Relação entre Limite e f(x)

- f(x) está definida em “a”, mas f(a) = “L”.

Exemplo: f(x) = 2x – 1.

- f(x) está definida em “a”, mas f(a) ≠ “L”.

Exemplo:

$$f(x)=\begin{cases} x+3, se & x\neq 3 \\ 4, se & x=3 \end{cases} \quad e \quad a=3\,(D=\Re)$$

Continuidade de Funções

Uma função ***f* é contínua** num ponto "a" se são satisfeitas as **três condições** seguintes:

- f é definida num intervalo aberto contendo "a". $\left(a \in Df\right)$
- $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Continuidade de Funções

Exemplo:

Verificar se a função $f(x) = \begin{cases} x+1, se & x \neq 2 \\ 3x, se & x = 2 \end{cases} \quad em \quad x = 2$

é contínua.

Continuidade de Funções

Exemplo:

Verificar se a função $f(x)=\begin{cases} x+1, se & x\neq 2 \\ 3x, se & x=2 \end{cases} \quad em \quad x=2$

é contínua.

1. $D=\Re,\ \ x=2\in D(f)$

Continuidade de Funções

Exemplo:

Verificar se a função $f(x)=\begin{cases} x+1, se & x\neq 2 \\ 3x, se & x=2 \end{cases} \quad em \quad x=2$

é contínua.

1. $D=\Re,\ \ x=2\in D(f)$

2. $$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} x+1 = 2+1 = 3 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} x+1 = 2+1 = 3 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

Continuidade de Funções

Exemplo:

Verificar se a função $f(x)=\begin{cases} x+1, se & x\neq 2 \\ 3x, se & x=2 \end{cases} \quad em \quad x=2$

é contínua.

1. $D=\Re,\ \ x=2\in D(f)$

2. $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x+1=2+1=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} x+1=2+1=3 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$$

3. $f(2)=3.(2)=6$

Continuidade de Funções

Exemplo:

Verificar se a função $f(x) = \begin{cases} x+1, se & x \neq 2 \\ 3x, se & x = 2 \end{cases} \quad em \quad x = 2$

é contínua.

1. $D = \Re, \; x = 2 \in D(f)$

2. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x+1 = 2+1 = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} x+1 = 2+1 = 3 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$

3. $f(2) = 3.(2) = 6$

Logo: Não é contínua em x = 2 porque

$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$$

$$3 \neq 6$$

Continuidade de Funções

Exemplo:

Verificar se a função $f(x)=\begin{cases} x^2, se & x \geq 1 \\ 1, se & x<1 \end{cases}$ é contínua em x = 1.

1. $D=\Re,\ \ x=1 \in D(f)$

Continuidade de Funções

Exemplo:

Verificar se a função $f(x)=\begin{cases} x^2, se & x \geq 1 \\ 1, se & x < 1 \end{cases}$ é contínua em x = 1.

1. $D=\Re, \quad x=1\in D(f)$

2. $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 = (1)^2 = 1 \end{matrix}\right\} \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

Continuidade de Funções

Exemplo:

Verificar se a função $f(x)=\begin{cases} x^2, se & x \geq 1 \\ 1, se & x<1 \end{cases}$ é contínua em x = 1.

1. $D=\Re,\ \ x=1 \in D(f)$

2. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = (1)^2 = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

3. $f(1)=(1)^2=1$

Continuidade de Funções

Exemplo:

Verificar se a função $f(x)=\begin{cases} x^2, se & x \geq 1 \\ 1, se & x < 1 \end{cases}$ é contínua em x = 1.

1. $D=\Re, \quad x=1 \in D(f)$

2. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 = (1)^2 = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

3. $f(1)=(1)^2=1$

Logo: É contínua em x = 1 porque satisfaz as três condições.

