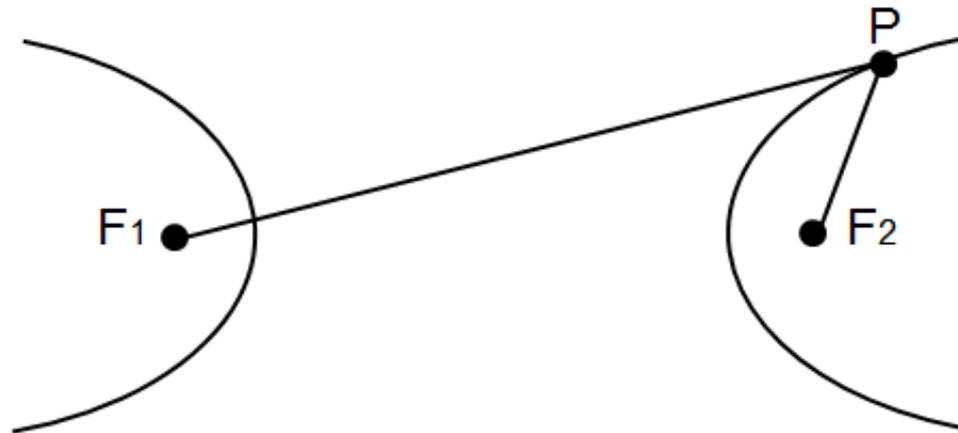




## Hipérbole

Ao conjunto de todos os pontos **P** do plano tais que:

$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$  ou  $||\overrightarrow{PF_1}| - |\overrightarrow{PF_2}|| = 2a$   
dá-se o nome de **Hipérbole**.





## Hipérbole

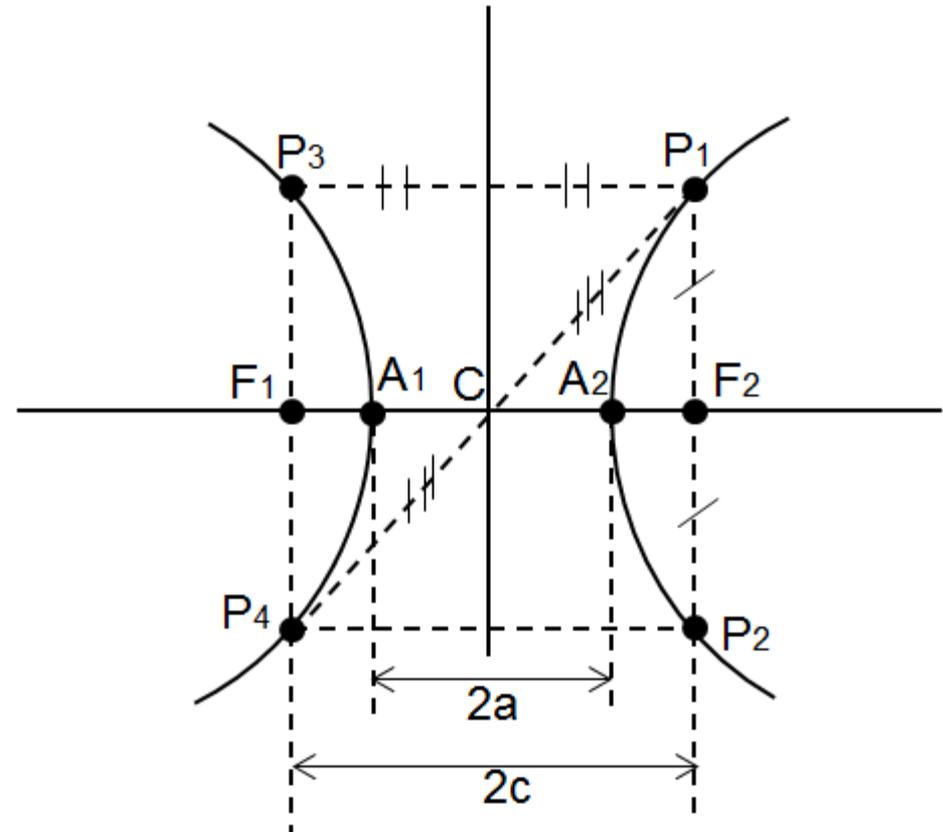
**Observação:** Como se vê, a hipérbole é uma curva com dois ramos. Na verdade, pela equação anterior um ponto P está na hipérbole se, e somente se:  $d(P,F_1) - d(P,F_2) = \pm 2a$

Quando P estiver no ramo da **direita**, a diferença é **+ 2a** e, em caso **contrário**, será **- 2a**.



