INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Limites e Continuidade

Ementa

- Definição e propriedades de limite;
- Teorema do confronto;
- Limites fundamentais;
- Limites envolvendo infinito;
- Assíntotas;
- Continuidade de funções reais;
- Teorema do valor intermediário.

Ideia Intuitiva

Exemplo: Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2-2}{x-1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado esquerdo:

x	f(x)

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2-2}{x-1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado esquerdo:

x	f(x)
0,8	

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2-2}{x-1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado esquerdo:

x	f(x)
0,8	3,6

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2 - 2}{x - 1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado esquerdo:

x	f(x)
0,8	3,6
0,9	

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2 - 2}{x - 1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado esquerdo:

x	f(x)
0,8	3,6
0,9	3,8

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2 - 2}{x - 1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado esquerdo:

x	f(x)
0,8	3,6
0,9	3,8
0,98	

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2 - 2}{x - 1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado esquerdo:

x	f(x)
0,8	3,6
0,9	3,8
0,98	3,96

INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2 - 2}{x - 1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado esquerdo:

x	f(x)
0,8	3,6
0,9	3,8
0,98	3,96
0,99	

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2 - 2}{x - 1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado esquerdo:

x	f(x)
0,8	3,6
0,9	3,8
0,98	3,96
0,99	3,98

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2 - 2}{x - 1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado esquerdo:

x	f(x)
0,8	3,6
0,9	3,8
0,98	3,96
0,99	3,98
0,999	

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2 - 2}{x - 1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado esquerdo:

x	f(x)
0,8	3,6
0,9	3,8
0,98	3,96
0,99	3,98
0,999	3,998

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2-2}{x-1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado esquerdo:

x	f(x)
0,8	3,6
0,9	3,8
0,98	3,96
0,99	3,98
0,999	3,998
0,9999	

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2-2}{x-1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado esquerdo:

x	f(x)
0,8	3,6
0,9	3,8
0,98	3,96
0,99	3,98
0,999	3,998
0,9999	3,9998

Assim:

$$\boxed{\lim_{x \to 1^-} f(x) = 4}$$

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2-2}{x-1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado direito:

x	f(x)

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2 - 2}{x - 1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado direito:

x	f(x)
1,2	

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2 - 2}{x - 1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado direito:

x	**f(x)**
1,2	4,4

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2 - 2}{x - 1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado direito:

x	f(x)
1,2	4,4
1,1	

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2 - 2}{x - 1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado direito:

x	f(x)
1,2	4,4
1,1	4,2

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2-2}{x-1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado direito:

x	f(x)
1,2	4,4
1,1	4,2
1,02	

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2-2}{x-1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado direito:

x	f(x)
1,2	4,4
1,1	4,2
1,02	4,04

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2 - 2}{x - 1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado direito:

x	f(x)
1,2	4,4
1,1	4,2
1,02	4,04
1,01	

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2 - 2}{x - 1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado direito:

x	f(x)
1,2	4,4
1,1	4,2
1,02	4,04
1,01	4,02

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2-2}{x-1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado direito:

x	f(x)
1,2	4,4
1,1	4,2
1,02	4,04
1,01	4,02
1,001	

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2 - 2}{x - 1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado direito:

x	f(x)
1,2	4,4
1,1	4,2
1,02	4,04
1,01	4,02
1,001	4,002

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2 - 2}{x - 1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado direito:

x	f(x)
1,2	4,4
1,1	4,2
1,02	4,04
1,01	4,02
1,001	4,002
1,0001	

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2-2}{x-1}$.

O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Pelo lado direito:

x	f(x)
1,2	4,4
1,1	4,2
1,02	4,04
1,01	4,02
1,001	4,002
1,0001	4,0002

Assim:

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} f(x) = 4}$$

Ideia Intuitiva

Seja a função f(x) = $\dfrac{2x^2-2}{x-1}$.

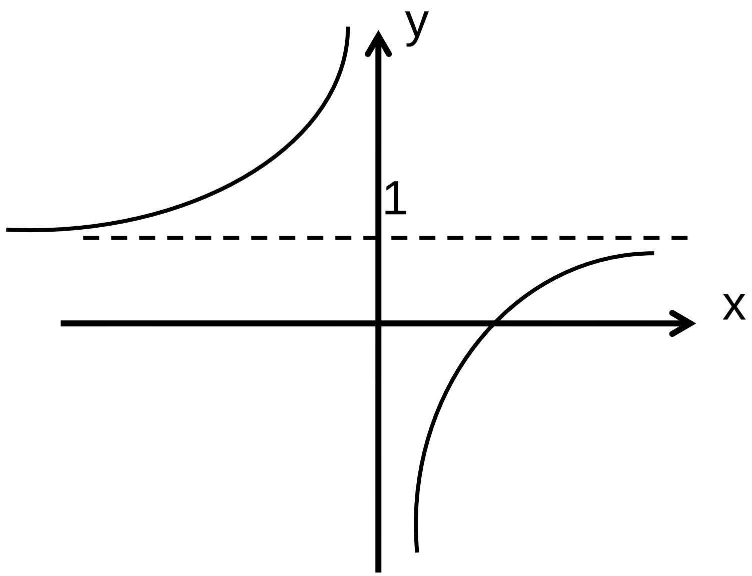
O que ocorre em torno (próximo) de x = 1?

Logo:

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} f(x) = 4 \;\; e \;\; \lim_{x\to 1^+} f(x) = 4 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 4}$$

Ideia Intuitiva

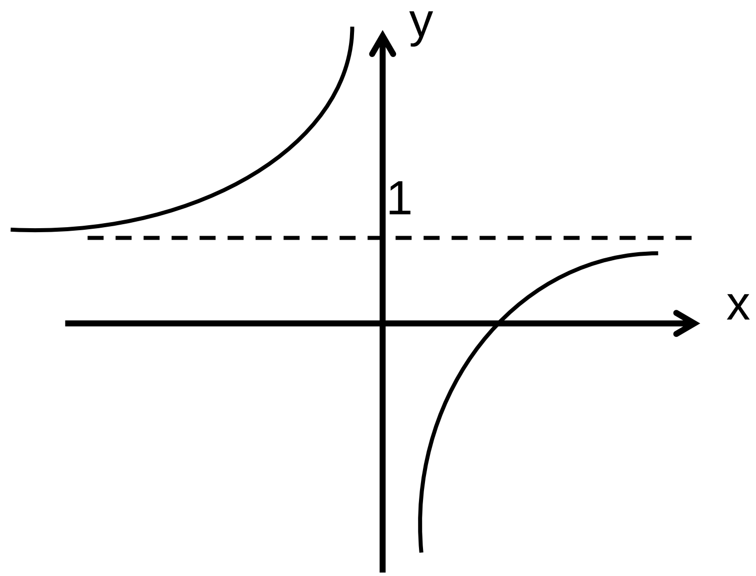
Exemplo: Observando o gráfico da função $y = 1 - \dfrac{1}{x}$.



x	f(x)
1	

Ideia Intuitiva

Exemplo: Observando o gráfico da função $y = 1 - \dfrac{1}{x}$.

