Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Derivadas

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Ementa

- ~~Reta tangente;~~
- ~~Definição da derivada;~~
- ~~Regras básicas de derivação;~~
- ~~Derivadas parciais e regra da cadeia;~~
- ~~Derivada das funções elementares;~~
- **Derivada das funções implícitas;**
- **Derivadas de ordem superior;**

Ementa

- Taxas de variação;
- Diferencial e aplicações;
- Teorema do valor intermediário, de Rolle e do valor médio;
- Crescimento e decrescimento de uma função;
- Concavidade e pontos de inflexão;
- Problemas de maximização e minimização;
- Formas indeterminadas - Regras de L'Hospital;

Derivadas Sucessivas

Definição: Seja *f* uma função derivável. Se *f'* também for derivável, então a sua derivada é chamada *Derivada sucessiva de f* e é representada por *f''(x)* (Lê-se *f* – duas linhas de x) $\frac{d^2f}{dx^2}$ ou (lê-se *derivada segunda de f* em relação a x)

Derivadas Sucessivas

Exemplos:

1) Encontre as derivadas de segunda ordem das seguintes funções:

i) $f(x) = 3x^2 + 8x + 1$

ii) $f(x) = tgx$

iii) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

Derivadas Sucessivas

Exemplos:

2) Encontre as derivadas de enésima ordem das seguintes funções:

i) $f(x) = 3x^5 + 8x^2$

ii) $f(x) = e^{x/2}$

iii) $f(x) = \text{senx}$

Derivação Implícita

Função na Forma Implícita

Consideremos a equação $F(x,y)=0$.

Dizemos que a função $y = f(x)$ é definida implicitamente pela equação acima se, ao substituirmos y por $f(x)$ na primeira equação, esta se transforma numa identidade.

Derivação Implícita

Exemplos:

1) $x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0$

2) $x^2 + y^2 = 4$

Obs.: Nem sempre é possível representar explicitamente uma função escrita na forma implícita, por isso a derivação implícita se torna útil.

Derivação Implícita

A Derivação de uma função na forma implícita.

Suponhamos que F(x,y) = 0 define implicitamente uma função assim definida, sem a necessidade de explicitá-la.

Exemplos:

i) Sabendo que y = f(x) é uma função derivável definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 4$, determinar y'.

ii) Determinar y' na equação $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$, sabendo que y = f(x).

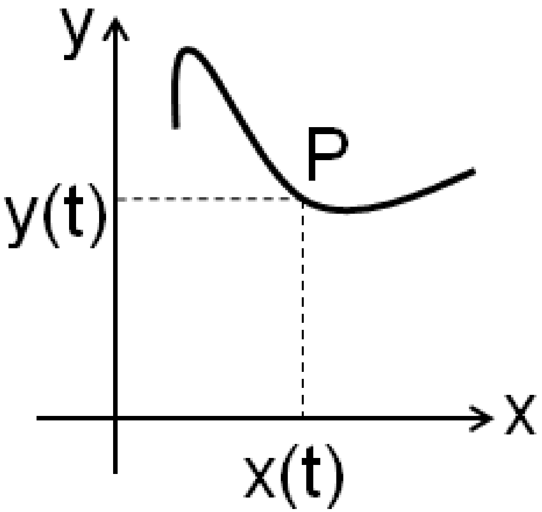
Derivada de uma Função na Forma Paramétrica

Função na forma paramétrica

Sejam $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, duas funções da mesma variável real t, $t \in [a, b]$. Então, a cada valor de t corresponde dois valores x e y, onde esses são coordenadas de um ponto P. Se as funções $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são contínuas, o ponto $P(x(t), y(t))$, descreve uma curva no plano.

Derivada de uma Função na Forma Paramétrica

Eliminado o parâmetro *t* das funções, obtemos $y = y(x)$ na forma analítica usual.



Derivada de uma Função na Forma Paramétrica

Exemplos:

Encontre y em função de x na forma analítica usual das seguintes equações paramétricas: $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 4t + 3 \end{cases}$ e

$$\begin{cases} x = a.\cos(t) \\ y = a.sen(t) \end{cases}, t \in [0,2\pi].$$

Derivada de uma Função na Forma Paramétrica

Derivada de uma Função na forma paramétrica

Seja y uma função de x definida pelas equações paramétricas . Suponhamos que as funções $x = x(t)$, y $= y(t)$ e t $= t(x)$ sua inversa são deriváveis.

Podemos ver a função y $= y(x)$, definida pela equação paramétrica acima, como uma função composta $y = y[t(x)]$ e aplicar a regra da cadeia.

Derivada de uma Função na Forma Paramétrica

Derivada de uma Função na forma paramétrica

Temos, então: $\frac{dy}{dx} = y'(t).t'(x)$

Como x = x(t) e sua inversa t = t(x) são deriváveis, pelo Teorema da função inversa vem: $t'(x) = \frac{1}{x'(t)}$

Substituindo, obtemos: $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

Derivada de uma Função na Forma Paramétrica

Derivada de uma Função na forma paramétrica

Observamos que esta fórmula nos permite calcular a derivada de y em relação a x sem conhecer explicitamente y como função de x.

Derivada de uma Função na Forma Paramétrica

Derivada de uma Função na forma paramétrica

Exemplos:

i) Calcular a derivada dy/dx da função y(x) definida na forma paramétrica pelas equações:

a) $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 4t + 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 9t^2 - 6t \end{cases}$

Derivada de uma Função na Forma Paramétrica

Derivada de uma Função na forma paramétrica

Exemplos:

c) $\begin{cases} x = 4cos^3 t \\ y = 4sen^3 t' \end{cases}$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

ii) Determinar a equação da reta tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 4$, no ponto $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.