Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Derivadas

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Ementa

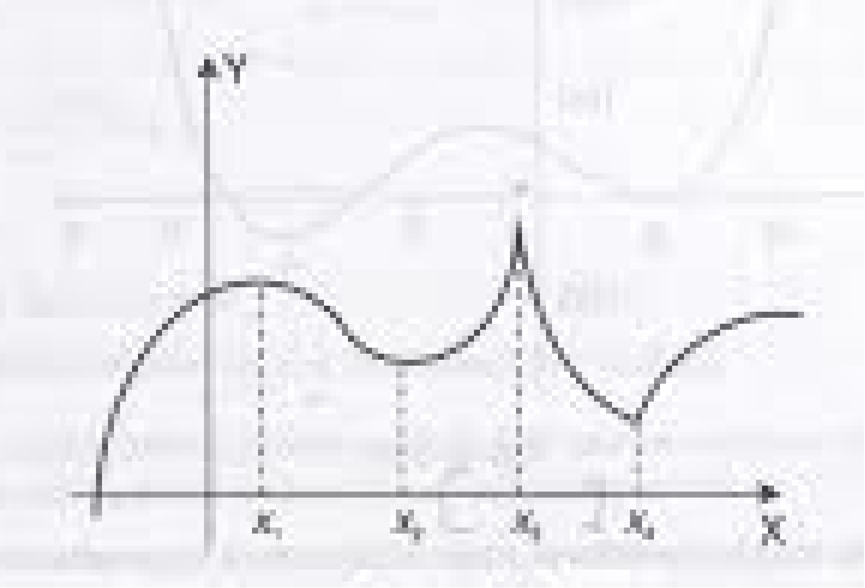
- ~~Reta tangente;~~
- ~~Definição da derivada;~~
- ~~Regras básicas de derivação;~~
- ~~Derivadas parciais e regra da cadeia;~~
- ~~Derivada das funções elementares;~~
- ~~Derivada das funções implícitas;~~
- ~~Derivadas de ordem superior;~~

Ementa

- ~~Taxas de variação;~~
- ~~Diferencial e aplicações;~~
- **Teorema do valor intermediário, de Rolle e do valor médio;**
- Crescimento e decrescimento de uma função;
- Concavidade e pontos de inflexão;
- Problemas de maximização e minimização;
- Formas indeterminadas - Regras de L'Hospital;

Máximos e Mínimos

A figura mostra o gráfico de uma função y = f(x), onde assinalamos pontos de abscissas x_1, x_2, x_3 e x_4.



Máximos e Mínimos

Esses pontos são chamados pontos extremos da função. Os valores $f(x_1)$, $f(x_3)$ são chamados **máximos relativos** e $f(x_2)$, $f(x_4)$ são **mínimos relativos**.

Podemos formalizar as definições:

1) Uma função *f* tem um máximo relativo em c, se existir um intervalo aberto *I*, contendo c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

Máximos e Mínimos

Ess a função.