Continuidade de Funções

Observações:

Funções Hiperbólicas

$$senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csc}h(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$\cos h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sec h(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

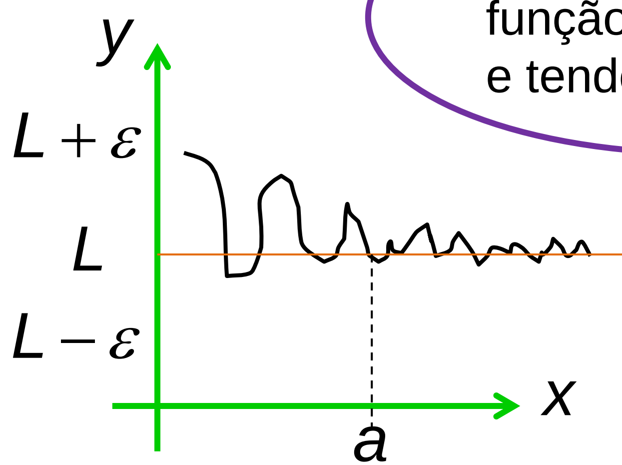
$$tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cot h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Limites no Infinito

Definição 1: Seja *f* uma função definida em um intervalo aberto $(a,+\infty)$. Escrevemos $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$, quando o número L satisfaz à seguinte condição:

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall\varepsilon>0, \textit{existe } a>0 \textit{ tal que} \\ |f(x)-L|<\varepsilon, \\ \textit{sempre que } x>a.\end{array}}$$

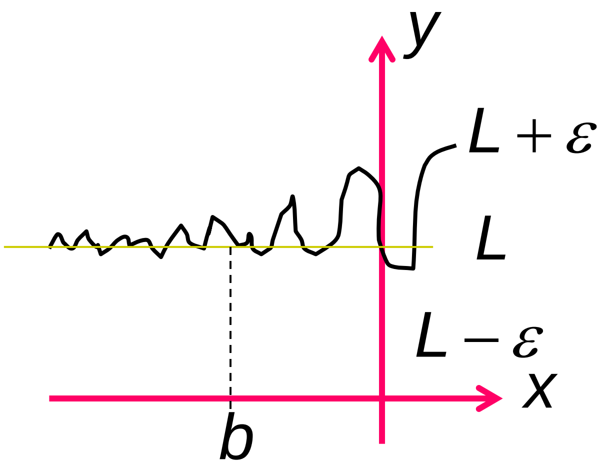
Depois de "a" a função se estabiliza e tende para *L*.



Limites no Infinito

Definição 2: Seja *f* uma função definida em um intervalo aberto $(-\infty, b)$. Escrevemos $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, quando o número L satisfaz à seguinte condição:

$$\forall \varepsilon > 0, \textit{ existe } b < 0 \textit{ tal que}$$
$$|f(x) - L| < \varepsilon,$$
$$\textit{sempre que } x < b.$$



Antes de "b" a função se estabiliza e tende para *L*.

Limites no Infinito

Teorema 1: Se n é um número inteiro positivo, então:

$$i)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0 \qquad ii)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

Teorema 2: Se n é um número inteiro positivo, então:

$$Seja \begin{cases} P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \\ Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0 \end{cases} e$$

$$então \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

(Considerar o termo de maior grau do polinômio)

Limites no Infinito

Exemplos: Determine os limites:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^5-5x^4+3x}{x^2-3x}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-5}{x+8}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+5}{\sqrt{2x^2-5}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x^5-4x^3+1\right)$

Limites Infinitos

Definição 1: Seja *f* uma função definida em um intervalo aberto contendo "a", exceto possivelmente, em x = a. Dizemos que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, se para qualquer A > 0, existir um $\delta > 0$ tal que $f(x) > A$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Definição 2: Seja *f* uma função definida em um intervalo aberto contendo "a", exceto possivelmente, em x = a. Dizemos que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, se para qualquer B < 0, existir um $\delta > 0$ tal que $f(x) > A$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Limites Infinitos

Teorema:

Se *n* é um número inteiro positivo qualquer, então:

i) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

ii) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & se\ n\ é\ par \\ -\infty, & se\ n\ é\ ímpar \end{cases}$

Exemplo: $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x+1}{x^2+x-6}$

Indeterminações da forma $\infty - \infty$

Reduzir a uma só fração

Exemplos:

Determine os limites:

1) $\lim_{x \to 2}\left(\frac{1}{x^3-8} - \frac{1}{x-2}\right)$

2) $\lim_{x \to 0}(\csc x - \cot x)$

Assíntotas

Assíntotas Horizontais e verticais

Assíntota Horizontal

Gráfico $y = e^{-x}$

x fica muito grande, logo:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x}} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