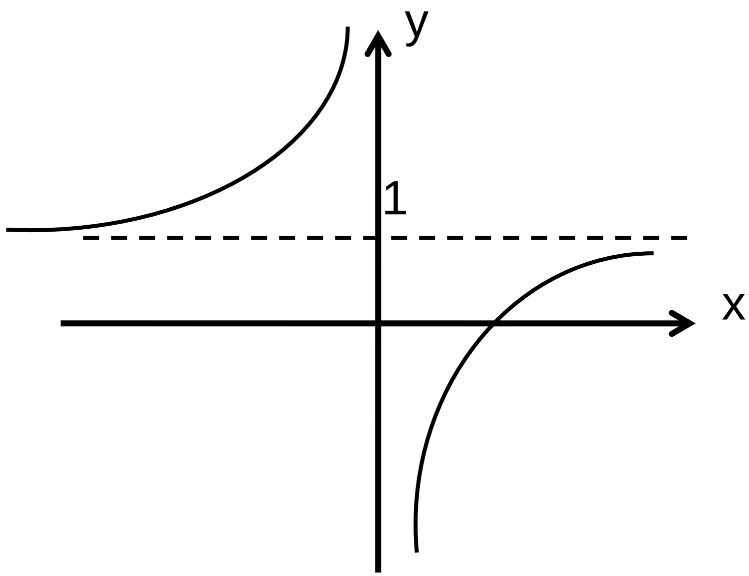


x	f(x)
1	0

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Ideia Intuitiva

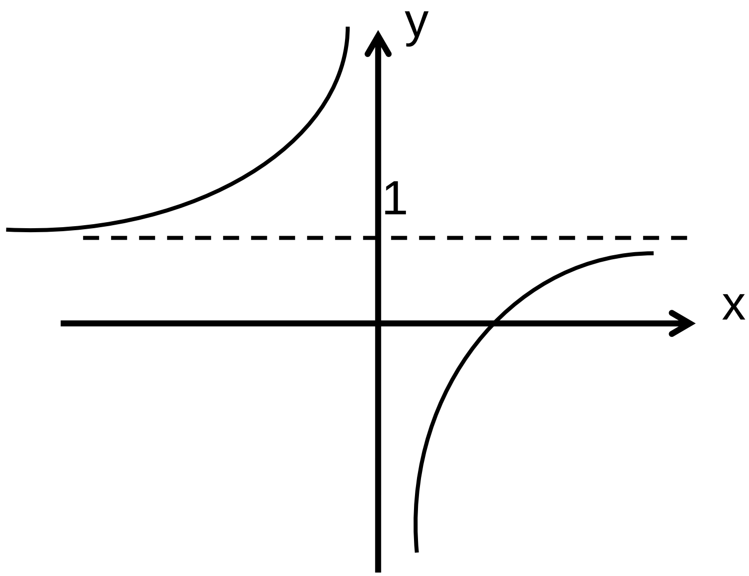
Exemplo: Observando o gráfico da função $y = 1 - \dfrac{1}{x}$.



x	f(x)
1	0
2	

Ideia Intuitiva

Exemplo: Observando o gráfico da função $y = 1 - \dfrac{1}{x}$.

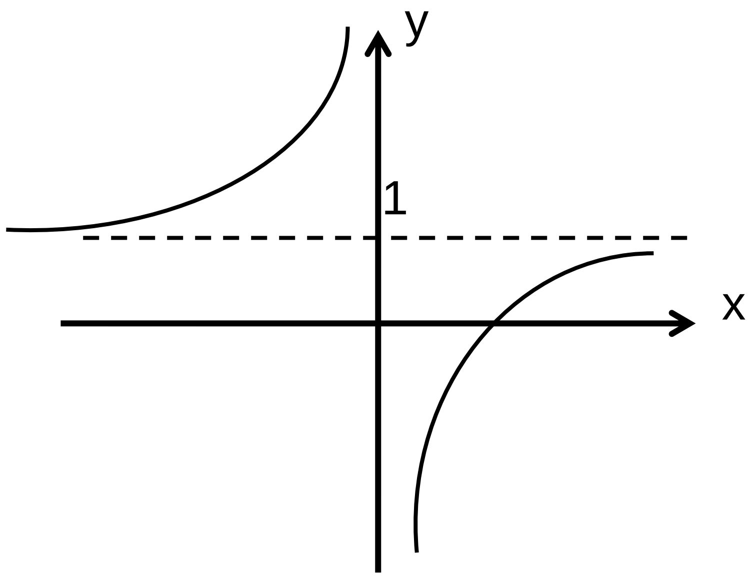


x	f(x)
1	0
2	1/2

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Ideia Intuitiva

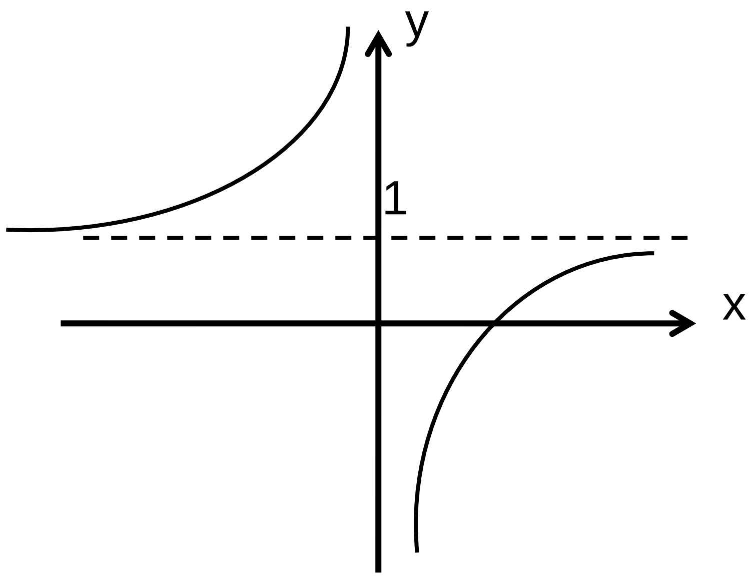
Exemplo: Observando o gráfico da função $y = 1 - \dfrac{1}{x}$.



x	f(x)
1	0
2	1/2

Ideia Intuitiva

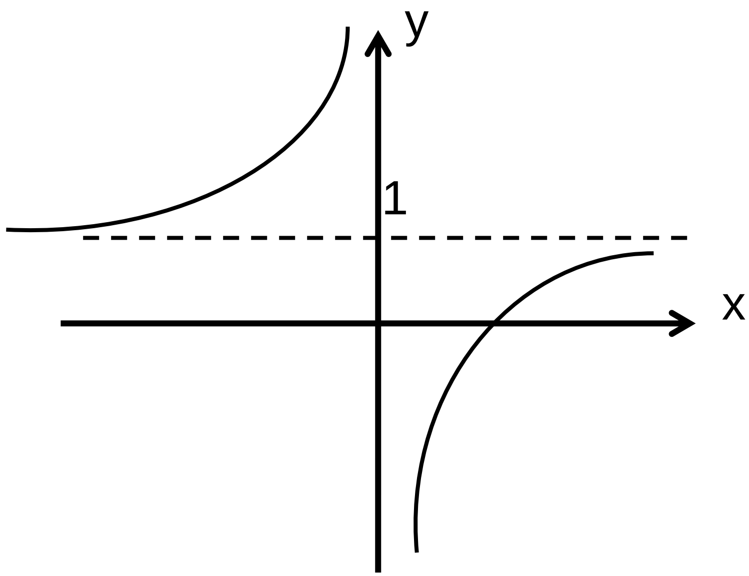
Exemplo: Observando o gráfico da função $y = 1 - \dfrac{1}{x}$.



