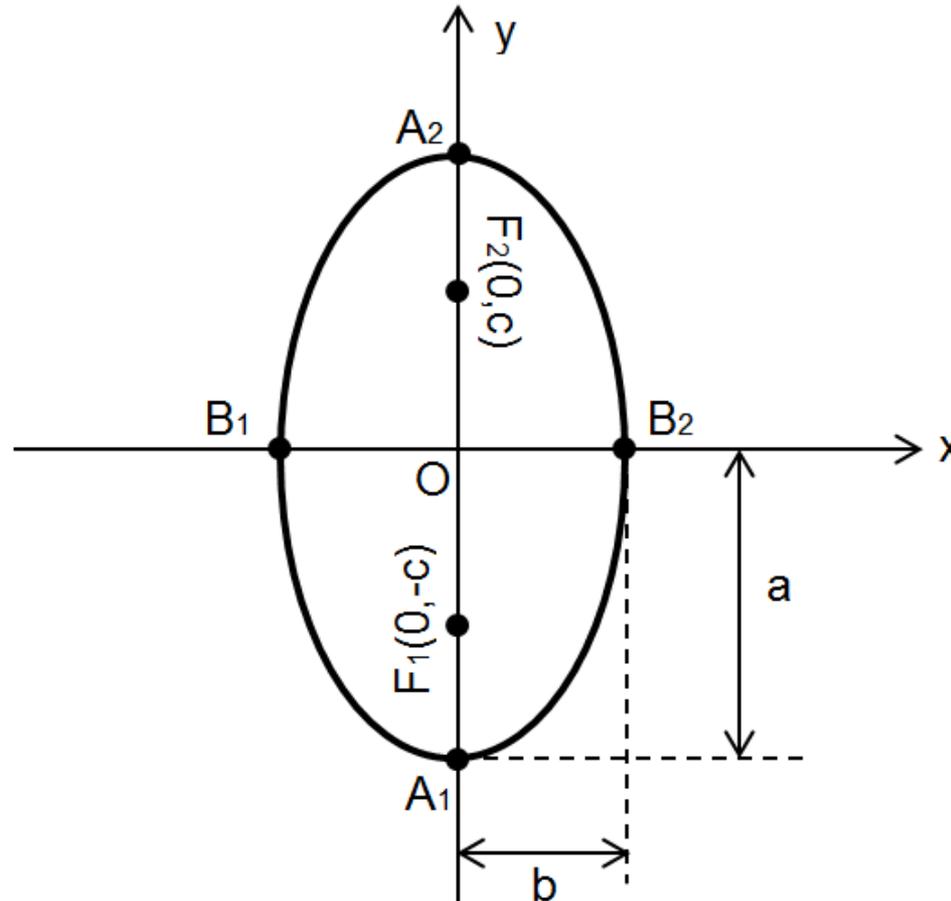
Seja P (x,y) um ponto qualquer de uma elipse de focos

$F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$.

Logo:
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



Elipse





Engenharia Civil

Elipse

Observação:

Tendo em vista $a^2 = b^2 + c^2$, segue que:

$$a^2 > b^2 \text{ e daí } a > b$$

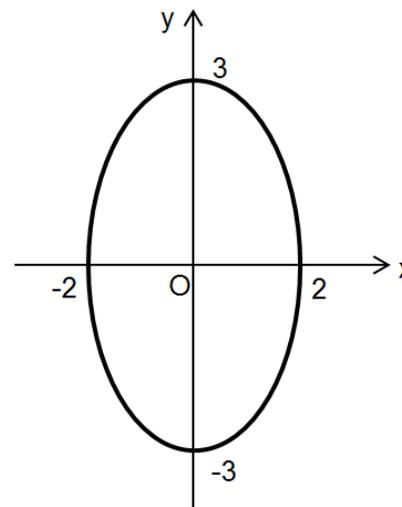
Então, sempre o maior dos denominadores na equação reduzida representa o número a^2 , onde “a” é a medida do semi-eixo maior.



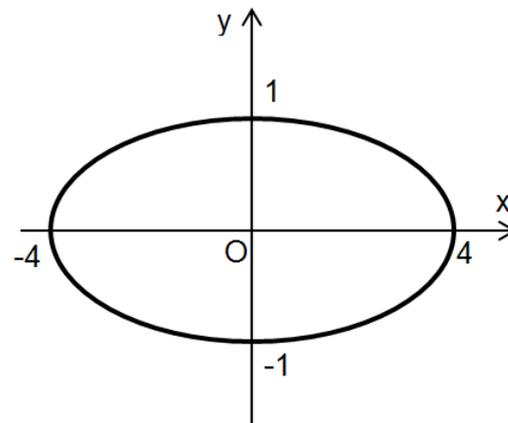
Elipse

Exemplos:

1) A equação reduzida da Elipse ao lado é:



2) A equação reduzida da Elipse ao lado é:





Elipse

Exemplos:

3) Determinar, em cada uma das elipses a seguir, a medida dos semi-eixos, um esboço do gráfico, os focos e a excentricidade.

a) $9x^2 + 25y^2 = 225$

b) $4x^2 + y^2 - 16 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 9 = 0$



Engenharia Civil

Elipse

Equação da Elipse

2) Centro fora da origem do sistema.