Assíntotas

Assíntotas Horizontais e verticais

Assíntota Horizontal

Quando não temos o gráfico, para encontrarmos a assíntota horizontal, basta resolver dois limites:

x tendendo a mais infinito

x tendendo a menos infinito

Logo: $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ $\qquad$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

Assíntotas

Assíntotas Horizontais e verticais

Assíntota Horizontal

Não é necessário que os dois limites sejam iguais a uma constante para ser assíntota, mas apenas um deles. Caso os dois limites resultem em constantes diferentes, teremos duas assíntotas, uma em cada constante.

Assíntotas

Assíntotas Horizontais e verticais

Assíntota Vertical

Gráfico $$y = \frac{1}{x-1}$$

Quando y fica muito grande (tanto para mais infinito quanto para menos infinito) parece que a nossa função praticamente encosta na reta x = 1, ou seja, x = 1 é a nossa assíntota vertical.

Assíntotas

Assíntotas Horizontais e verticais

Assíntota Vertical

E se não tivermos o gráfico?

1- Analisamos o domínio da função

2- Calculamos o limite a direita e a esquerda desse valor

Se o limite tender, para mais infinito ou menos infinito, $x = 1$ é a nossa assíntota vertical.

Assíntotas

Assíntotas Horizontais e verticais

Resumindo

Para Assíntotas Horizontais:

- Fazer os limites de f(x) com x tendendo a mais infinito e a menos infinito;
- Se pelo menos um desses limites resultar em uma constante c, onde c é um número real, teremos que a reta y = c é uma assíntota horizontal;

Assíntotas

Assíntotas Horizontais e verticais

Resumindo

Para Assíntotas Horizontais:

- Se os limites derem constantes diferentes, teremos duas assíntotas horizontais;
- Se os dois limites tenderem para mais ou menos infinito, não teremos assíntotas horizontais.

Assíntotas

Assíntotas Horizontais e verticais

Resumindo

Para Assíntotas Verticais:

- Achar os valores de x que dão "problema" na nossa função, ou seja, que não estão no domínio dela;
- Fazer os limites laterais desse valor, e se os limites tenderem para mais ou menos infinito, quer dizer que temos uma assíntota vertical;

Assíntotas

Assíntotas Horizontais e verticais

Resumindo

Para Assíntotas Verticais:

- Se os dois limites resultarem em constantes, não temos assíntotas verticais;

Assíntotas

Assíntotas Horizontais e verticais

Resumindo

Assíntotas Horizontais envolvem limites no infinito

Assíntotas verticais envolvem limites infinitos

Assíntotas

Assíntotas Horizontais e verticais

Exemplos

1) $f(x)=\dfrac{x^2-5x}{x^2-6x+5}$

2) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

3) $y=\dfrac{x}{x^2-9}$

Limites Fundamentais

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{x}=1 \quad \mapsto \quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senkx}{kx}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \quad \mapsto \quad \lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^{k}$

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e \quad \mapsto \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x}=\ell na \quad \mapsto \quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{kx}-1}{kx}=\ell na$

Limites Fundamentais

Exemplos: Organize os limites na forma de limites fundamentais para resolvê-los:

1) $\lim_{x \to 0} \frac{sen2x}{x}$

2) $\lim_{x \to 0} (1 - 2senx)^{3\csc x}$

3) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-2}{x-3} \right)^{x}$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

5) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{senx}$

Resumindo

1) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$, portanto não existe limite dessa função.

2) $\lim_{x \to 4} \frac{3}{x-4} = \frac{3}{4-4} = \frac{3}{0} = \pm\infty$, portanto não existe limite dessa função.

3) $\lim_{x \to 5} \frac{-3}{x-5} = \frac{-3}{5-5} = -\frac{-3}{0} = \pm\infty$, portanto não existe limite dessa função.