x	f(x)
1	0
2	1/2
3	

Ideia Intuitiva

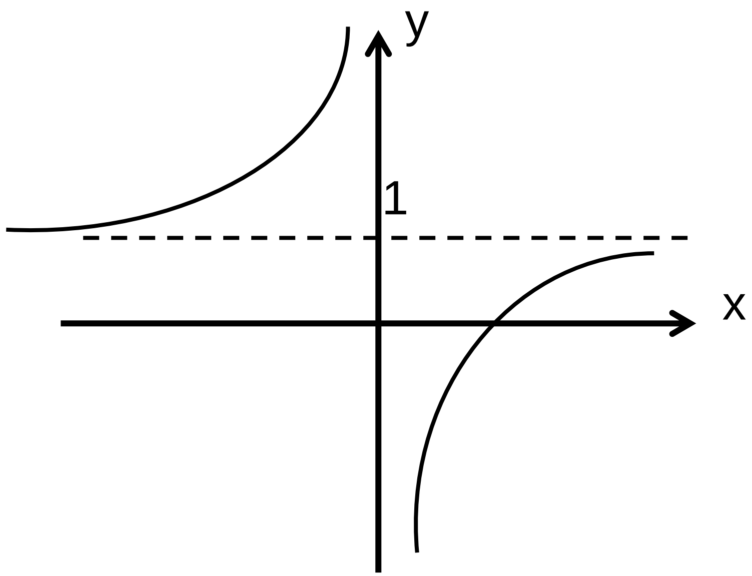
Exemplo: Observando o gráfico da função $y = 1 - \frac{1}{x}$.



x	f(x)
1	0
2	1/2
3	2/3

Ideia Intuitiva

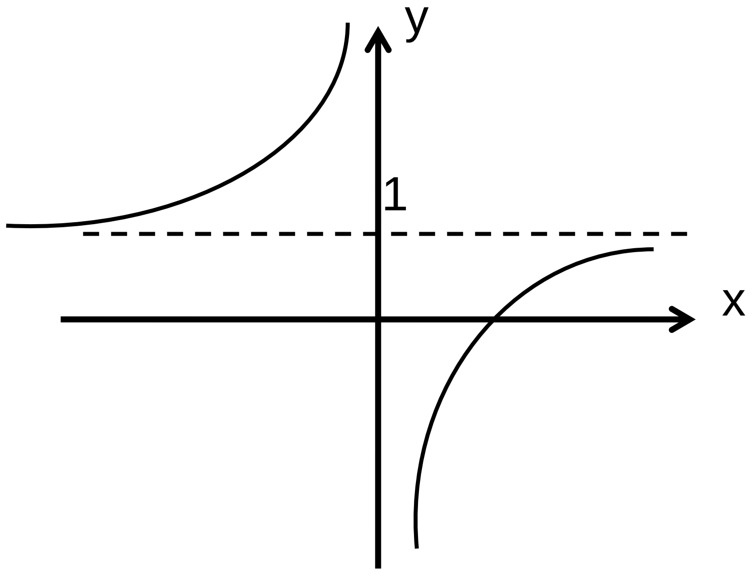
Exemplo: Observando o gráfico da função $y = 1 - \dfrac{1}{x}$.



x	f(x)
1	0
2	1/2
3	2/3
4	

Ideia Intuitiva

Exemplo: Observando o gráfico da função $y = 1 - \frac{1}{x}$.



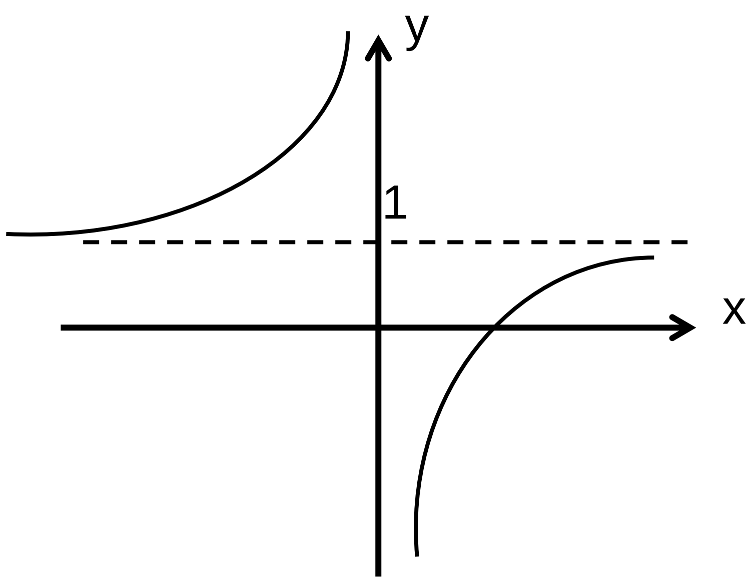
x	f(x)
1	0
2	1/2
3	2/3
4	3/4

Assim:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1}$$

Ideia Intuitiva

Exemplo: Observando o gráfico da função $y = 1 - \dfrac{1}{x}$.

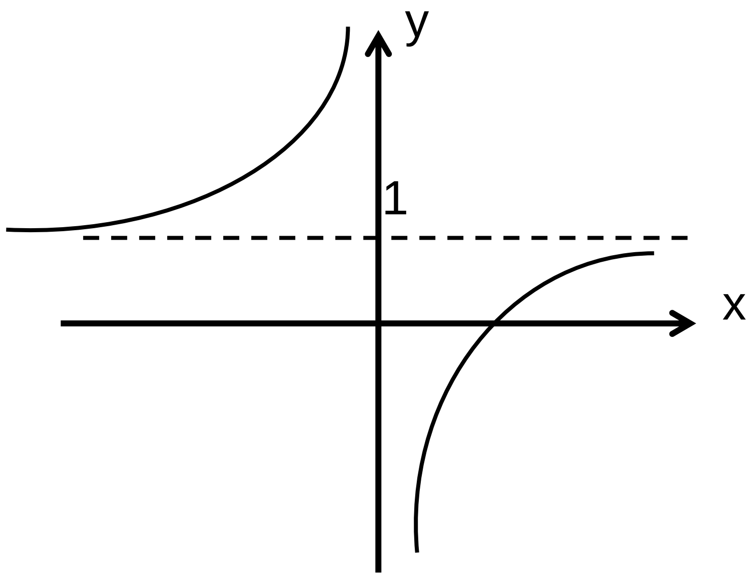


x	f(x)
-1	

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Ideia Intuitiva

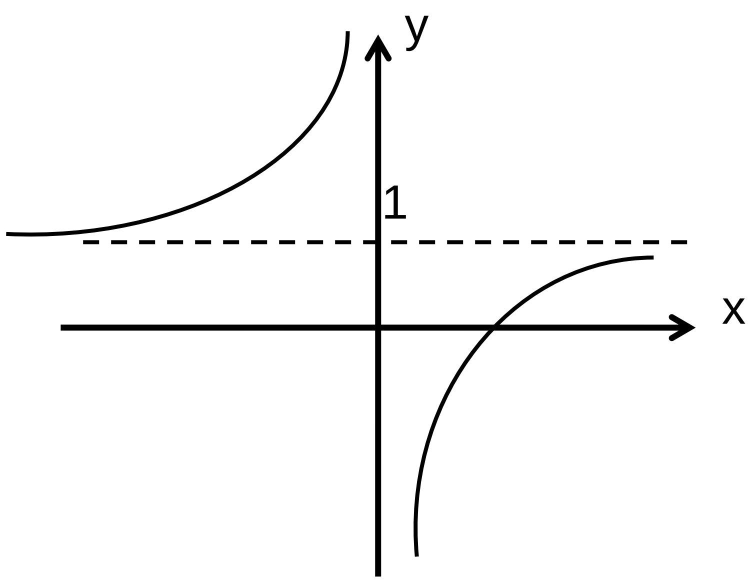
Exemplo: Observando o gráfico da função $y = 1 - \dfrac{1}{x}$.



