Engenharia Civil

Derivadas

INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Engenharia Civil

Ementa

- ~~Reta tangente;~~
- ~~Definição da derivada;~~
- **Regras básicas de derivação;**
- **Derivadas parciais e regra da cadeia;**
- **Derivada das funções elementares;**
- Derivada das funções implícitas;
- Derivadas de ordem superior;

Engenharia Civil

Ementa

- Taxas de variação;
- Diferencial e aplicações;
- Teorema do valor intermediário, de Rolle e do valor médio;
- Crescimento e decrescimento de uma função;
- Concavidade e pontos de inflexão;
- Problemas de maximização e minimização;
- Formas indeterminadas - Regras de L'Hospital;

Regras básicas de derivação

As regras básicas de derivação, nos permitem calcular a derivada sem usar a definição.

Várias proposições nos garantem as seguintes regras de derivação.

Regras básicas de derivação

- Derivada de uma constante: Se *c* é uma constante e f(x) = c para todo x, então f ’(x) = 0.

Prova: Seja $f(x) = c$. Então:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 0$$

$$= 0$$

Regras básicas de derivação

- Derivada da Potência: - Se n é um número inteiro positivo e $f(x)=x^n$, então $f'(x)=n.x^{n-1}$.

- Se $f(x)=x^{-n}$ onde n é um número inteiro positivo e x ≠ 0, então $f'(x)=-n.x^{-n-1}$.

Regras básicas de derivação

❖ Derivada do produto de uma constante por uma função:

Sejam *f* uma função, *c* uma constante e *g* a função definida por $g(x) = c.f(x)$. Se f '(x) existe, então $g'(x) = c.f'(x)$.

❖ Derivada de uma soma: Sejam *f* e *g* duas funções e *h* a função definida por $h(x) = f(x) + g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, então $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Regras básicas de derivação

- **Derivada de um produto:** Sejam *f* e *g* funções de *h* a função definida por $h(x)=f(x).g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $h'(x)=f(x).g'(x)+f'(x).g(x)$.

- **Derivada de um quociente:** Sejam *f* e *g* funções de *h* a função definida por $h(x)=f(x)/g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, e $g(x)\neq 0$ então $h'(x)=\dfrac{g(x).f'(x)-f(x).g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$.

Engenharia Civil

Regras básicas de derivação

Exemplos: Encontrar f '(x) das seguintes funções:

a) $f(x) = x^5$ **b)** $f(x) = x$ **c)** $f(x) = x^{10}$

d) $f(x) = 8x^2$ **e)** $f(x) = -2x^7$ **f)** $f(x) = 3x^4 + 8x + 5$

g) $f(x) = 9x^5 - 4x^2 + 2x + 7$ **h)** $f(x) = (2x^3 - 1).(x^4 + x^2) + 7x - 6$

i) $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 5).(x^6 + 4x)$ **j)** $f(x) = \frac{2x^4 - 3}{x^2 - 5x + 3}$

k) $f(x) = \frac{1}{x}$ **l)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Derivadas parciais e regra da cadeia

Derivada de Função Composta

Consideremos duas funções **deriváveis** *f* e *g* onde $y = g(u)$ e $u = f(x)$.

Para todo *x* tal que f(x) está no domínio de *g*, podemos escrever **$y = g(u) = g[f(x)]$**, isto é, podemos considerar a **função composta** $(g_o f)(x)$.

Derivadas parciais e regra da cadeia

Derivada de Função Composta

Por exemplo, uma função tal como $y = \left(x^2 + 5x + 2\right)^7$ pode ser vista como a composta das funções $y = u^7 = g\left(u\right)$ e $u = x^2 + 5x + 2 = f(x)$.

Assim, veremos a **regra da cadeia**, que nos dá a derivada da função composta $g_{o}f$ em termos das derivadas de f e g.

Derivadas parciais e regra da cadeia

Regra da Cadeia

Se $y = g(u)$ e $u = f(x)$ e as derivadas dy/du e du/dx existem, então a função composta **y = g[f(x)]** tem derivada que é dada por:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} \quad ou \quad y'(x) = g'(u).f'(x)}$$

Derivadas parciais e regra da cadeia

Proposição

Se $u = g(x)$ é uma função derivável e *n* é um número inteiro não nulo, então:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[g(x)\right]^n = n.\left[g(x)\right]^{n-1}.g'(x)}$$

Derivadas parciais e regra da cadeia

Exemplos: Encontrar a derivada das seguintes funções:

a) $y = \left(x^2 + 5x + 2\right)^7$

b) $y = \left(\dfrac{3x+5}{2x+1}\right)^5$

c) $y = \left(3x^2 + 1\right)^3 . \left(x - x^2\right)^2$

d) $f(x) = 5\sqrt{x^2 + 3}$

e) $g(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt[3]{t^3 + 1}}$

Derivada das funções elementares

❖ Derivada da função Exponencial

Se $y = a^u, \ (a > 0 \ \ e \ \ a \neq 1)$ então $y' = a^u . \ln a . u' \quad (a > 0 \ \ e \ \ a \neq 1).$