Os valores **s** e $f(x_2)$,

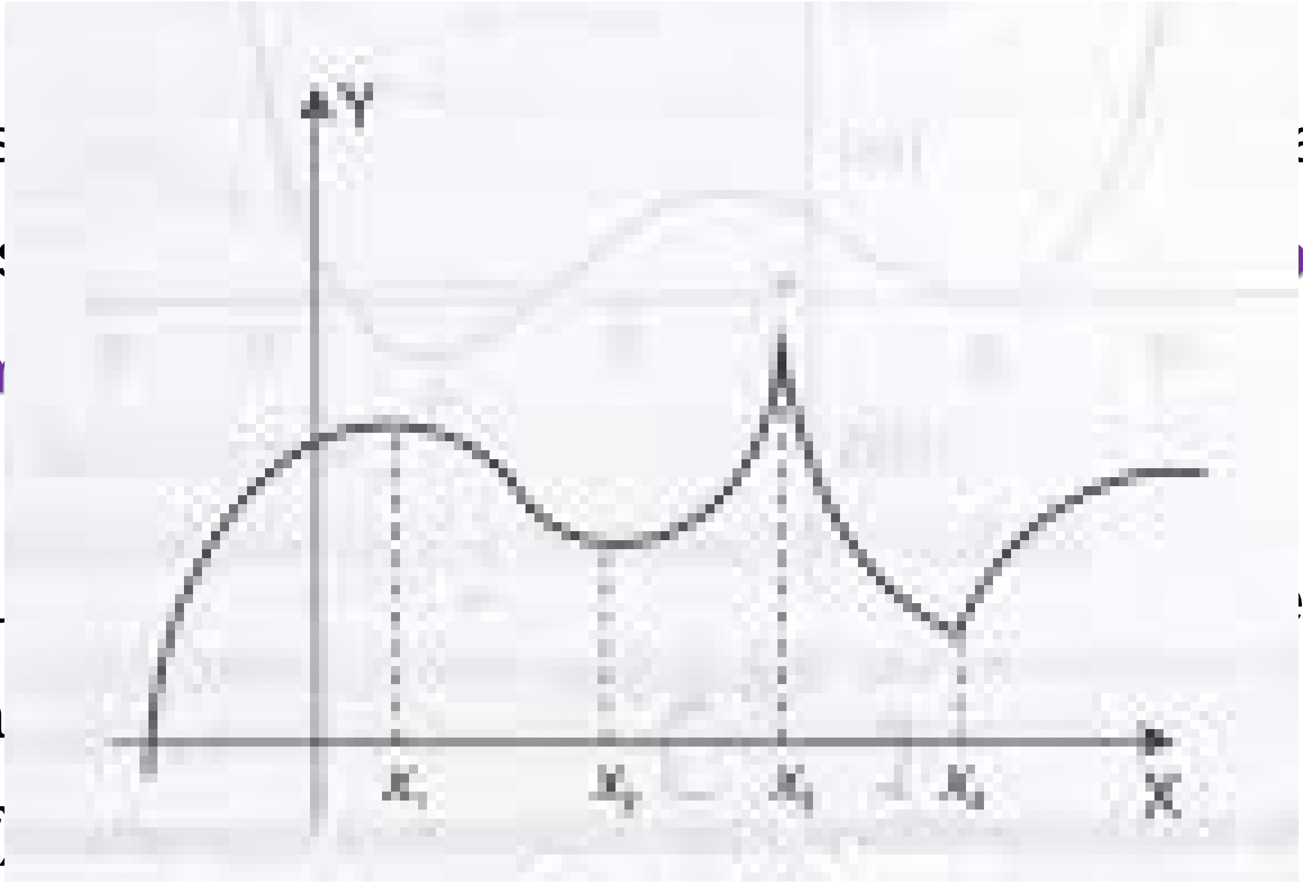
$f(x_4)$ são **m**

Podemos

1) Uma fu existir um

interva todo

$x \in I \cap D(f$



Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Máximos e Mínimos

Esses pontos são chamados pontos extremos da função. Os valores $f(x_1)$, $f(x_3)$ são chamados **máximos relativos** e $f(x_2)$, $f(x_4)$ são **mínimos relativos**.

Podemos formalizar as definições:

1) Uma função *f* tem um máximo relativo em c, se existir um intervalo aberto *I*, contendo c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

Máximos e Mínimos

2) Uma função *f* tem um mínimo relativo em c, se existir um intervalo aberto *I*, contendo c, tal que f(c) ≤ f(x) para todo x ϵ *I* ∩ D(*f*).