x	f(x)
-1	2

Ideia Intuitiva

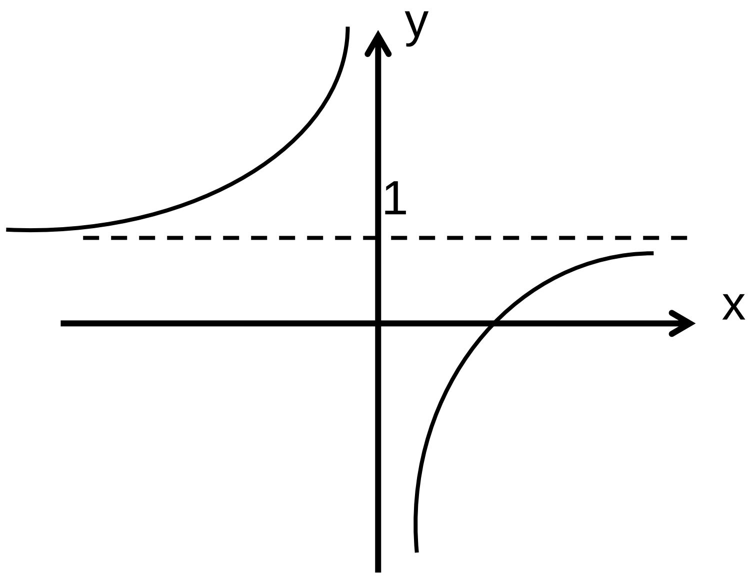
Exemplo: Observando o gráfico da função $y = 1 - \dfrac{1}{x}$.



x	f(x)
-1	2
-2	

Ideia Intuitiva

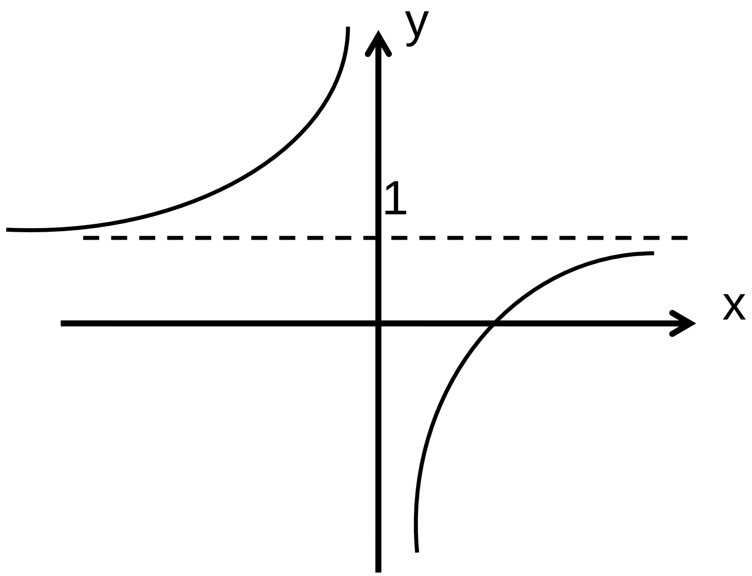
Exemplo: Observando o gráfico da função $y = 1 - \dfrac{1}{x}$.



x	f(x)
-1	2
-2	3/2

Ideia Intuitiva

Exemplo: Observando o gráfico da função $y = 1 - \dfrac{1}{x}$.

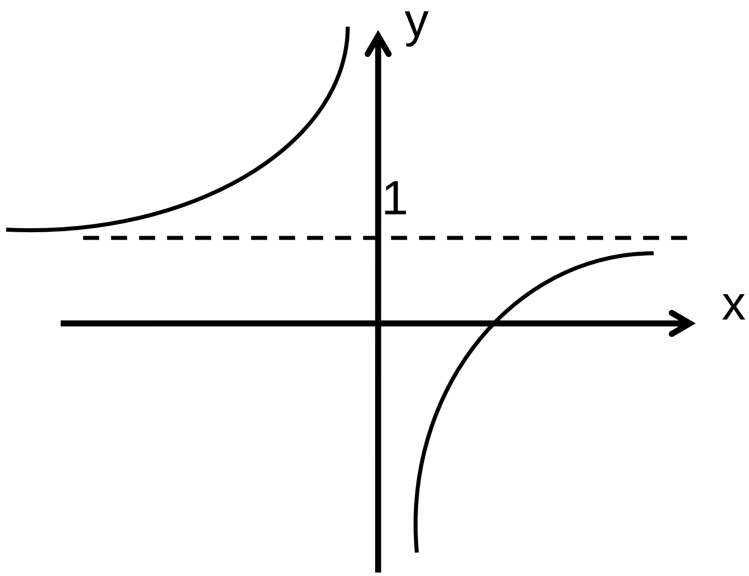


x	f(x)
-1	2
-2	3/2
-3	

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Ideia Intuitiva

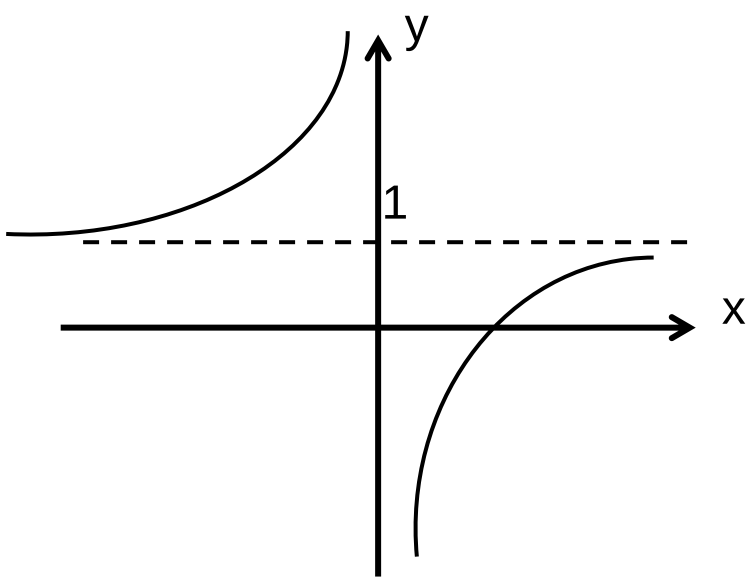
Exemplo: Observando o gráfico da função $y = 1 - \dfrac{1}{x}$.



x	f(x)
-1	2
-2	3/2
-3	4/3

Ideia Intuitiva

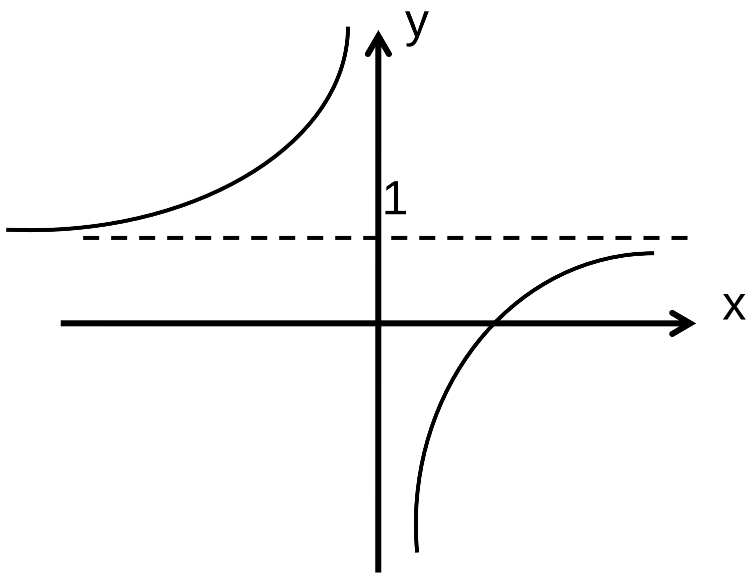
Exemplo: Observando o gráfico da função $y = 1 - \dfrac{1}{x}$.



x	f(x)
-1	2
-2	3/2
-3	4/3
-4	

Ideia Intuitiva

Exemplo: Observando o gráfico da função $y = 1 - \dfrac{1}{x}$.

