Engenharia Civil e
Engenharia Mecânica

Derivadas

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Ementa

- ~~Reta tangente;~~
- ~~Definição da derivada;~~
- ~~Regras básicas de derivação;~~
- ~~Derivadas parciais e regra da cadeia;~~
- ~~Derivada das funções elementares;~~
- ~~Derivada das funções implícitas;~~
- ~~Derivadas de ordem superior;~~

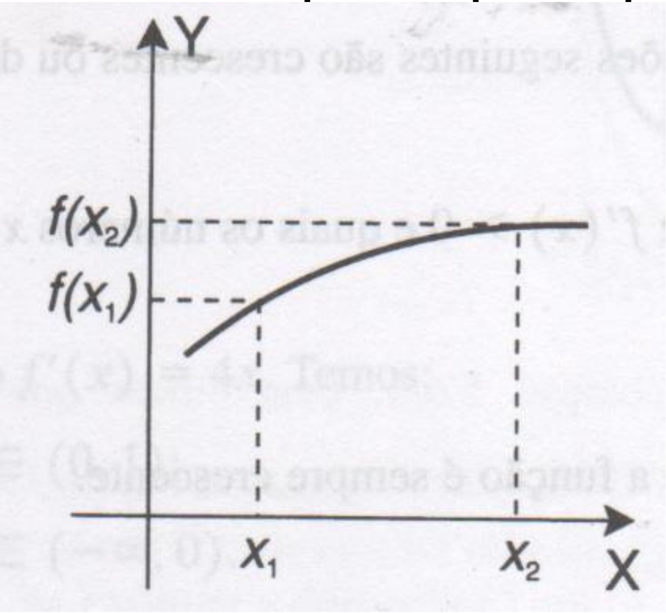
Ementa

- ~~Taxas de variação;~~
- ~~Diferencial e aplicações;~~
- ~~Teorema do valor intermediário, de Rolle e do valor médio;~~
- **Crescimento e decrescimento de uma função;**
- **Concavidade e pontos de inflexão;**
- Problemas de maximização e minimização;
- Formas indeterminadas - Regras de L'Hospital;

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

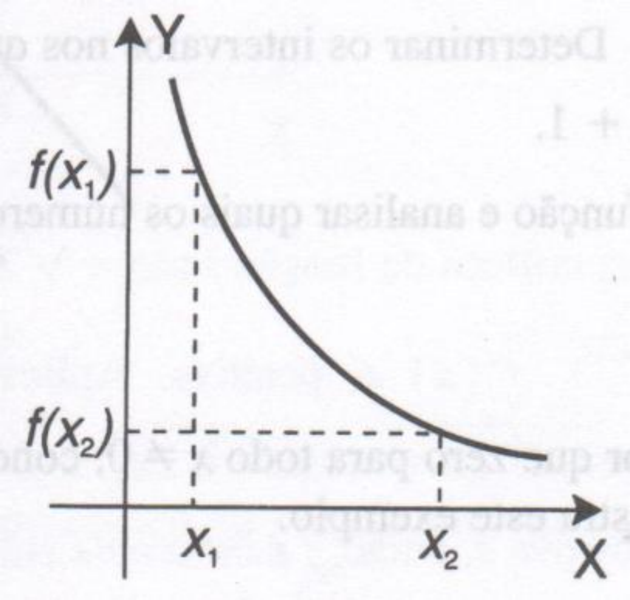
Funções Crescentes e Decrescentes

Definição: Dizemos que uma função *f*, definida em um intervalo *I*, é ***crescente*** neste intervalo se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) \leq f(x_2)$.



Funções Crescentes e Decrescentes

Definição: Dizemos que uma função *f*, definida em um intervalo *I*, é *decrescente* neste intervalo se para quaisquer x_1, x_2 ϵ *I*, $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) \geq f(x_2)$.



Funções Crescentes e Decrescentes

Se uma função é crescente ou decrescente em um intervalo, dizemos que é *monótona* neste intervalo.

Analisando geometricamente o sinal da derivada podemos determinar os intervalos onde a função derivável é crescente ou decrescente. Temos a seguinte proposição:

Funções Crescentes e Decrescentes

Proposição: Seja *f* uma função contínua no intervalo [a,b] e derivável no intervalo (a,b).

(i) Se *f* '(x) > 0 para todo x ϵ (a,b), e *f* é crescente em [a,b].

(ii) Se *f* '(x) < 0 para todo x ϵ (a,b), e *f* é decrescente em [a,b].

