Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Derivadas

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Ementa

- ~~Reta tangente;~~
- ~~Definição da derivada;~~
- ~~Regras básicas de derivação;~~
- ~~Derivadas parciais e regra da cadeia;~~
- ~~Derivada das funções elementares;~~
- ~~Derivada das funções implícitas;~~
- ~~Derivadas de ordem superior~~;

Ementa

- **Taxas de variação;**
- **Diferencial e aplicações;**
- Teorema do valor intermediário, de Rolle e do valor médio;
- Crescimento e decrescimento de uma função;
- Concavidade e pontos de inflexão;
- Problemas de maximização e minimização;
- Formas indeterminadas - Regras de L'Hospital;

Diferencial

Acréscimos

Seja $y = f(x)$ uma função. Podemos sempre considerar uma variação da variável independente x. Se x varia de x_1 a x_2, definimos o ***acréscimo de x***, denotado por Δx, como:

$\Delta x = x_2 - x_1$.

A variação de x origina uma correspondente variação de y, denotada por Δy, dada por: $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ ou

$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$.

Diferencial

Sejam $y = f(x)$ uma função derivável e Δx um acréscimo de x. Definimos:

- A diferencial da variável independente *x*, denotada por *dx*, como $dx = \Delta x$;
- A diferencial da variável dependente *y*, como $dy = f'(x) \cdot \Delta x$.

De acordo com a definição anterior, podemos escrever

$dy = f'(x) \cdot dx$ ou **$dy/dx = f'(x)$**.

Diferencial

Exemplos:

(i) Se $y = 2x^2 - 6x + 5$, calcule o acréscimo Δy para x = 3 e Δx = 0,01.

(ii) Se $y = 6x^2 - 4$, calcule Δy e dy para x = 2 e Δx = 0,001.

Diferencial

Exemplos:

(iii) Dada $y = 4x^2 - 3x + 1$, ache Δy, *dy* e Δy – dy para quaisquer x e Δx.

(iv) Obtenha um valor aproximado para o volume de um cilindro de altura 12m, raio 7m e espessura 0,05m. Qual o erro decorrente se resolvermos usando diferencial.

Aplicações da Derivada

Taxa de Variação

Sabemos que a velocidade representa a razão de variação do deslocamento por unidade de variação do tempo. Assim, a derivada ***s'(t) é a taxa de variação da função s(t)*** por unidade de variação.

Toda derivada pode ser interpretada como uma taxa de variação.

Aplicações da Derivada

Taxa de Variação

Dada uma função ***y=f(x)***, quando a variável independente varia de ***x*** a ***x + Δx***, a correspondente variação de *y* será $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. O quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ representa a *taxa de variação* de y em relação a *x*.

Aplicações da Derivada

Taxa de Variação

A interpretação da derivada como uma razão de variação tem aplicações práticas nas mais diversas ciências.

Exemplos:

1) Sabemos que a área de um quadrado é função de seu lado. Determinar:

Aplicações da Derivada

Taxa de Variação

Exemplos:

(a) a taxa de variação média da área de um quadrado em relação ao lado quando este varia de 2,5 a 3m.

(b) a taxa de variação da área em relação ao lado quando este mede 4m.

Aplicações da Derivada

Taxa de Variação

Exemplos:

2) Uma cidade X é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo *t* (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia) é, aproximadamente, dado por:

$$f(t) = 64t - \frac{t^3}{3}.$$

Aplicações da Derivada

Taxa de Variação

Exemplos:

(a) Qual é a razão da expansão da epidemia no tempo t = 4?

(b) Qual é a razão da expansão da epidemia no tempo t = 8?

(c) Quantas pessoas serão atingidas pela epidemia no 5º dia?

INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Aplicações da Derivada

Taxa de Variação

Exemplos:

3) Analistas de produção verificaram que, em uma montadora x, o número de peças produzidas nas primeiras *t* horas diárias de trabalho é dado por: $f(t) = \begin{cases} 50(t^2+t), para\ 0 \le t \le 4 \\ 200(t+1), para\ 4 \le t \le 8 \end{cases}$.

(a) Qual a razão de produção (em unidades por hora) após 3 horas de trabalho? E após 7 horas?

(b) Quantas peças são produzidas na 8ª hora de trabalho?

Aplicações da Derivada

Taxa de Variação

Exemplos:

4) Um reservatório de água está sendo esvaziado para limpeza. A quantidade de água no reservatório, em litros, *t* horas após o escoamento ter começado é dada por: $V = 50(80 - t)^2$.

Determinar:

Aplicações da Derivada

Taxa de Variação

Exemplos:

(a) A taxa de variação média do volume de água no reservatório durante as 10 primeiras horas de escoamento.

(b) A taxa de variação do volume de água no reservatório após 8 horas de escoamento.

(c) A quantidade de água que sai do reservatório nas primeiras 5 horas de escoamento.

Aplicações da Derivada

Análise Marginal

A interpretação da derivada como uma taxa de variação é amplamente usada em Economia, englobando conceitos de custo marginal e receita marginal.

Custo Marginal: **$C'(x)$** representa a taxa de variação instantânea do custo total, por unidade de variação da quantidade produzida.

Aplicações da Derivada

Análise Marginal

Receita Marginal: **R'(x)** representa a taxa de variação instantânea da receita total, por unidade de variação da demanda.

Exemplo: Supor que o custo total, no período de um mês, de uma empresa que produz *q* unidades de um produto é dado por:

$$C(q) = \begin{cases} 100 + 2q, & 0 \leq q \leq 600 \\ 1300 + \sqrt{q - 600}, & 600 < q \leq 1500 \\ 1330 + (q - 1500)^2, & q > 1500 \end{cases}$$

e que a receita total é $R(q) = 1{,}32.q$.

Aplicações da Derivada

Análise Marginal

Determinar:

(a) O custo médio por unidade produzida a um nível de produção q = 1000.

(b) O custo marginal para q = 1000.

(c) O nível de produção *q* para o qual o custo marginal iguala a recita marginal.

(d) O intervalo em que pode variar o nível de produção de forma a manter a empresa viável, isto é, tal que a receita total é maior que o custo total.