Resumindo

Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$

Se c > 0 e $f(x) \to 0$ para valores positivos

$$\text{i)} \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$$

Se c < 0 e $f(x) \to 0$ para valores positivos

$$\text{iii)} \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

Se c > 0 e $f(x) \to 0$ para valores negativos

$$\text{ii)} \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

Se c < 0 e $f(x) \to 0$ para valores negativos

$$\text{iv)} \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$$

Resumindo

As “Indeterminações”

Em diversos exemplos sobre o cálculo de limites nos defrontamos com situações desse tipo e "escapamos" delas através de manipulações algébricas. Não podemos esquecer que o limite do quociente é o quociente dos limites somente quando **os limites do numerador e do denominador existem, sendo o do denominador diferente de zero**.

Resumindo

Uma expressão da forma $\frac{0}{0}$ é denominada uma "indeterminação". Essa denominação advém do fato que se um limite é dessa forma, a priori, não sabemos qual é o resultado. Pode ser qualquer um.

Casos de indeterminação: $\infty - \infty$; $\infty . 0$; $0/0$; ∞/∞; 0^0

Resumindo

Vejamos alguns exemplos:

a) $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$$

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ que não existe, pois $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ e $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

b) $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to \infty}\frac{2x}{x}=2 \qquad \lim_{x\to \infty}\frac{x}{x^3}=0$$

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Resumindo

Operações envolvendo $\pm\infty$:

No estudo dos limites devemos considerar as operações envolvendo ∞, que não são válidas para cálculos algébricos. (obs: c é um número real)

Adição e subtração	Multiplicação	Divisão	Potência
$c + \infty = \infty$ $c - \infty = -\infty$ $\infty + \infty = \infty$ $-\infty - \infty = -\infty$ $\infty - \infty$ =indeterminação $\infty - c = \infty$	$c \, . \, \infty = \infty$ $c \, . \, (-\infty) = -\infty$ $\infty \, . \, \infty = \infty$ $\infty \, . \, (-\infty) = -\infty$ $\infty \, . \, 0$=indeterminação	$\infty / c = \infty$ $-\infty / c = -\infty$ $c \, / \, \infty = 0$ $c \, / \, 0 = \infty$ $0/0$ = indeterminação ∞/∞ =indeterminação	$\infty^0 = \infty$ $c^\infty \Rightarrow \begin{cases} c > 1 \Rightarrow c^\infty = \infty \\ 0 < c < 1 \Rightarrow c^\infty = 0 \\ -1 < c < o \Rightarrow c^\infty = 0 \\ c < -1 \Rightarrow c^\infty = \pm\infty \end{cases}$ $0^c = 0 \qquad c \neq 0$ $0^\infty = 0$ $\infty^\infty = \infty$ $c^0 = 1 \qquad c \neq 0$ 0^0= indeterminação ∞^0= indeterminação $1^{\pm\infty}$ = indeterminação

Resumindo

O limite bilateral de uma função existe em um ponto a se e somente se existirem os limites laterais naquele ponto e tiverem o mesmo valor:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad se\ e\ somente\ se \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Resumindo

LIMITES NO INFINITO: "X TENDE AO INFINITO"

Seja f uma função definida em todo número no intervalo $(-\infty, +\infty)$. O limite de f(x), quando x cresce ou decresce ilimitadamente, é L e pode ser escrito como:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L}$$