## Hipérbole

Consideremos a reta que passa por  $F_1$  e  $F_2$  e sejam  $A_1$  e  $A_2$  os pontos de intersecção da hipérbole com esta reta. Consideremos outra reta perpendicular a esta passando pelo ponto médio  $C$  do segmento  $F_1F_2$ .





## Hipérbole

A hipérbole é uma curva simétrica em relação a estas duas retas, como também em relação ao ponto C. Se  $P_1$  é um ponto da hipérbole, existem os pontos  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  tais que:  $P_2$  é o ponto simétrico de  $P_1$  em relação a horizontal,  $P_3$  é o simétrico de  $P_1$  em relação a horizontal,  $P_4$  é o simétrico de  $P_1$  em relação à reta vertical,  $P_4$  é o simétrico de  $P_1$  em relação ao ponto C. Assim, pela simetria temos:

**$d(A1, F1) = d(A2, F2)$**  e da própria definição, vem

$$**$d(A1, A2) = 2a.$**$$



## Hipérbole

### Elementos:

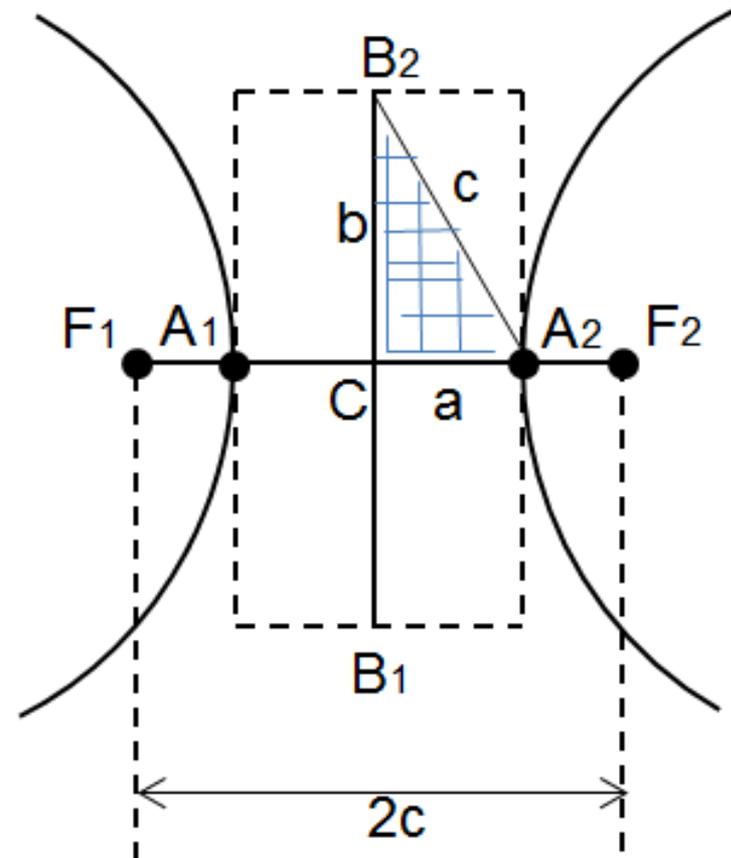
- **Focos:** são os pontos  $F_1$  e  $F_2$  .
- **Distância Focal:** é a distância  $2c$  entre os focos.
- **Centro:** é o ponto médio  $C$  do segmento  $F_1F_2$ .
- **Eixo real ou transversal:** é o segmento  $A_1A_2$  de comprimento  $2a$ .
- **Eixo imaginário ou conjugado:** é o segmento  $B_1B_2$  de comprimento  $2b$ .
- **Vértices:** são os pontos  $A_1$  e  $A_2$ .



## Hipérbole

Na hipérbole também vale o Teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2$$





## Hipérbole

● Excentricidade: é o número “e” dado por 
$$e = \frac{c}{a}$$

Tendo em vista que  $a < c$ , tem-se:  $e > 1$ .

A excentricidade da hipérbole está intimamente relacionada com sua abertura. Pode-se observar facilmente pela figura que, quanto menor o valor de “a” com o mesmo valor de “c”, o valor da excentricidade aumenta e conseqüentemente a abertura da hipérbole será maior.