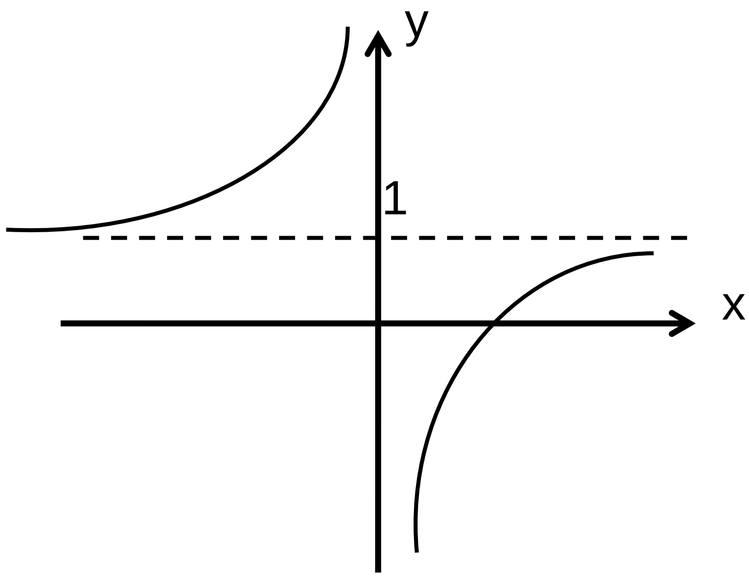


x	f(x)
-1	2
-2	3/2
-3	4/3
-4	5/4

Assim: $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1}$

Ideia Intuitiva

Exemplo: Observando o gráfico da função $y = 1 - \dfrac{1}{x}$.



x	f(x)
-1	2
-2	3/2
-3	4/3
-4	5/4

Assim: $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1}$

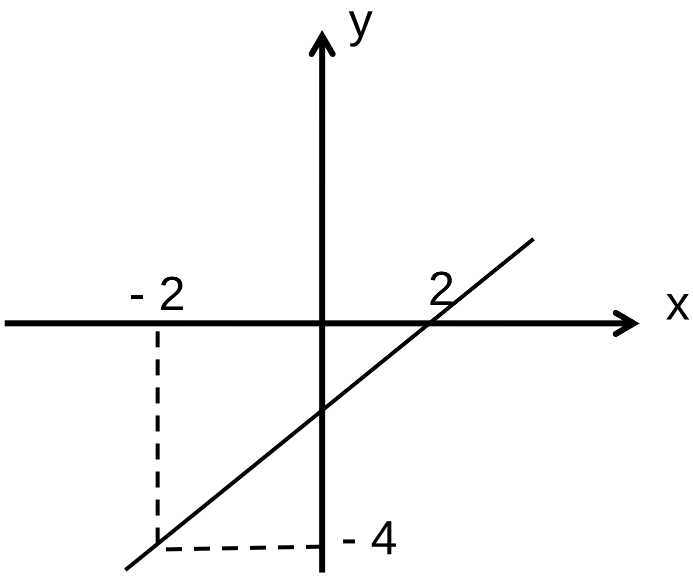
Denota-se: $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1}$

Ideia Intuitiva

Exemplo: A função $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ quando $x \to -2$, $y \to -4$

D = {x ϵ R / x ≠ - 2}

.

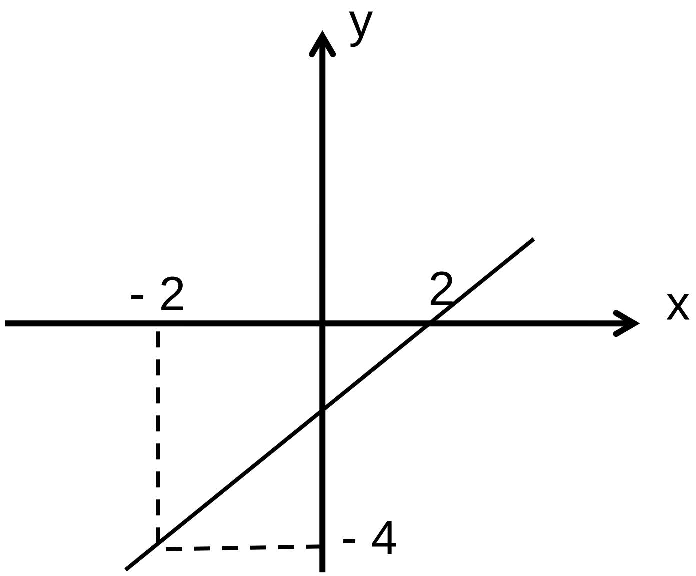


$$y = \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x+2).(x-2)}{x + 2} = x - 2$$

$$y = x - 2$$

Ideia Intuitiva

Exemplo: A função $y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ quando $x \to -2$, $y \to -4$.



D = {x ϵ R / x ≠ - 2}

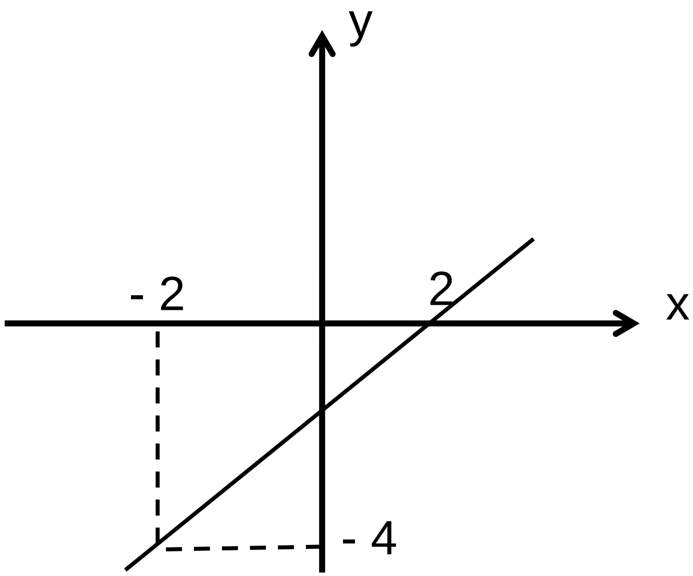
x	f(x)
0	

x	f(x)
-3	

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Ideia Intuitiva

Exemplo: A função $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ quando $x \to -2$, $y \to -4$.



D = {x ϵ R / x ≠ - 2}

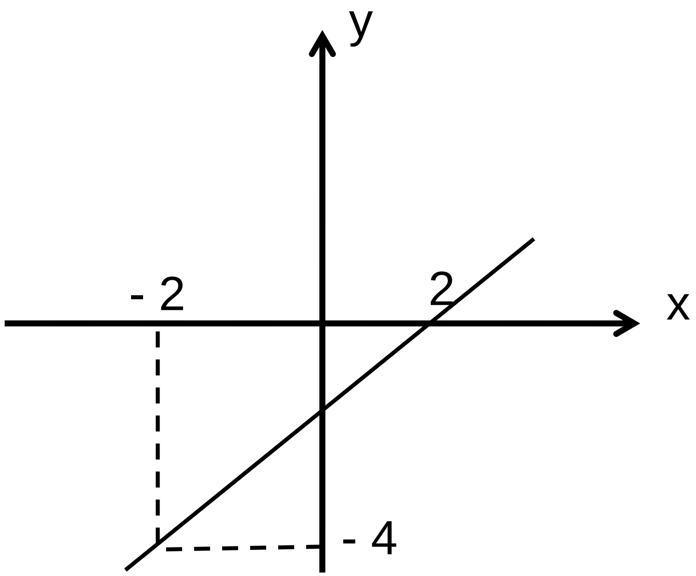
x	f(x)
0	-2

x	f(x)
-3	-5

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Ideia Intuitiva

Exemplo: A função $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ quando $x \to -2$, $y \to -4$.