2.1) o eixo maior é paralelo ao eixo dos x

Consideremos uma Elipse de centro $C (h,k)$ e seja $P (x,y)$ um ponto qualquer da mesma.

Analogamente ao caso da parábola, quando o vértice não estava no ponto $(0,0)$, aqui ocorre a translação dos eixos e

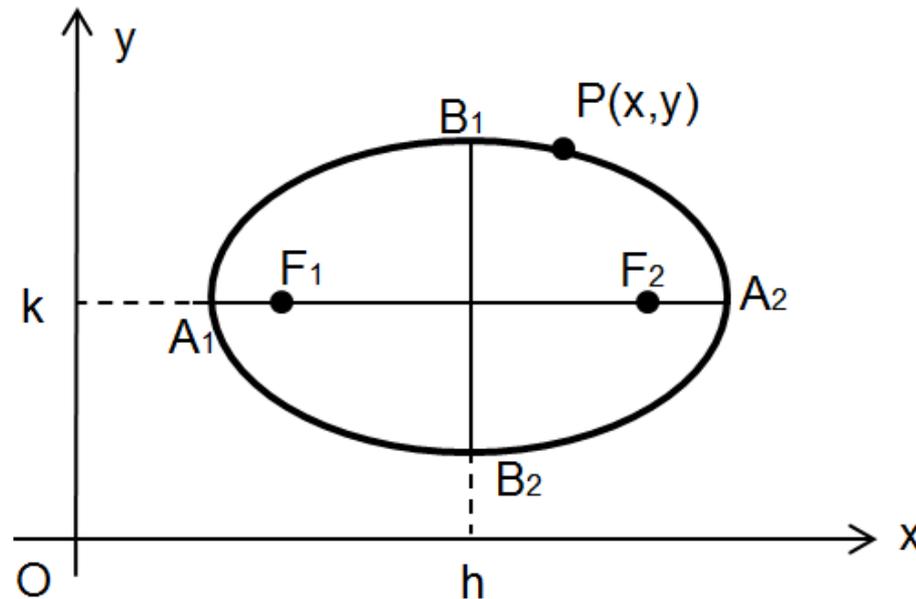
teremos:



Engenharia Civil

Elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$





Elipse

Equação da Elipse

2) Centro fora da origem do sistema.

2.2) o eixo maior é paralelo ao eixo dos y

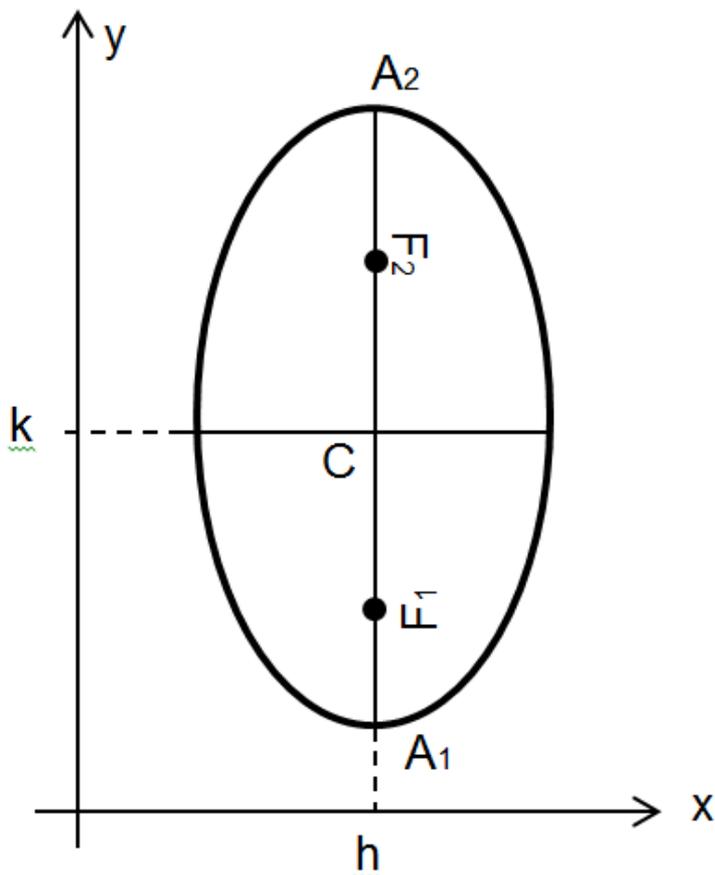
Consideremos uma Elipse de centro $C (h,k)$ e seja $P (x,y)$ um ponto qualquer da mesma.

De forma análoga **teremos:**



Engenharia Civil

Elipse



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$
$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



Elipse

Exemplos:

a) Uma elipse, cujo eixo maior é paralelo ao eixo dos y , tem centro $C (4, -2)$, excentricidade $e = 1/2$ e o eixo menor de medida 6. Qual a equação desta Elipse?

b) Determinar o centro, os vértices, os focos e a excentricidade da elipse de equação: $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$