## Hipérbole

### Assíntotas

Assíntotas são retas das quais a hipérbole se aproxima cada vez mais à medida que os pontos se afastam dos focos.

A tendência da hipérbole é tangenciar suas assíntotas no infinito.

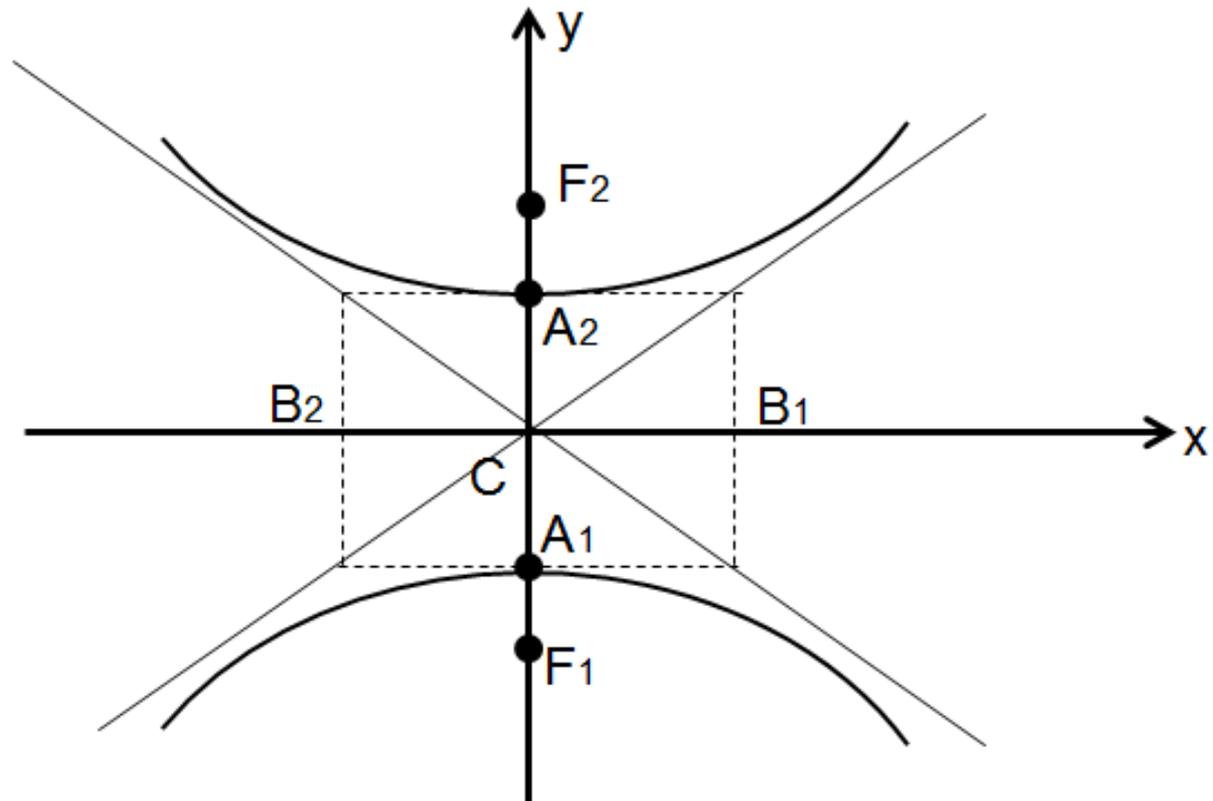
Essas auxiliam no esboço do gráfico.

Como essas passam pela origem do sistema (0,0) a suas equações tem a forma  $y_1 = m_1x$  e  $y_2 = -m_2x$ , onde  $m_1$  e  $m_2$  são os coeficientes angular das retas.