Exemplos

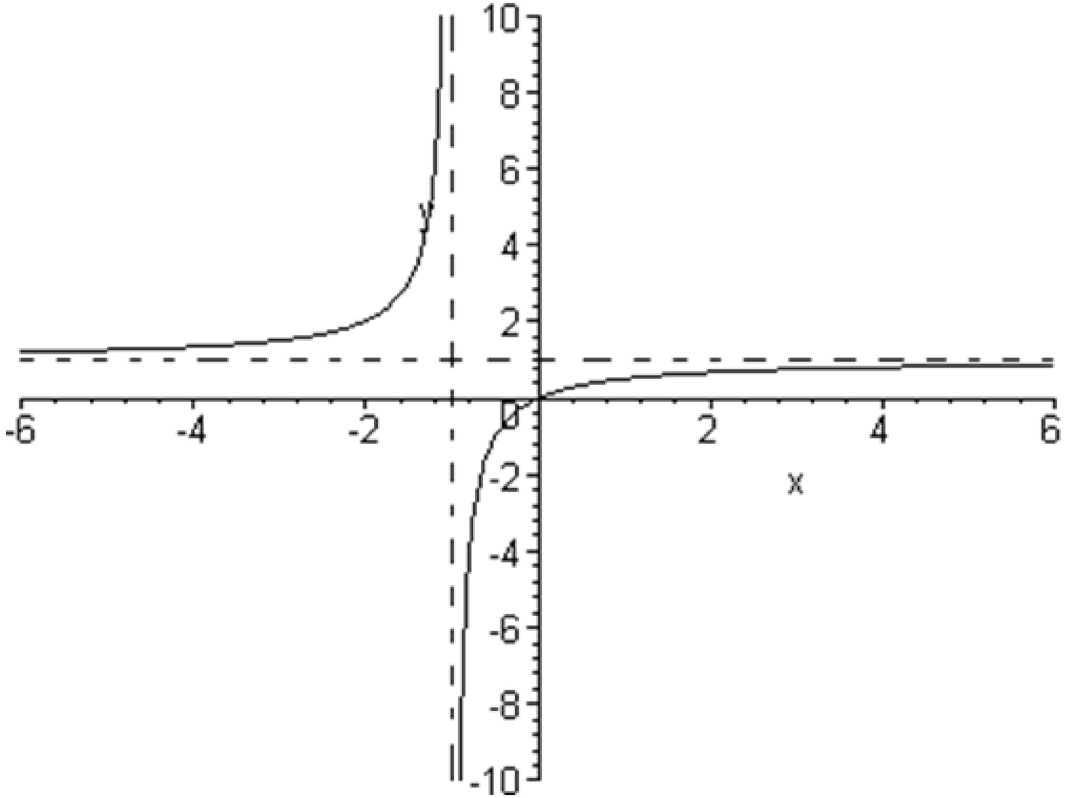
Encontre os limites indicados abaixo:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{\infty}{\infty}$ causa indeterminação, simplificando temos.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\infty}}$$ = 1, ou seja, a medida em que x tende ao infinito, f(x) se aproxima de 1 e temos então uma **assíntota horizontal.**