Funções Crescentes e Decrescentes

Exemplos: Determinar os intervalos nos quais as funções seguintes são crescentes ou decrescentes.

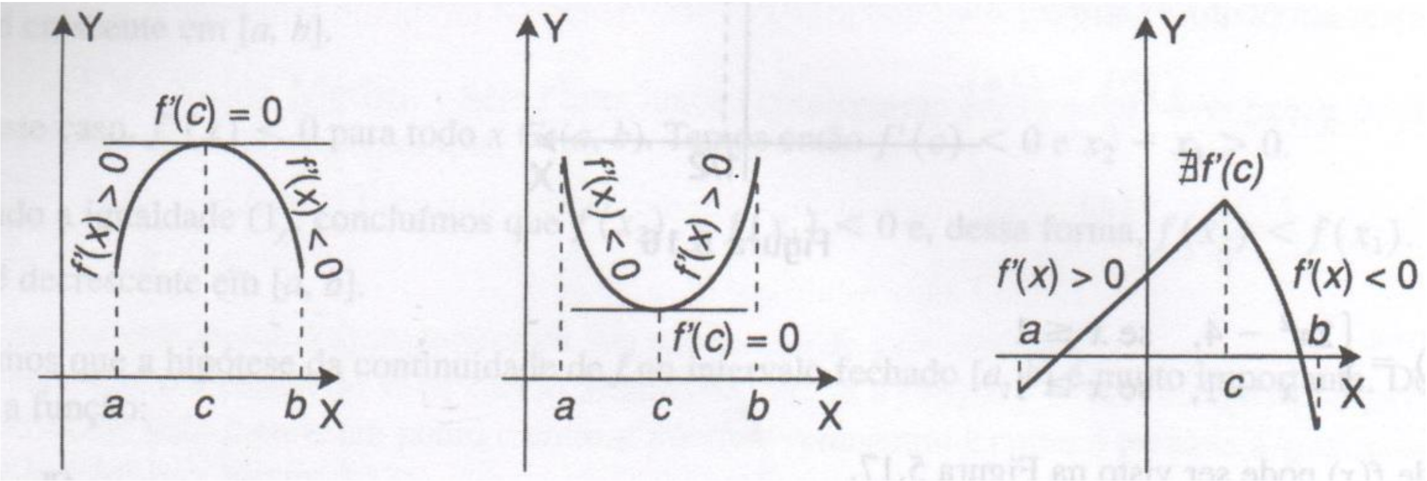
a) $f(x) = x^3 + 1$

b) $f(x) = x^2 - x + 5$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4, & se\ x \leq 1 \\ -x - 1, & se\ x \geq 1 \end{cases}$

Critérios para determinar os Extremos de uma Função

Teorema (*Critério da derivada primeira para determinação de extremos*): Seja *f* uma função contínua num intervalo fechado [a,b] que possui derivada em todo o ponto do intervalo (a,b), exceto possivelmente num ponto c.



Critérios para determinar os Extremos de uma Função

(i) Se $f\,'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f\,'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um máximo relativo em c.

(ii) Se $f\,'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f\,'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um mínimo relativo em c.

Critérios para determinar os Extremos de uma Função

Exemplos:

(i) Encontrar os intervalos de crescimento, decrescimento e os máximos e mínimos relativos da função $f(x) = x^3 - 7x + 6$

(ii) Encontrar os intervalos de crescimento, decrescimento e os máximos e mínimos relativos da função

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 - 3, & se \quad x \leq 5 \\ \dfrac{1}{2}(x+7), & se \quad x > 5 \end{cases}$$

Critérios para determinar os Extremos de uma Função

Teorema (*Critério da derivada segunda para determinação de extremos de uma função*): Sejam *f* uma função derivável num intervalo (a,b) e c um ponto crítico de *f* neste intervalo, isto é, $f'(c) = 0$, com $a < c < b$. Se *f* admite a derivada f'' em (a,b), temos:

(i) Se $f''(c) < 0$, *f* tem um valor máximo relativo em c.
(ii) Se $f''(c) > 0$, *f* tem um valor mínimo relativo em c.