## Hipérbole

**Assíntotas**





## Hipérbole

### Equação da Hipérbole

#### 1) Centro na origem do sistema.

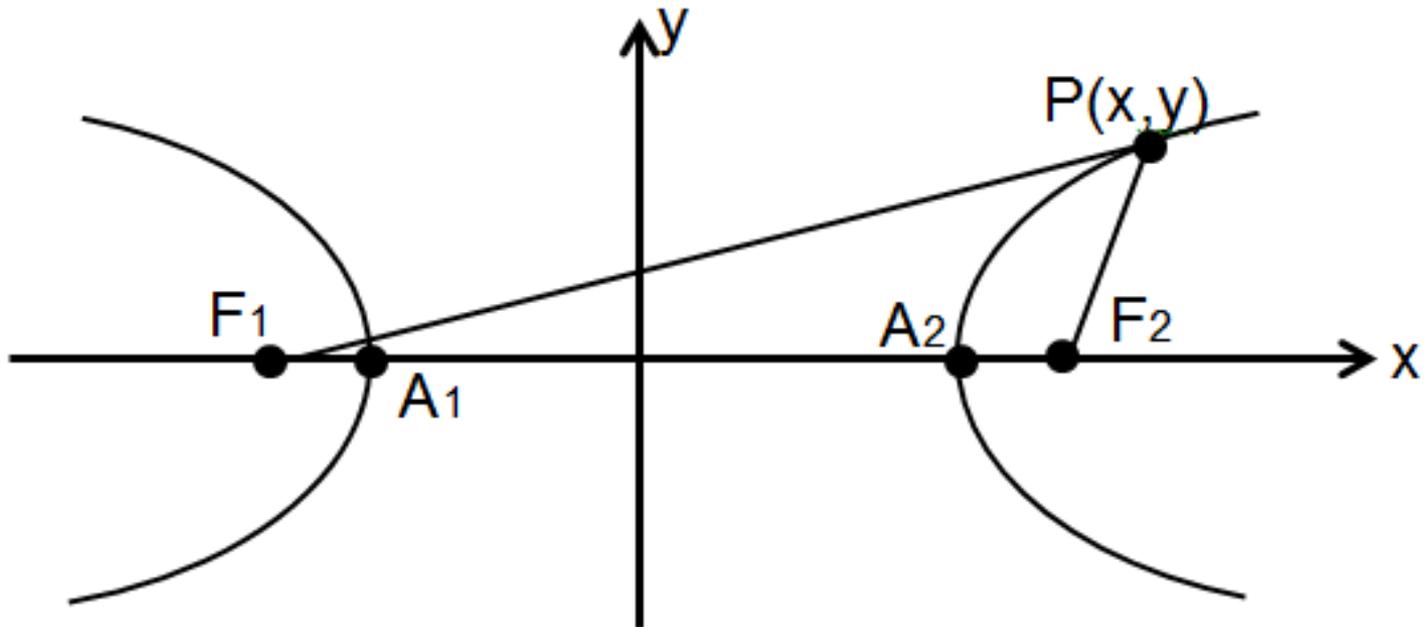
##### *1.1) o eixo real está sobre o eixo dos x*

Seja P (x,y) um ponto qualquer de uma hipérbole de focos  $F_1(-c,0)$  e  $F_2(c,0)$ .

Logo: 
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



## Hipérbole





## Hipérbole

### Equação da Hipérbole

1) Centro na origem do sistema.

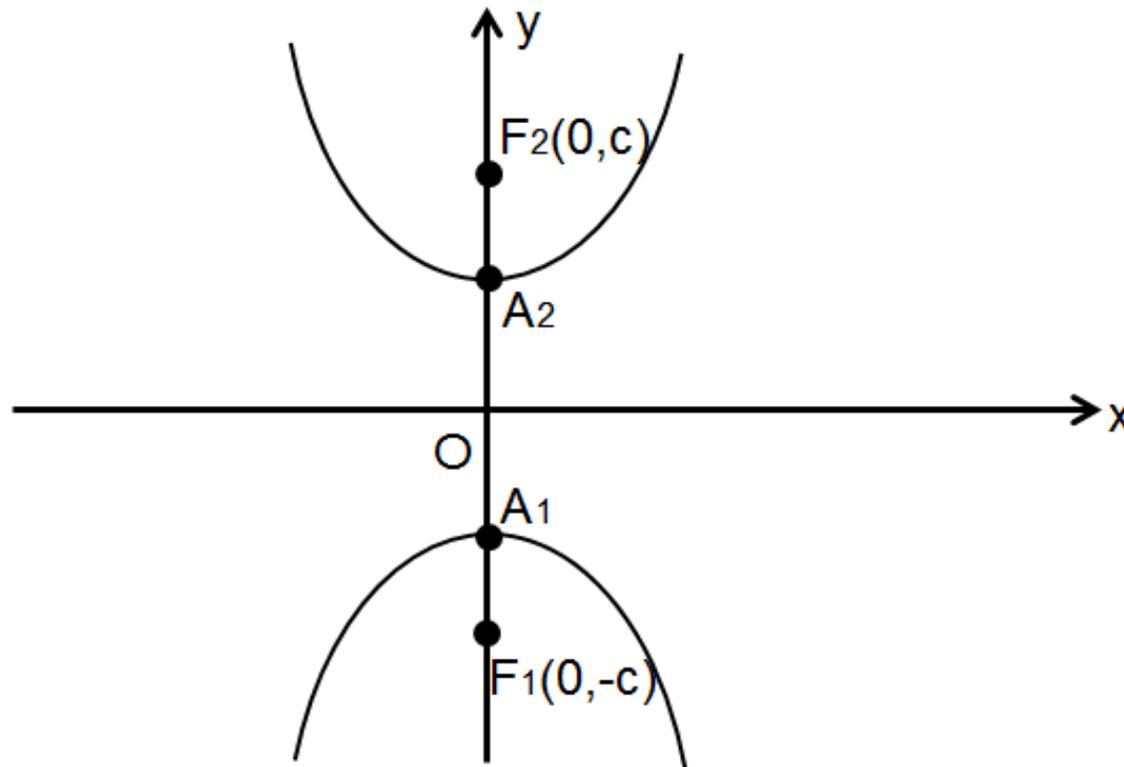
**1.2) o eixo real está sobre o eixo dos y**