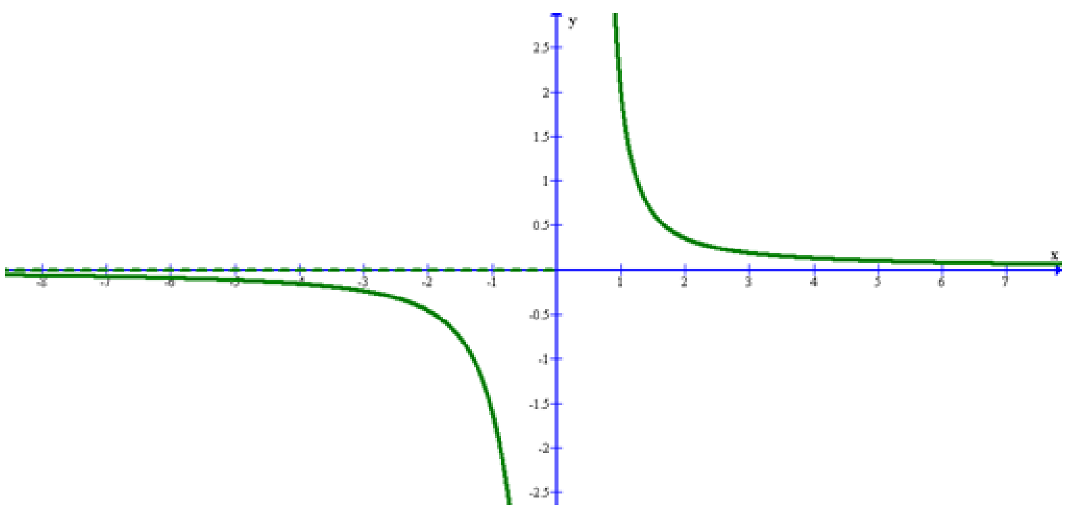
Resumindo

Graficamente podemos observar a tendência do limite



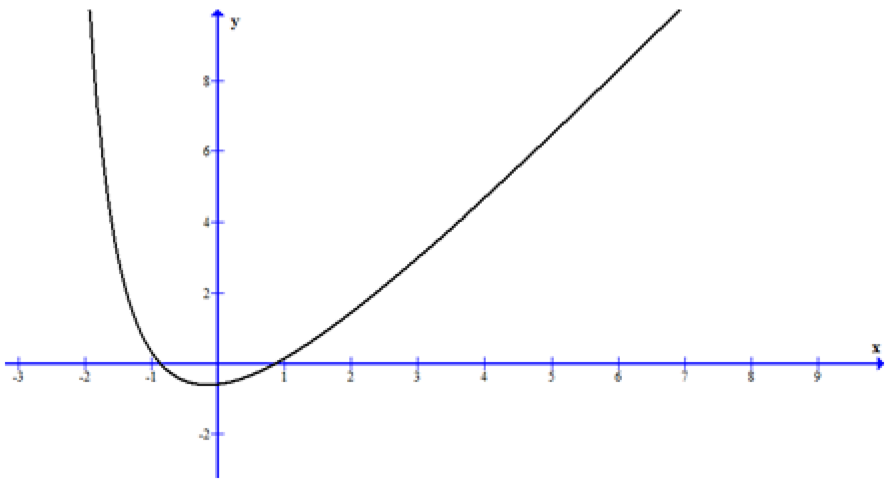
Resumindo

b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x+5}{4x^3-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(4-\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{\frac{2}{-\infty}-\frac{1}{(-\infty)^2}+\frac{5}{(-\infty)^3}}{4-\frac{1}{(-\infty)^3}}=\frac{0}{4}=0$$



Resumindo

c) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-3}{2x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4x-\frac{3}{x}\right)}{x\left(2+\frac{5}{x}\right)}=\frac{4\infty-\frac{3}{+\infty}}{2+\frac{5}{+\infty}}=\frac{\infty-0}{2+0}=\frac{\infty}{2}=\infty$$



Resumindo

LIMITES INFINITOS

Seja f uma função definida em todo número no intervalo aberto I contendo *a*, exceto, possivelmente, no próprio *a*. Quando *x* se aproxima de *a*, f(x) cresce ou decresce ilimitadamente, o que pode ser escrito como:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty}$$

Exemplos

Utilizando os conceitos de limites, esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$ b) $h(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ c) $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

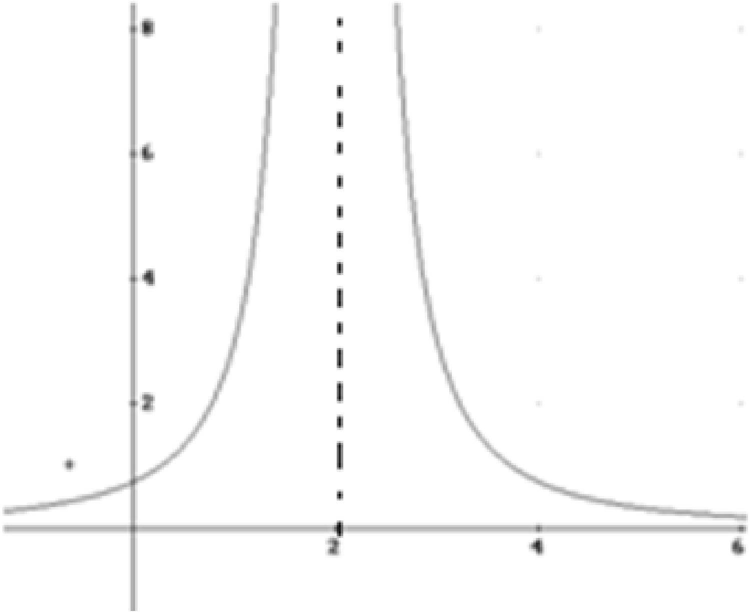
Resumindo

Solução

Calculando os limites laterais em cada caso, obtemos:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2^-} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{(x-2)^2} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{(x-2)^2} = 0$$