Critérios para determinar os Extremos de uma Função

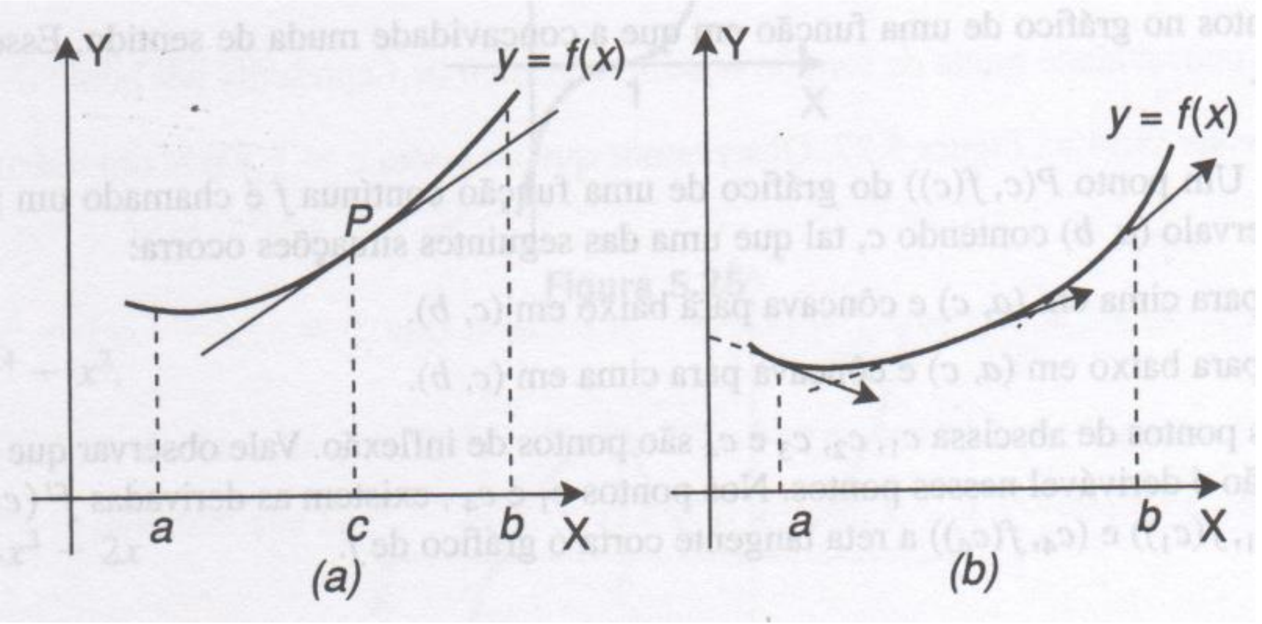
Exemplos: Encontre os máximos e os mínimos relativos de *f* aplicando o critério da derivada segunda.

- $f(x) = 18x + 3x^2 - 4x^3$

- $f(x) = x(x-1)^2$

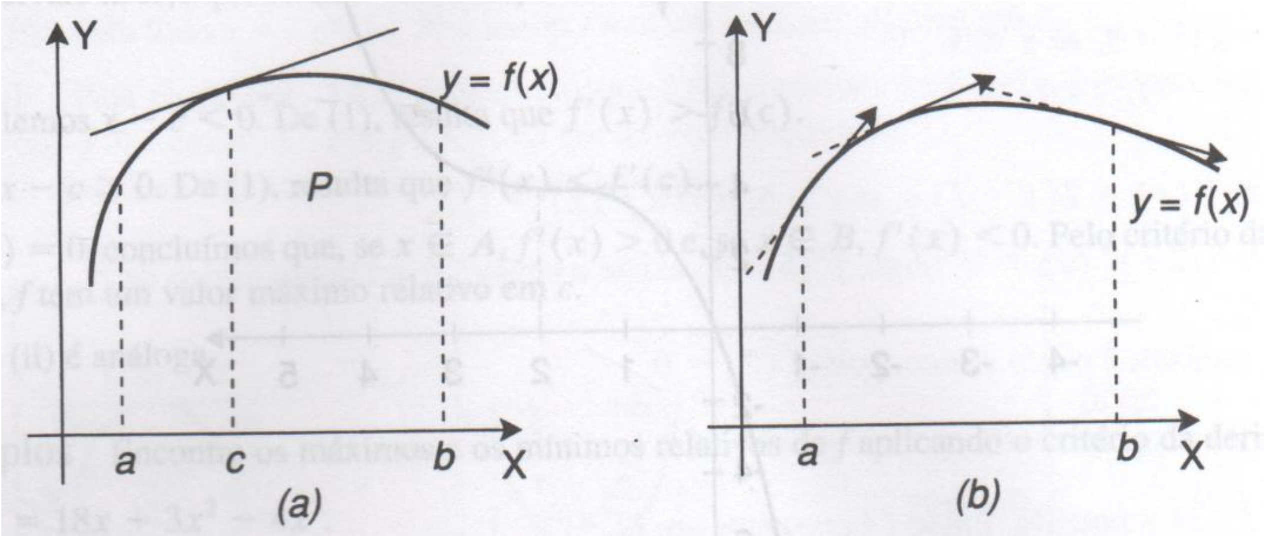
Concavidade e Pontos de Inflexão

O conceito de concavidade é muito útil no esboço do gráfico de uma curva.