Seja P (x,y) um ponto qualquer de uma hipérbole de focos  $F_1(0,-c)$  e  $F_2(0,c)$ .

Logo: 
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



## Hipérbole

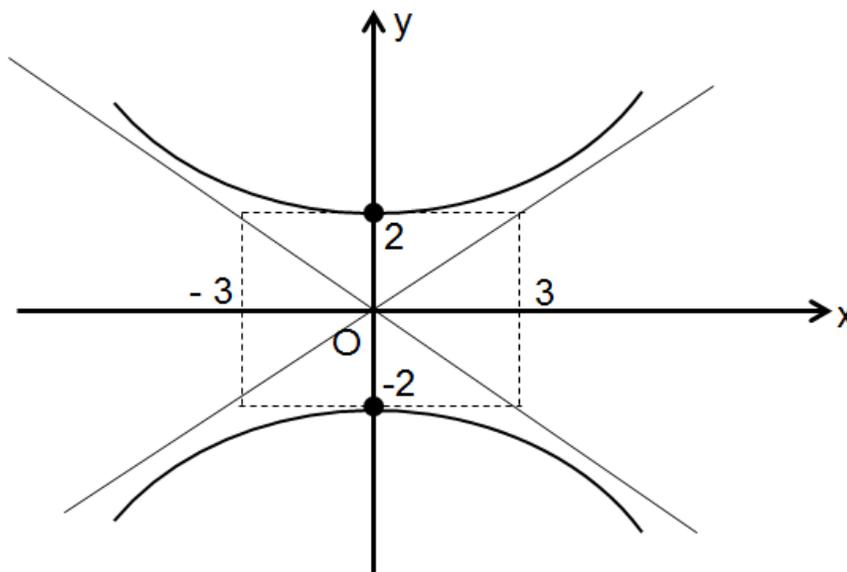




## Hipérbole

### Exemplos:

1) Encontre a equação reduzida, os vértices e as assíntotas da Hipérbole a seguir.

