Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Profª. Me. Samanta Santos da Vara Vanini

EXERCÍCIOS

01)

Em cada um dos seguintes casos, verificar se o Teorema do Valor Médio se aplica. Em caso afirmativo, achar um número c em (a, b), tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpretar geometricamente.

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$; $a = 2, b = 3$.

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$; $a = -1, b = 3$.

(c) $f(x) = x^3$; $a = 0, b = 4$.

(d) $f(x) = x^3$; $a = -2, b = 0$.

(e) $f(x) = \cos x$; $a = 0, b = \pi/2$.

(f) $f(x) = \operatorname{tg} x$; $a = \pi/4, b = 3\pi/4$.

(g) $f(x) = \operatorname{tg} x$; $a = 0, b = \pi/4$.

(h) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$; $a = -1, b = 0$.

(i) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $a = -1, b = 1$.

(j) $f(x) = |x|$; $a = -1, b = 1$.

02)

A função $f(x) = x^{2/3} - 1$ é tal que $f(-1) = f(1) = 0$. Por que ela não verifica o Teorema de Rolle no intervalo $[-1, 1]$?

03)

Seja $f(x) = -x^4 + 8x^2 + 9$. Mostrar que f satisfaz as condições do Teorema de Rolle no intervalo $[-3, 3]$ e determinar os valores de $c \in (-3, 3)$ que satisfaçam $f'(c) = 0$.

04)

Determinar os pontos críticos das seguintes funções, se existirem.

(a) $y = 3x + 4$.

(b) $y = x^2 - 3x + 8$.

(c) $y = 2 + 2x - x^2$.

(d) $y = (x - 2)(x + 4)$.

(e) $y = 3 - x^3$.

(f) $y = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$.

(g) $y = x^4 + 4x^3$.

(h) $y = \operatorname{sen} x$.

(i) $y = \cos x$.

(j) $y = \operatorname{sen} x - \cos x$.

(k) $y = e^x - x$.

(l) $y = (x^2 - 9)^{2/3}$.

05)

Determinar, algebricamente, os intervalos nos quais as funções seguintes são crescentes ou decrescentes. Fazer um esboço do gráfico, comparando os resultados.

(*a*) $f(x) = 2x - 1$.

(*b*) $f(x) = 3 - 5x$.

(*c*) $f(x) = 3x^2 + 6x + 7$.

(*d*) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$.

(*e*) $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$.

(*f*) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \operatorname{sen} x$.

(*g*) $f(x) = 2^x$.

(*h*) $f(x) = e^{-x}$.

(*i*) $f(x) = xe^{-x}$.

(*j*) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$.

06)

Determinar os máximos e mínimos das seguintes funções, nos intervalos indicados.

(*a*) $f(x) = 1 - 3x, [-2, 2]$.

(*b*) $f(x) = x^2 - 4, [-1, 3]$.

(*c*) $f(x) = 4 - 3x + 3x^2, [0, 3]$.

(*d*) $f(x) = x^3 - x^2, [0, 5]$.

(*e*) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}, [-2, 2]$.

07)

Encontrar os intervalos de crescimento, decrescimento, os máximos e os mínimos relativos das seguintes funções:

(*a*) $f(x) = 2x + 5$.

(*b*) $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$.

(*c*) $g(x) = 4x^3 - 8x^2$.

(*d*) $h(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 6x + 5$.

(*e*) $f(t) = \dfrac{t - 1}{t + 1}$.

(*f*) $f(t) = t + \dfrac{1}{t}$.

08)

Encontrar os pontos de máximo e mínimo relativos das seguintes funções, se existirem. Fazer um esboço do gráfico e comparar os resultados.

(a) $f(x) = 7x^2 - 6x + 3.$

(b) $g(x) = 4x - x^2.$

(c) $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x + 9.$

(d) $h(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 4x^2 - 4x + 8.$

(e) $f(t) = \begin{cases} t^2, & t < 0 \\ 3t^2, & t \geq 0. \end{cases}$

(f) $f(x) = 6x^{2/3} - 2x.$

(g) $f(x) = 5 + (x-2)^{7/5}.$

(h) $f(x) = 3 + (2x+3)^{4/3}.$

09)

Determinar os coeficientes a e b de forma que a função $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenha um extremo relativo no ponto $(-2, 1)$.

10)

Encontrar a, b, c e d tal que a função $f(x) = 2ax^3 + bx^2 - cx + d$ tenha pontos críticos em $x = 0$ e $x = 1$. Se $a > 0$, qual deles é ponto de máximo, qual é ponto de mínimo?