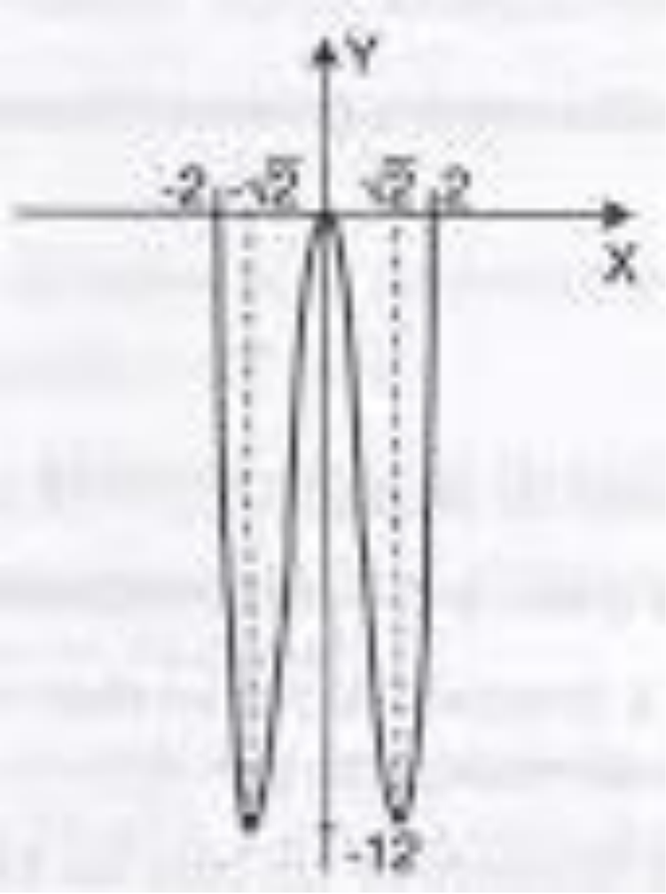
Exemplo:

i) Verifique se a função $f(x) = 3x^4 - 12x^2$ tem máximos e mínimos relativos no intervalo (-2,2).

Máximos e Mínimos

Exemplo:

i) $f(x) = 3x^4 - 12x^2$



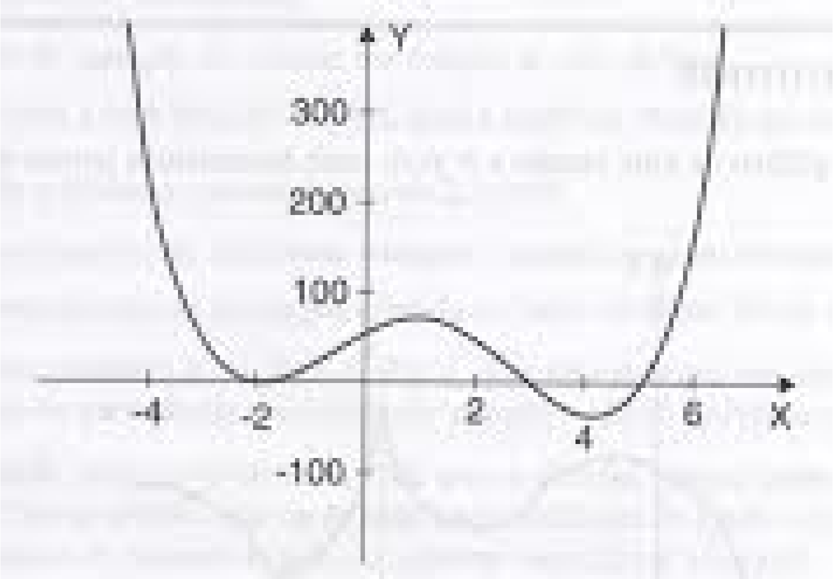
Máximos e Mínimos

Exemplo:

ii) Analisar a existência de pontos extremos da função

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 28x + 60$$

dado o gráfico.



Máximos e Mínimos

Proposição: Suponhamos que *f*(x) existe para todos os valores de x ϵ (a,b) e que *f* tem um extremo relativo em c, onde a < c < b. Se *f* ’(c) existe, então *f* ’(c) = 0.