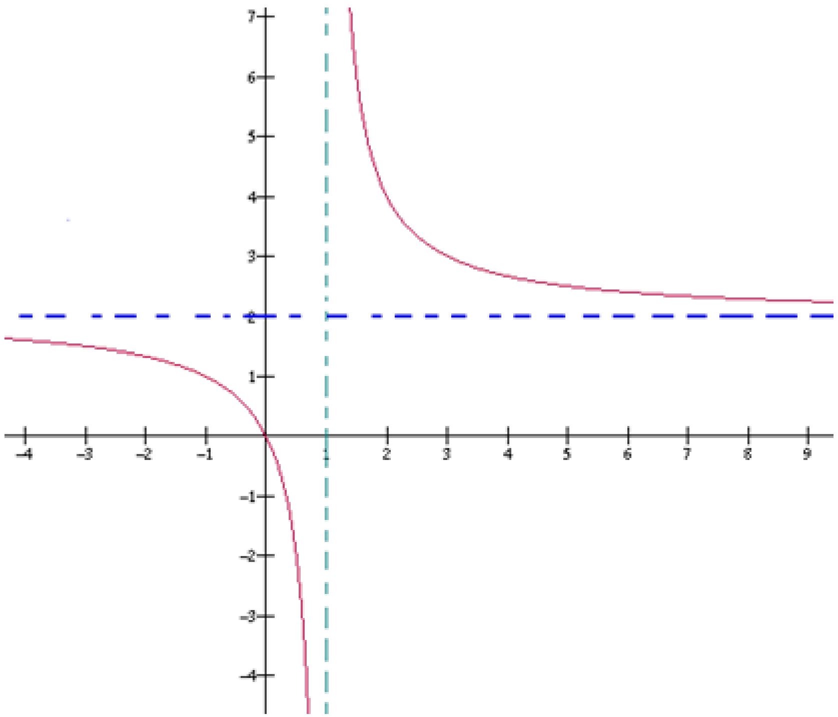
Resumindo

Definição: Uma reta $x = a$ é chamada de assíntota vertical do gráfico de uma função f se $f(x)$ tende a $+\infty$ ou $-\infty$, quando x tende a a pela esquerda ou pela direita.

Para a função $\boxed{h(x) = \dfrac{2x}{x-1}}$ temos que:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x-1} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{x-1} = 2^- \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{x-1} = 2^+$$

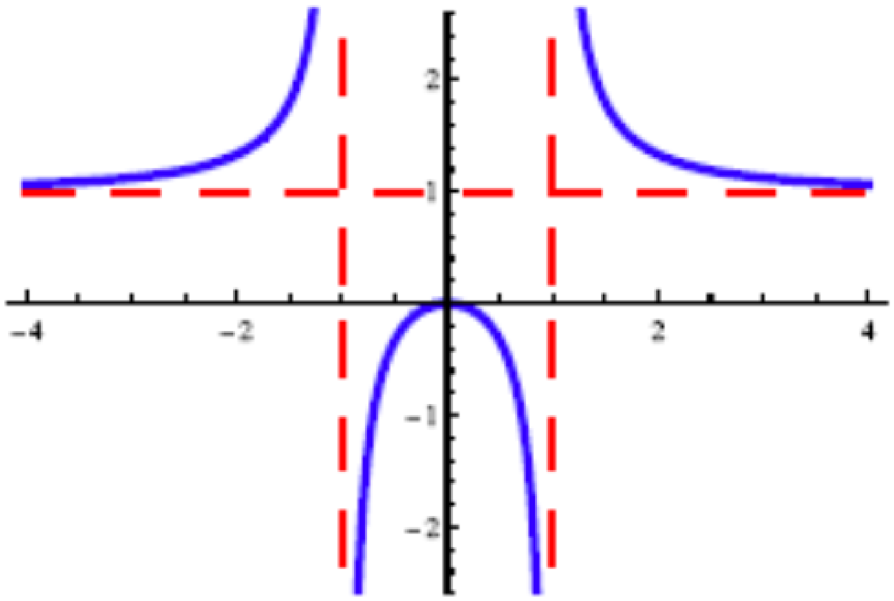


Resumindo

Para a função $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1^+ \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1^+$$



Resumindo

Continuidade de função em um número

Definição: Dizemos que a função f é contínua no número "a" se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas

(i) f(a) existe (ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe (iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