Exemplo: Determinar a derivada das funções.

a) $y = 3^{2x^2+3x-1}$

b) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}}$ **c)** $y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$ **d)** $y = e^{5x-7}$

Engenharia Civil

Derivada das funções elementares

❖ Derivada da função Exponencial Composta

Se $y = u^v$, $\left(u = u(x) \;\; e \;\; v = v(x)\right)$ então

$$y' = v.u^{v-1}.u' + u^v.\ln u \,.\, v'$$

Exemplo: Determinar a derivada da função $y = \left(x\right)^{x^2-3}$.

Derivada das funções elementares

❖ Derivada da função Logarítmica

Se $y = \log_a u, \left(a > 0 \;\; e \;\; a \neq 1\right)$ então $y' = \dfrac{\log_a e}{u} . u' \quad \left(a > 0 \;\; e \;\; a \neq 1\right)$

Se $y = \ln u$ então $y' = \dfrac{u'}{u}$.

Exemplo: Determinar a derivada das funções.

a) $y = \log_4\left(3x^2 - 4x\right)$ **b)** $y = \ln\left(5x^3 + 2x^2 - 3x\right)$

Derivada das funções elementares

❖ Derivada das funções Trigonométricas

$$Se \quad y = sen(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \cos(u).u'$$

$$Se \quad y = \cos(u) \quad \Rightarrow \quad y' = -sen(u).u'$$

$$Se \quad y = tg(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \sec^2(u).u'$$

$$Se \quad y = \cot g(u) \quad \Rightarrow \quad y' = -\operatorname{cosec}^2(u).u'$$

$$Se \quad y = \sec(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \sec(u).tg(u).u'$$

$$Se \quad y = \cos ec(u) \quad \Rightarrow \quad y' = -co\sec(u).cotg(u).u'$$

Derivada das funções elementares

❖ Derivada das funções Trigonométricas

Exemplos:

a) $y = sen(x^2)$

b) $y = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $y = 3.tg\left(\sqrt{x}\right) + \cot g\,(3x)$

d) $y = \frac{\cos x}{1 + \cot gx}$

e) $y = \sec\left(x^2 + 3x + 7\right)$

f) $y = \cos ec\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

Derivada das funções elementares

❖ Derivada das funções Trigonométricas Inversas

$$y = arc\ sen(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$y = arc\cos(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$y = arc\ tg(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$y = arc\sec(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

$$y = arc\cot g(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-u'}{1+u^2}$$

$$y = arc\ cosec(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

Derivada das funções elementares

❖ Derivada das funções Trigonométricas Inversas

Exemplos:

a) $y = arc\ sen(x+1)$

b) $y = arc\ tg\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

Derivada das funções elementares

❖ Derivada das funções Hiperbólicas

$$y = senh(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \cosh(u).u'$$

$$y = \cos h(u) \quad \Rightarrow \quad y' = sen\,\mathrm{h}(u).u'$$

$$y = tgh(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \mathrm{sech}^2(u).u'$$

$$y = \cot gh(u) \quad \Rightarrow \quad y' = -\cos ec\,\mathrm{h}^2(u).u'$$

$$y = \sec h(u) \quad \Rightarrow \quad y' = -\mathrm{sech}(u).tgh(u).u'$$

$$y = \cos ech(u) \quad \Rightarrow \quad y' = -\cos ec\,\mathrm{h}(u).\cot g\,\mathrm{h}(u).u'$$

Engenharia Civil

Derivada das funções elementares

❖ Derivada das funções Hiperbólicas

Exemplos:

a) $y = \sec h(x^3 + 3)$

b) $y = \sec h\left(2x\right)$

c) $y = \ln\left[tgh\left(3x\right)\right]$

d) $y = \cot gh\left(1 - x^3\right)$

Derivada das funções elementares

❖ Derivada das funções Hiperbólicas Inversas

$$y = \arg senh(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$$

$$y = \arg \cosh(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$y = \arg tgh(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{1-u^2}$$

$$y = \arg \sec h(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}}$$

$$y = \arg \cot gh(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{1-u^2}$$

$$y = \arg \cos ech(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2+1}}$$

Engenharia Civil

Derivada das funções elementares

❖ Derivada das funções Hiperbólicas Inversas

Exemplos:

a) $y = x^2 \arg\cos h\ x^2$

b) $y = \arg tgh\left(sen\ 3x\right)$

c) $y = \arg senh\ x - \sqrt{x^2 + 1}$