11)

Determinar os pontos de inflexão e reconhecer os intervalos onde as funções seguintes tem concavidade voltada para cima ou para baixo.

(a) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 6x.$

(b) $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 10x + 9.$

(c) $f(x) = \frac{1}{x+4}.$

(d) $f(x) = 2x\,e^{-3x}.$

(e) $f(x) = x^2 e^x.$

(f) $f(x) = 4\sqrt{x+1} - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 1.$

<u>Gabarito</u>

1)

a) $\sqrt{6}$ c) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ d) $\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$

e) $\text{arc sen}\, 2/\pi$ g) $\text{arc sec}\, 2/\sqrt{\pi}$ h) $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

2) Porque não é possível encontrar um valor no intervalo [-1,1] onde a derivada seja igual a zero.

3)

$0;\ -2;\ 2$

4)

a) $\nexists$; b) $3/2$; c) 1;

d) -1; e) 0; f) $\nexists$;

g) $0;\ -3$; h) $\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$; i) $k\pi, k \in Z$;

j) $\dfrac{3\pi}{4} + k\pi, k \in Z$; k) 0; l) $0;\ 3;\ -3$;

5)

a) $(-\infty, +\infty)$ crescente

b) $(-\infty, +\infty)$ decrescente

c) $[-1, +\infty)$ crescente; $(-\infty, -1]$ decrescente

d) $(-\infty, -2] \cup [2/3, +\infty)$ crescente; $[-2, 2/3]$ decrescente

e) $(-\infty, -\sqrt{7/3}\,] \cup [\,\sqrt{7/3}, +\infty)$ crescente ; $[-\sqrt{7/3}, \sqrt{7/3}\,]$ decrescente;

f) $\left[\frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \frac{4\pi}{3} + 2n\pi\right], n \in Z$ decrescente; $\left[\frac{-2\pi}{3} + 2n\pi, \frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right], n \in Z$ crescente

g) $(-\infty, +\infty)$ crescente

h) $(-\infty, +\infty)$ decrescente

i) $(-\infty, +1]$; crescente; $[1, +\infty)$ decrescente

j) $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ crescente; $[0,1) \cup (1,2]$ decrescente

6)

a) 7; −5

b) 5; −4

d) 100; −4/27

e) 1/2;−1/2

7) a) é cresc em todos os reais.

b) cresc $(-1, \infty)$ decres $(-\infty, -1)$ ponto mín em $x = -1$

c) cresc (-∞, 0) U (4/3, ∞) decres (0,4/3) máx em x = 0 e mín em x = 4/3

d) cresc (-∞, -3) U (2, ∞) decres (-3, 2) máx em x = -3 e mín em x = 2

e) cresc (-∞, -1) U (-1, ∞)

f) cresc (-∞, -1) U (1, ∞) decres (-1, 0) U (0, 1) máx em x = -1 e mín em x = 1

8)

a) $\nexists$; 3/7 b) 2; $\nexists$ c) -7; 1

d) $\nexists$; 1 e) $\nexists$; 0 f) 8

g) $\nexists$; $\nexists$ h) $\nexists$; $-3/2$ i) 2; -2

j) $-1+\sqrt{5}$; $-1-\sqrt{5}$ k) -2; $-4/5$ l) 64/5; 0

9)

$a = 3; b = -3$

10)

a é qualquer real; b $= -3a$; c $= 0$; d é qualquer real

11)

a) $(5/3, f(5/3))$; $(-\infty, 5/3)$ côncava para cima; $(5/3, +\infty)$ côncava para baixo

b) $(-1/3, f(-1/3))$; $(2, f(2))$; $(-\infty, 1/3) \cup (2, +\infty)$ côncava para cima; $(-1/3, 2)$ côncava para baixo

c) $\nexists$; $(-4, +\infty)$ côncava para cima; $(-\infty, -4)$ côncava para baixo

d) $(2/3, f(2/3))$; $(2/3, +\infty)$ côncava para cima; $(-\infty, 2/3)$ côncava para baixo

e) $(-2 \pm \sqrt{2}, f(-2 \pm \sqrt{2}))$; $(-\infty, -2-\sqrt{2}) \cup (-2+\sqrt{2}, +\infty)$ côncava para cima; $(-2, \sqrt{2}, -2+\sqrt{2})$ côncava para baixo

f) $\nexists$; $(-1, +\infty)$ côncava para baixo

w