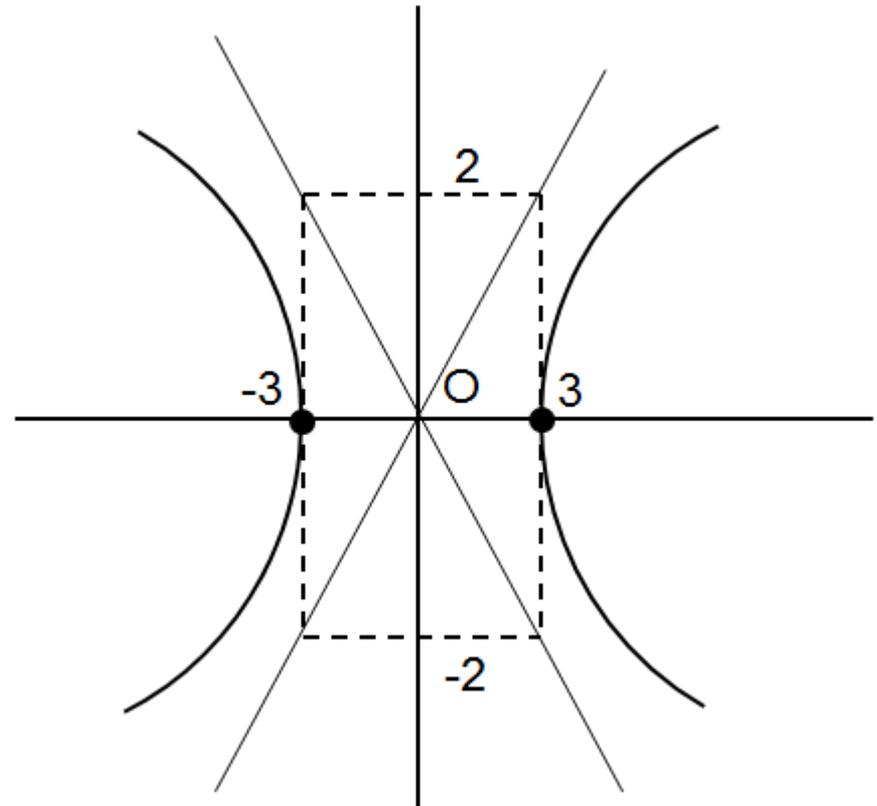




## Hipérbole

### Exemplos:

2) Encontre a equação reduzida, os vértices e as assíntotas da Hipérbole ao lado.





## Hipérbole

### Exemplos:

Nos problemas a seguir, determine, para cada uma das hipérbolas:

- a) A medida dos semi-eixos
- b) Um esboço do gráfico
- c) Os vértices                      d) os focos                      e) a excentricidade
- f) As equações das assíntotas



## Hipérbole

### Exemplos:

$$3) 9x^2 - 7y^2 - 63 = 0$$

$$4) x^2 - 4y^2 + 16 = 0$$

$$5) x^2 - y^2 = 4$$

6) Uma hipérbole tem focos em  $(-5,0)$  e  $(5,0)$  e a medida do eixo real é igual a 6. Determine a equação e o esboço do gráfico.



## Hipérbole

### Equação da Hipérbole

#### 2) Centro Fora da Origem do Sistema.

##### *2.1) o eixo real é paralelo ao eixo dos x*

Consideramos uma hipérbole de centro  $C(h,k)$  e seja

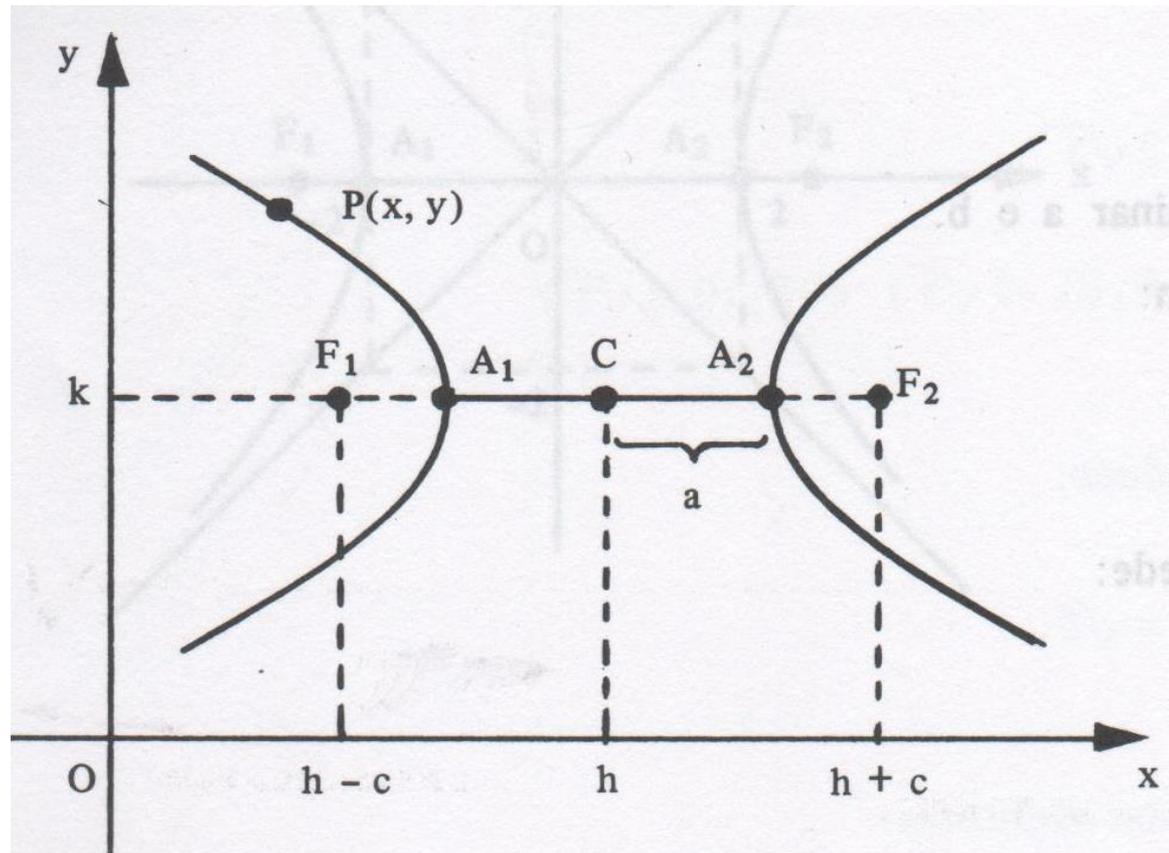
$P(x,y)$  um ponto qualquer da mesma.