D = {x ϵ R / x ≠ - 2}

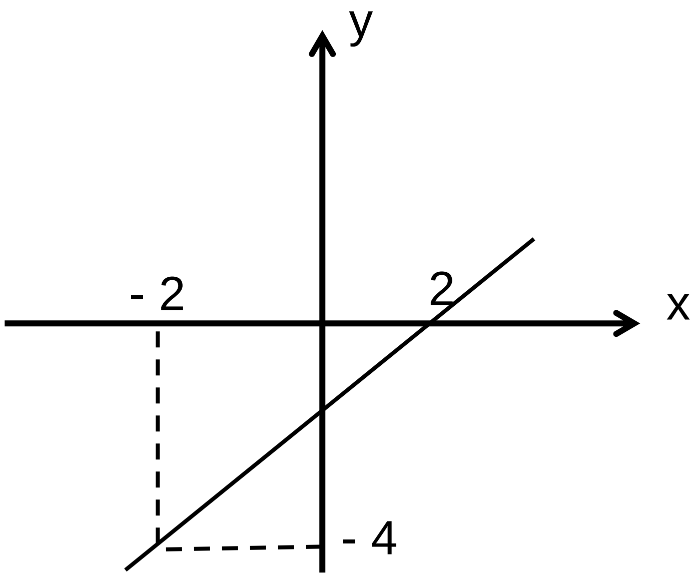
x	f(x)
0	-2
-1	

x	f(x)
-3	-5
-2,9	

Ideia Intuitiva

Exemplo: A função $y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ quando $x \to -2$, $y \to -4$.

D = {x ϵ R / x ≠ - 2}



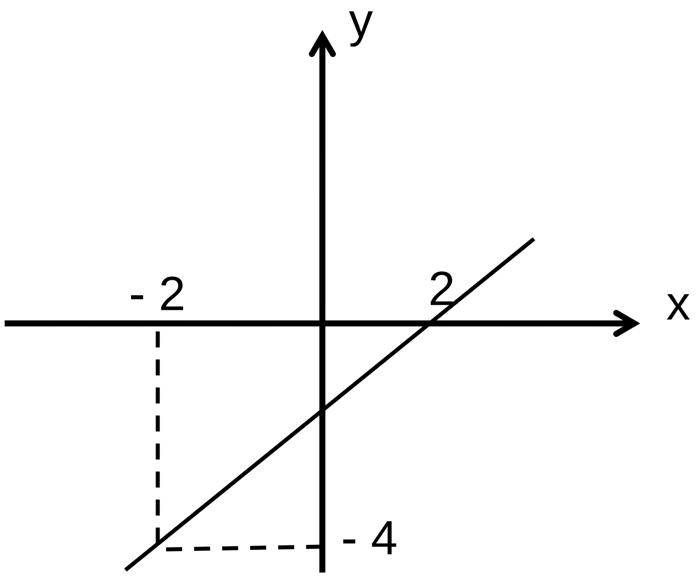
x	f(x)
0	-2
-1	-3

x	f(x)
-3	-5
-2,9	-4,9

Ideia Intuitiva

Exemplo: A função $y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ quando $x \to -2$, $y \to -4$.

D = {x ϵ R / x ≠ - 2}



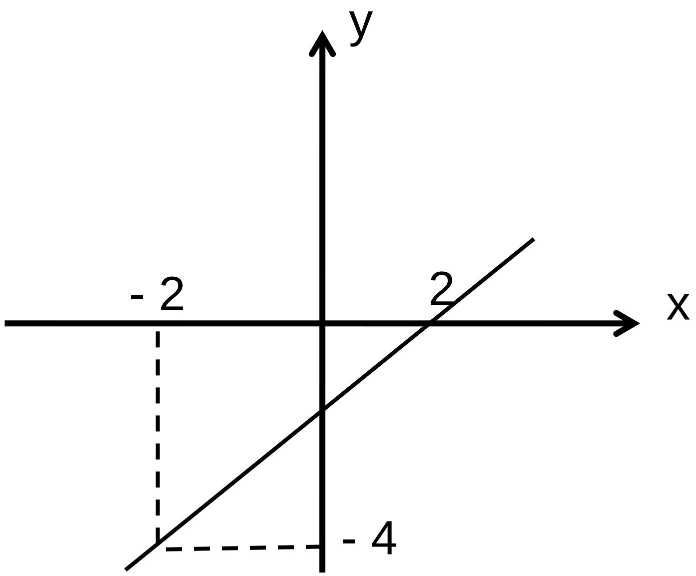
x	f(x)
0	-2
-1	-3
-1,5	

x	f(x)
-3	-5
-2,9	-4,9
-2,8	

Ideia Intuitiva

Exemplo: A função $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ quando $x \to -2$, $y \to -4$.

D = {x ϵ R / x ≠ - 2}



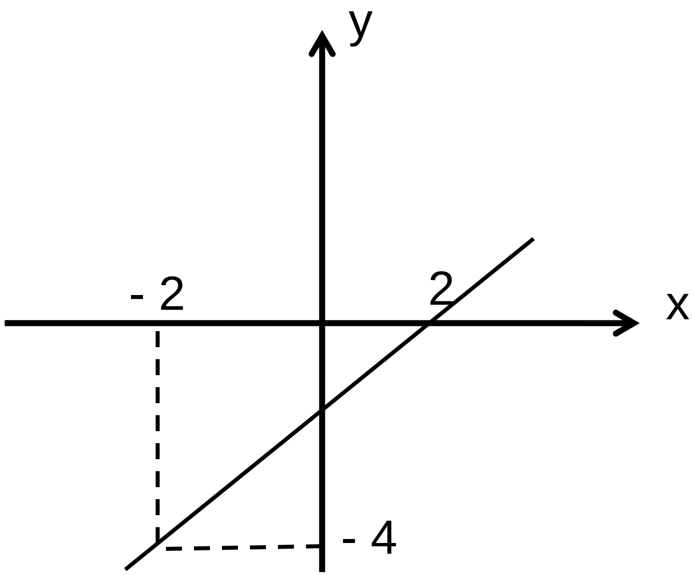
x	f(x)
0	-2
-1	-3
-1,5	-3,5

x	f(x)
-3	-5
-2,9	-4,9
-2,8	-4,8

Ideia Intuitiva

Exemplo: A função $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ quando $x \to -2$, $y \to -4$.