Assim: O ponto c ϵ D(*f*) tal que *f* ’(c) = 0 ou *f* ’(c) não existe, é chamado ***ponto crítico*** de *f*.

Portanto, uma condição necessária para a **existência** de um **extremo relativo** em um ponto c é que **c** seja um **ponto crítico.**

Máximos e Mínimos

Proposição: Seja $f : [a,b] \to R$ uma função contínua, definida em um intervalo fechado [a,b]. Então f assume máximo e mínimo absoluto em [a,b].

- Para analisarmos o máximo e o mínimo absoluto de uma função quando o intervalo não for especificado usamos as definições que seguem.

Máximos e Mínimos

Definição: Dizemos que f (c) é o máximo absoluto da função f se c $\in$ D(f) e f (c) $\geq$ f (x) para todos os valores de x no domínio de f.

Definição: Dizemos que f (c) é o mínimo absoluto da função f se c $\in$ D(f) e f (c) $\leq$ f (x) para todos os valores de x no domínio de f.

Máximos e Mínimos

Exemplos: Verifique qual o valor máximo ou mínimo absoluto das seguintes funções.

a) $f(x) = x^2 + 6x - 3$

b) $f(x) = -x^2 + 6x - 3$

Teoremas sobre Derivadas

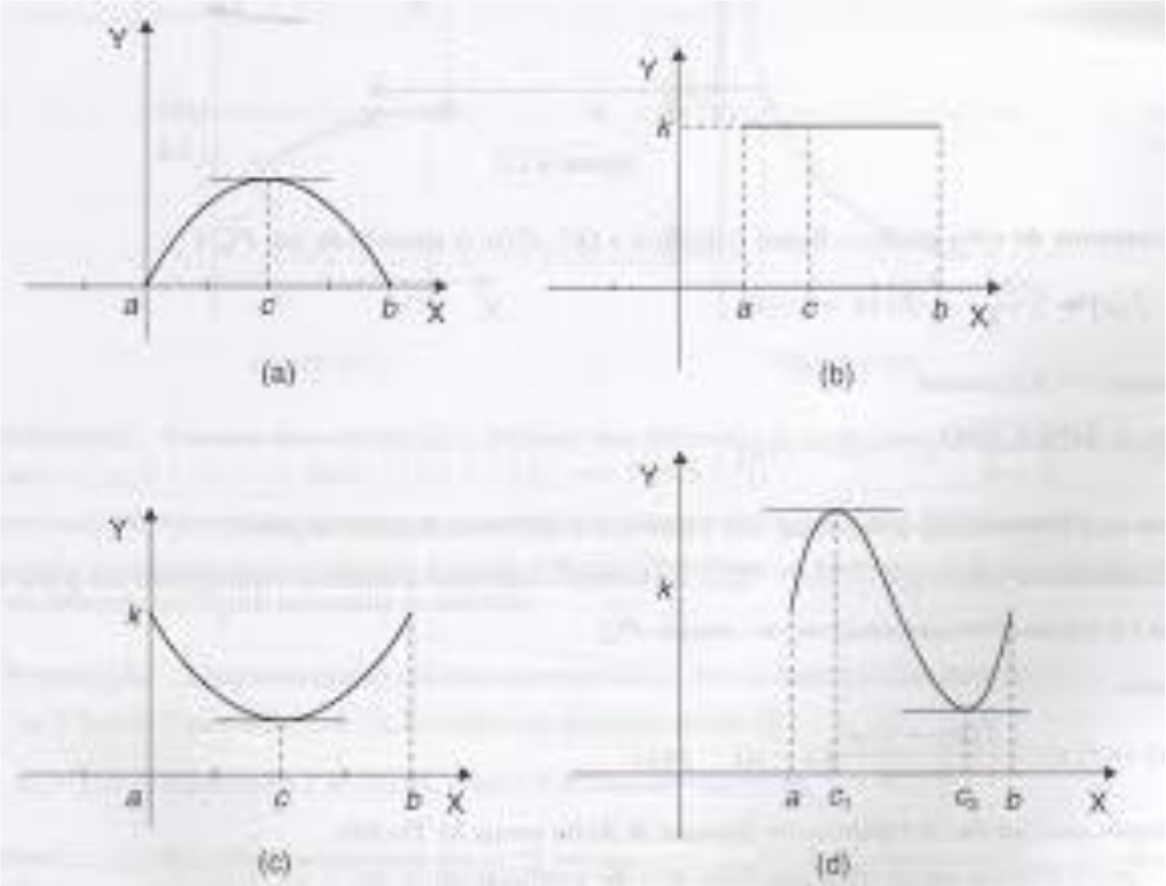
Teorema de Rolle: Seja *f* uma função definida e contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Se $f(a) = f(b) = 0$, então existe pelo menos um ponto c entre a e b tal que $f\,'(c) = 0$.