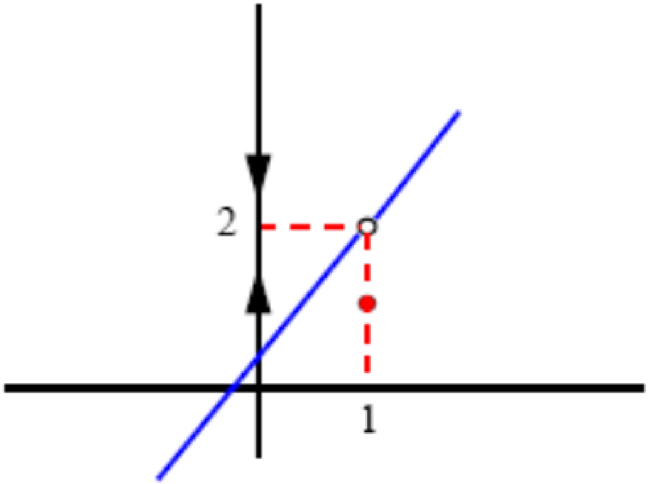
Se uma ou mais de uma dessas condições não forem verificadas em "a", a função f será descontínua em "a"

Resumindo

Exemplo

Considere a função f(x) e analise a continuidade em x = 1.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x\neq 1\\ 1 & \text{se } x=1\end{cases}$$



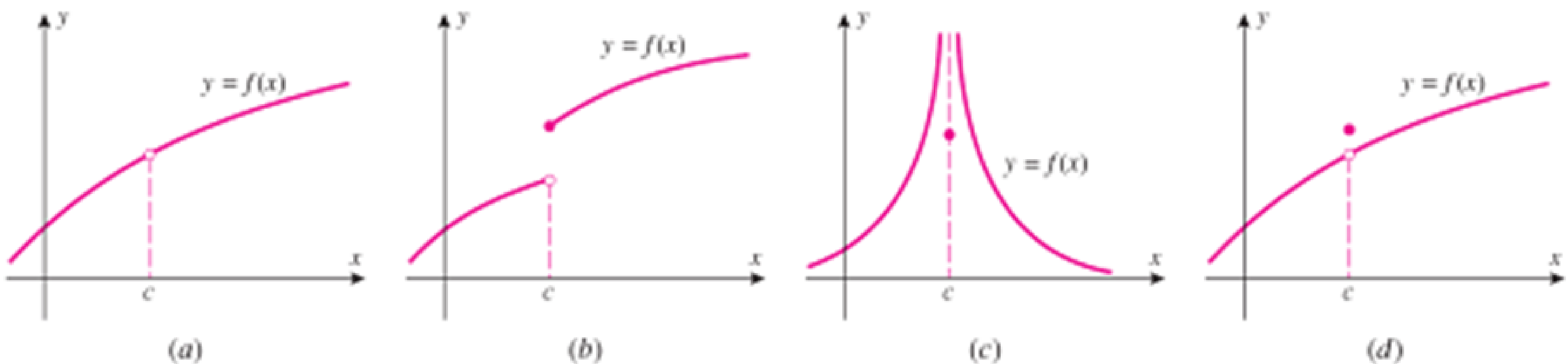
Analizando as condições de continuidade

(i) f(1) = 1 (ii) $\lim_{x\to 1} f(x)=2$ (iii) $\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$

percebe-se que a função está definida para todos os reais, mas f(x) não é contínua em 1 pois o terceiro critério não se verifica. Pode-se, também, observar a descontinuidade da função representando-a graficamente.

Resumindo

Dizemos que uma função é contínua em x = a, se (grosso modo) o gráfico da função não tem quebras (ou pulos) quando ele passa pelo ponto (a, f(a)). Isto é, f(x) é contínua em x = a, se pudermos desenhar o gráfico através do ponto (a, f(a)) sem tirar nosso lápis do papel. Observe as figuras:



As figuras mostram exemplos de gráficos de funções que não são contínuas, pois:

- A função $f(x)$ não está definida em *c* (a)
- O limite de $f(x)$ não existe quando x tende a *c* (b) e (c)
- O valor da função e o valor do limite em *c* são diferentes (d)