D = {x ϵ R / x ≠ - 2}



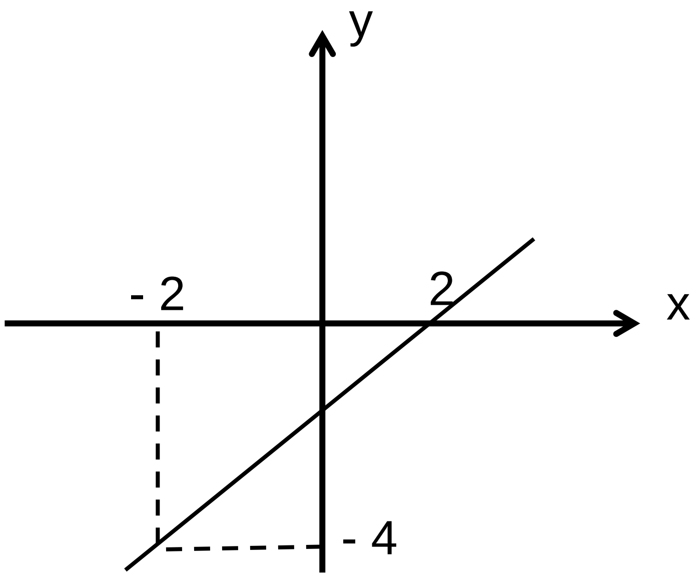
x	f(x)
0	-2
-1	-3
-1,5	-3,5
-1,6	

x	f(x)
-3	-5
-2,9	-4,9
-2,8	-4,8
-2,5	

Ideia Intuitiva

Exemplo: A função $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ quando $x \to -2$, $y \to -4$.

D = {x ϵ R / x ≠ - 2}

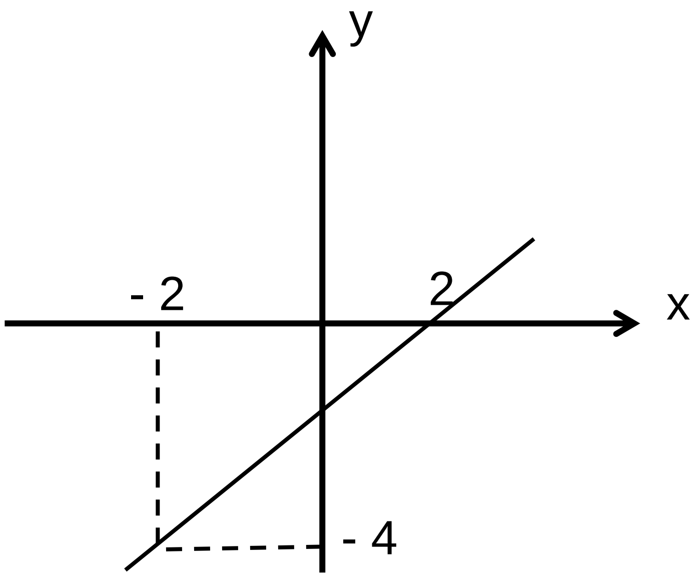


x	f(x)
0	-2
-1	-3
-1,5	-3,5
-1,6	-3,6

x	f(x)
-3	-5
-2,9	-4,9
-2,8	-4,8
-2,5	-4,5

Ideia Intuitiva

Exemplo: A função $y = 1 - \frac{1}{x}$ quando $x \to -2$, $y \to -4$.



D = {x ϵ R / x ≠ - 2}

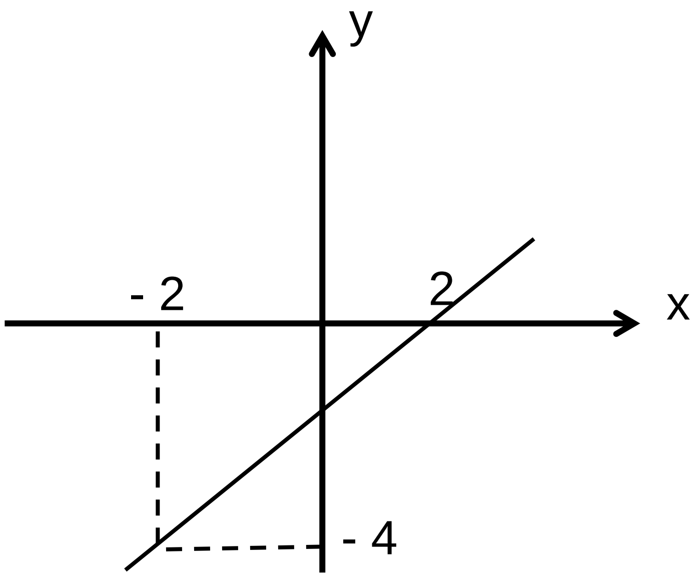
x	f(x)
0	-2
-1	-3
-1,5	-3,5
-1,6	-3,6
-1,7	

x	f(x)
-3	-5
-2,9	-4,9
-2,8	-4,8
-2,5	-4,5
-2,3	

Ideia Intuitiva

Exemplo: A função $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ quando $x \to -2$, $y \to -4$.

D = {x ϵ R / x ≠ - 2}

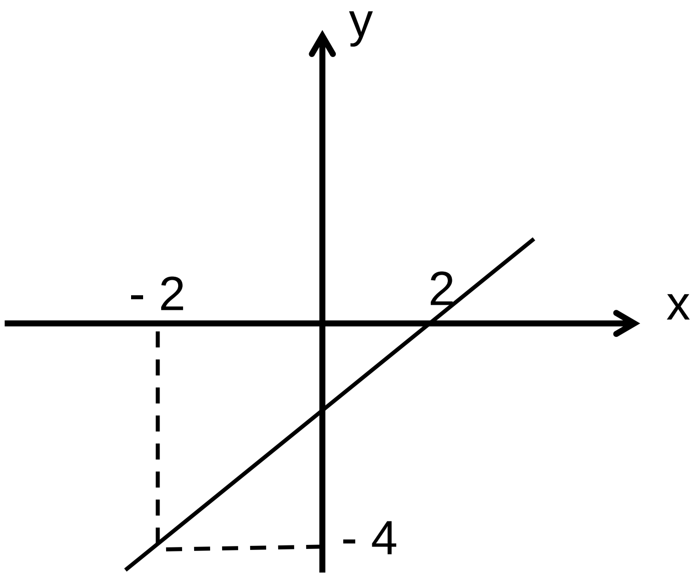


x	f(x)
0	-2
-1	-3
-1,5	-3,5
-1,6	-3,6
-1,7	-3,7

x	f(x)
-3	-5
-2,9	-4,9
-2,8	-4,8
-2,5	-4,5
-2,3	-4,3

Ideia Intuitiva

Exemplo: A função $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ quando $x \to -2$, $y \to -4$.



D = {x ϵ R / x ≠ - 2}

x	f(x)
0	-2
-1	-3
-1,5	-3,5
-1,6	-3,6
-1,7	-3,7
-1,99	

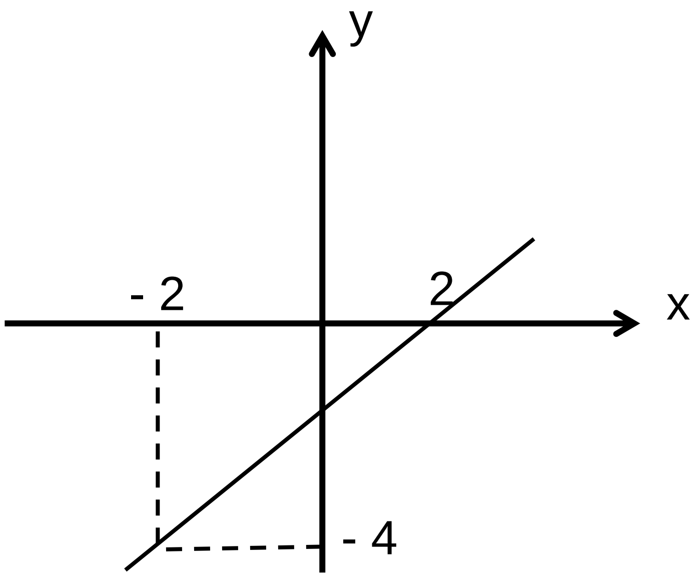
x	f(x)
-3	-5
-2,9	-4,9
-2,8	-4,8
-2,5	-4,5
-2,3	-4,3
-2,01	

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Ideia Intuitiva

Exemplo: A função $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ quando $x \to -2$, $y \to -4$.