Concavidade e Pontos de Inflexão

O conceito de concavidade é muito útil no esboço do gráfico de uma curva.



Concavidade e Pontos de Inflexão

Definição: Uma função é dita côncava para cima no intervalo (a,b), se *f* ‘(x) é crescente nesse intervalo.

Definição: Uma função é dita côncava para baixo no intervalo (a,b), se *f* ‘(x) é decrescente nesse intervalo.

Reconhecer os intervalos onde uma curva tem concavidade voltada para cima ou para baixo, auxilia no traçado do seu gráfico.

Concavidade e Pontos de Inflexão

Proposição: Seja *f* uma função contínua no intervalo [a,b] e derivável até a segunda ordem no intervalo (a,b).

(1) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, então *f* é côncava para cima em (a,b).

(2) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, então *f* é côncava para baixo em (a,b).

Concavidade e Pontos de Inflexão

Definição: Um ponto P(c,f(c)) do gráfico de uma função contínua *f* é chamado um Ponto de Inflexão, se existe um intervalo (a,b) contendo c, tal que uma das seguintes situações ocorra:

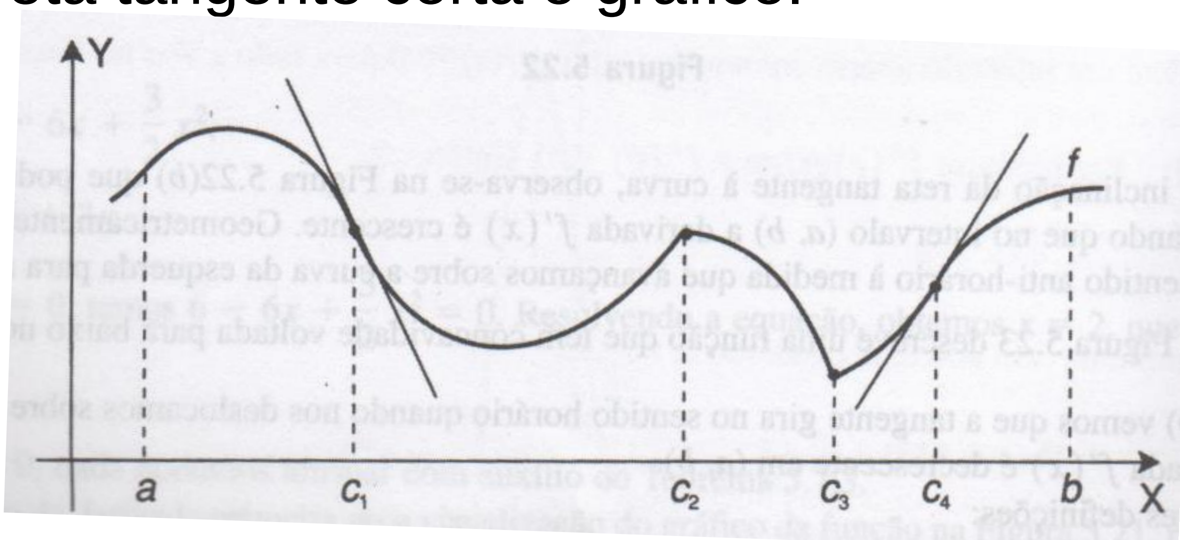
(i) *f* é côncava para cima em (a,c) e côncava para baixo em (c,b).

(ii) *f* é côncava para baixo em (a,c) e côncava para cima em (c,b).

Concavidade e Pontos de Inflexão

c_1, c_2, c_3 e c_4 Pontos de Inflexão

c_2 e c_3 pontos extremos onde a derivada não existe, e c_1 e c_4 ponto a reta tangente corta o gráfico.



Concavidade e Pontos de Inflexão

Exemplos: Determinar os pontos de Inflexão e reconhecer os intervalos onde as funções seguintes tem concavidade voltada para cima ou para baixo.

1) $f(x) = (x-1)^3$

2) $f(x) = x^4 - x^2$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 1-(x-1)^2, & x > 1 \end{cases}$