Logo: 
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



## Hipérbole

### Equação da Hipérbole





## Hipérbole

### Equação da Hipérbole

#### 2) Centro Fora da Origem do Sistema.

**2.2) o eixo real é paralelo ao eixo dos  $y$**

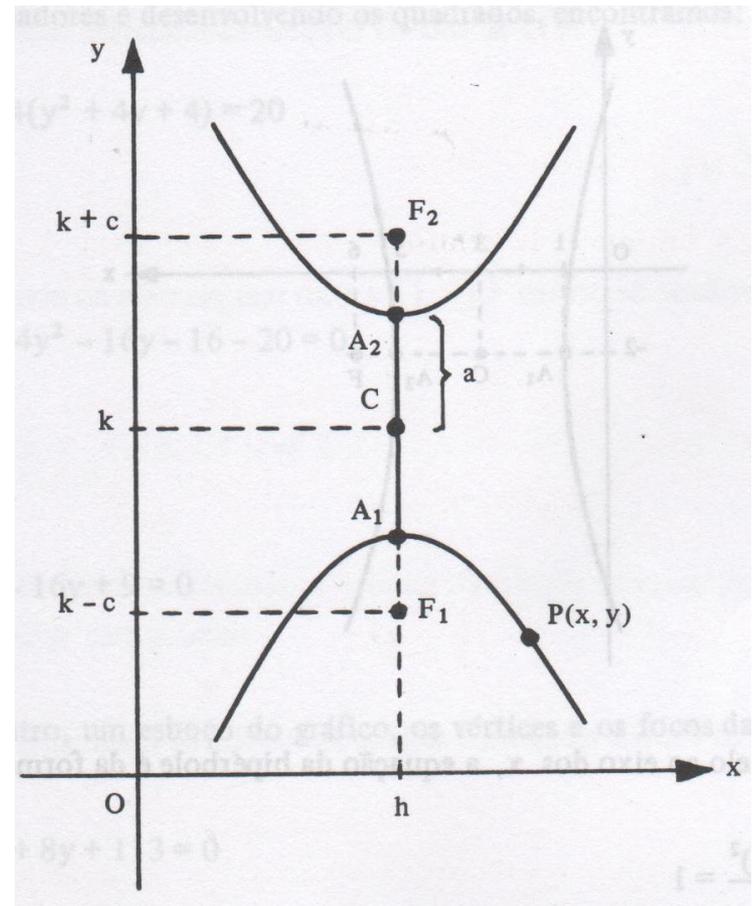
De forma análoga, temos:

Logo: 
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



## Hipérbole

### Equação da Hipérbole





## Hipérbole

### Exemplos:

- 1) Determinar a equação de hipérbole de vértices  $A_1(1,-2)$  e  $A_2(5,-2)$ , sabendo que  $F(6,-2)$  é um de seus focos.
- 2) Determinar o centro, um esboço do gráfico, os vértices e os focos da hipérbole de equação:  $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$
- 3) Obter a equação reduzida resultante de uma translação de eixos, classificar, dar os elementos e esboçar o gráfico da equação:  $7x^2 - 9y^2 + 28x + 54y - 116 = 0$ .