Sob as mesmas hipóteses o Teorema de Rolle pode ser estendido para funções tais que $f(a) = f(b) \neq 0$.

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Teoremas sobre Derivadas

Exemplos:



Teoremas sobre Derivadas

Exemplos:

1) Encontre os dois pontos de corte do gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x + 4$ com o eixo x e confirme que *f* ‘(c) = 0 em algum ponto c entre esses dois pontos de corte.

Teoremas sobre Derivadas

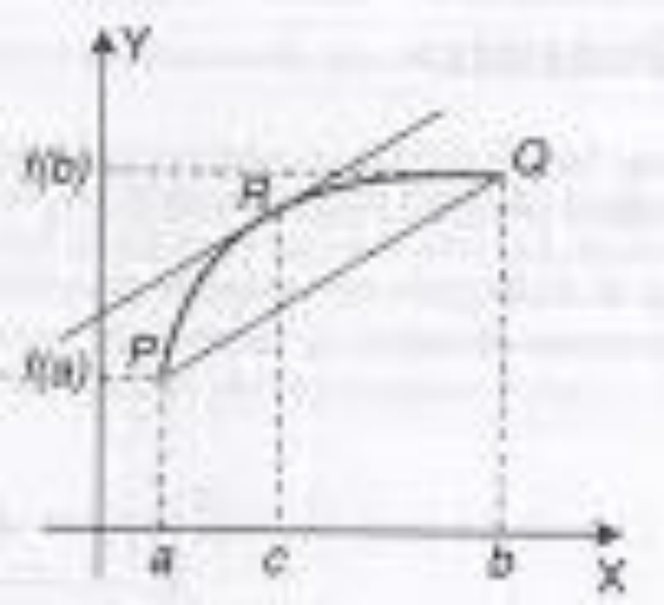
Exemplos:

2) Dada a função $f\,(x) = \text{sen}\,(x)$, verifique se existe algum ponto c no intervalo $[0,2\pi]$, tal que $f\,'(c) = 0$.

Teoremas sobre Derivadas

Teorema do Valor Médio: Seja *f* uma função contínua em [a,b] e derivável em (a,b). Então existe um número c no intervalo (a,b) tal que:

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$



Teoremas sobre Derivadas

Exemplos:

1) Mostre que a função $f(x)=\frac{1}{4}x^3+1$ satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio no intervalo [0,2] e encontre todos os valores de c do intervalo (0,2) nos quais a reta tangente ao gráfico de *f* é paralela à reta secante que liga os pontos (0,f(0)) e (2,f(2)).

Teoremas sobre Derivadas

Exemplos:

2) Um motorista está dirigindo em uma estrada reta com limite de velocidade de 80 km/h. Às 08 horas e 05 minutos da manhã, um controlador cronometra a velocidade do carro como sendo 75 km/h e, 5 minutos depois, um segundo controlador, 10 km adiante na estrada, cronometra a velocidade do carro sendo 80 km/h. Explique por que o motorista poderia receber uma multa por excesso de velocidade.