D = {x ϵ R / x ≠ - 2}

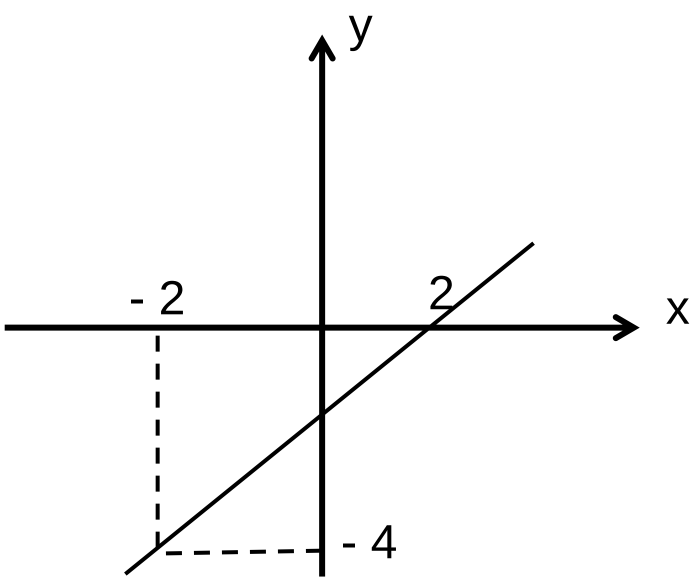


x	f(x)
0	-2
-1	-3
-1,5	-3,5
-1,6	-3,6
-1,7	-3,7
-1,99	-3,99

x	f(x)
-3	-5
-2,9	-4,9
-2,8	-4,8
-2,5	-4,5
-2,3	-4,3
-2,01	-4,01

Ideia Intuitiva

Exemplo: A função $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ quando $x \to -2$, $y \to -4$.



D = {x ϵ R / x ≠ - 2}

Logo:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = -4 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = -4 \end{array}\right\} \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$$

Ideia Intuitiva

Portanto:

Observa-se que é possível fazer o valor de y tão próximo de – 4 quanto desejamos, tornando x suficientemente próximo de – 2, mas não necessariamente igual a – 2.

Ou ainda, o valor absoluto da diferença y – 4 tão pequeno quanto desejarmos, tornando o valor absoluto da diferença x – 2 suficientemente pequeno.

Definição Formal

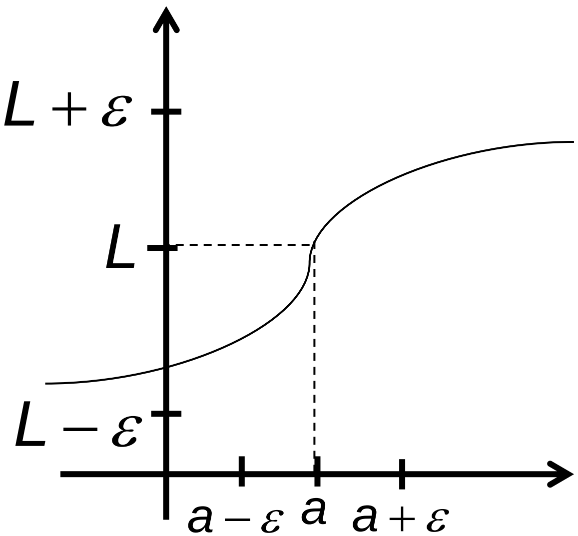
Seja f(x) definida num intervalo aberto I, contendo “a”, exceto possivelmente no próprio “a”. Dizemos que o limite de f(x) quando x se aproxima de “a” é L e escrevemos :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L}$$

Se $\forall \varepsilon > 0$, existe um $\varepsilon > 0$, tal que

$|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \varepsilon$.

Definição Formal



$$|f(x)-L|<\varepsilon$$

$$-\varepsilon<f(x)-L<\varepsilon$$

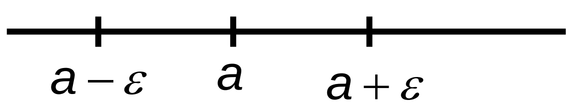
$$-\varepsilon+L<f(x)<\varepsilon+L$$

$$|x-a|>0$$

$$x-a>0 \;\; e \;\; x-a<0$$

$$x>a \quad e \quad x<a$$

$$x\neq a$$



$$|x-a|<\varepsilon$$

$$-\varepsilon<x-a<\varepsilon$$

$$-\varepsilon+a<x<\varepsilon+a$$

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$$

Relação entre Limite e f(x)

Propriedades dos Limites

$$1)\lim_{x\to a}(mx+n)=ma+n \quad \forall a,m,n\in\mathbb{R}$$

$$Ex.:\lim_{x\to 2}(3x-1)=$$

$$2)\lim_{x\to a}k=k \quad \forall k\in\mathbb{R} \quad (\text{limite da constante})$$

$$Ex.:\lim_{x\to 3}4=$$

Relação entre Limite e f(x)

Propriedades dos Limites

$$Se \ \lim_{x\to a} f(x) \ e \ \lim_{x\to a} g(x) \ existem \ e \ k \in \mathbb{R}, então:$$

$$3) \lim_{x\to a}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

$$Ex.: \lim_{x\to 2}(4x^2+1) =$$

$$4) \lim_{x\to a} k.f(x) = k.\lim_{x\to a} f(x)$$

$$Ex.: \lim_{x\to -1} 4x^3 =$$

Relação entre Limite e f(x)

Propriedades dos Limites

$$5)\lim_{x\to a}\left(f(x).\,g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\,.\lim_{x\to a}g(x)$$

$$Ex.:\lim_{x\to \pi}2x.\cos x=$$

$$6)\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$$

$$Ex.:\lim_{x\to 0}\frac{2x-1}{x+4}=$$

Relação entre Limite e f(x)

Propriedades dos Limites

$$7)\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^{n}=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]^{n}\qquad \forall n\in\mathbb{Z}_{+}^{*}$$

$$Ex.:\lim_{x\to 1}\left(x+2\right)^{5}=$$

$$8)\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}$$

$$Se\ \ \lim_{x\to a}f(x)>0\ \ e\ \ n\ \ \text{inteiro}\ \ ou$$

$$Se\ \ \lim_{x\to a}f(x)<0\ \ e\ \ n\ \ \text{inteiro}\ \ positivo\ \ ímpar$$

$$Ex.:\ \lim_{x\to -2}\sqrt[3]{x-3}=$$

Relação entre Limite e f(x)

Propriedades dos Limites

$$9) \lim_{x \to a} \ln\left(f(x)\right) = \ln\left[\lim_{x \to a} f(x)\right]$$

$$Se \quad \lim_{x \to a} f(x) > 0$$

$$Ex.: \lim_{x \to 0} \ln \frac{x+1}{x+2} =$$

$$10) \lim_{x \to a} \cos\left(f(x)\right) = \cos\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)$$

$$Ex.: \lim_{x \to \pi} \cos 2x =$$

Relação entre Limite e f(x)

Propriedades dos Limites

$$11)\ \lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$$

$$Ex.:\ \lim_{x\to -1} e^{x^2-1} =$$

$$12)\ \lim_{x\to a} \left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

$$Ex.:\ \lim_{x\to 1}(3x-2)^{x+1} =$$