

# Integrais

## Ementa

### INTEGRAL INDEFINIDA

- ❖ Conceito e propriedades da integral indefinida;
- ❖ Técnicas de integração: substituição e partes;
- ❖ Integração por substituição trigonométrica;
- ❖ Integração de funções racionais por frações parciais;

# Engenharia Civil e Engenharia Mecânica



## Ementa

### INTEGRAL DEFINIDA

- ❖ Conceito e propriedades da integral definida;
- ❖ Teorema fundamental do cálculo;
- ❖ Cálculo de áreas, comprimento de arcos, volumes e volumes de revolução;
- ❖ Integrais impróprias;
- ❖ Integrais múltiplas;

## Anti-diferencial ou Integral

Chama-se antidiferenciação ou integração a operação inversa da diferenciação, ou seja: Dada

$$y = f(x) \quad \rightarrow \quad dy = f'(x) dx$$



## Anti-diferencial ou Integral

Seja  $f(x)$  uma função contínua num certo intervalo  $[a, b]$ .

A primitiva da função  $f$  é uma função  $F(x)$ , tal que:  $F'(x) = f(x)$

### Exemplos:

1)  $x^3$  é primitiva de  $3x^2$ ?

2)  $x^3 + 2$  é primitiva de  $3x^2$ ?

3)  $x^3 + 100$  é primitiva de  $3x^2$ ?

4)  $x^4$  é primitiva de  $4x$ ?

## Anti-diferencial ou Integral

Se  $F(x)$  é primitiva de  $f(x)$  indicamos:  $F(x) = \int f(x) dx$  .

Mas como  $F(x) + c$  também é primitiva da  $f(x)$  então podemos indicar:

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

O símbolo (operador)  $\int$  denota a operação de

**antidiferenciação** (*Integral*).

## Anti-diferencial ou Integral

O processo de encontrar antiderivadas é denominado antiderivação, antidiferenciação ou **INTEGRAÇÃO**, assim se

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$$

para enfatizar esse processo de integração, reescrevemos

usando a notação de integral:  $\int f(x) dx = F(x) + C$

onde C deve ser interpretada como uma constante arbitrária.

## Anti-diferencial ou Integral

### Observações:

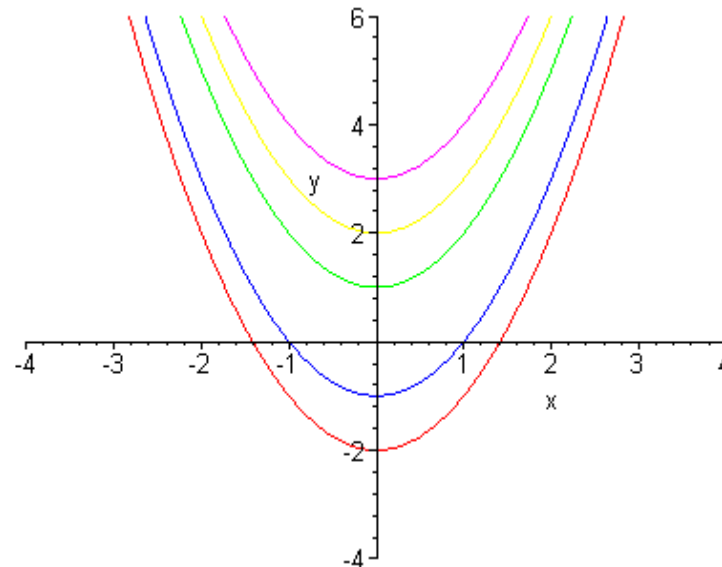
- ❖ A expressão  $\int f(x) dx$  é denominada integral indefinida.
- ❖ Indefinida por que o resultado da antidiferenciação é uma função “genérica”.
- ❖ O sinal de  $f$  é o sinal da integral.



## Anti-diferencial ou Integral

### Observações:

- ❖ A constante  $C$  é uma constante de integração,  $y = \int 2x \, dx = x^2$  conforme o gráfico abaixo.



## Anti-diferencial ou Integral

### TEOREMAS DE INTEGRAÇÃO

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

Exemplos:

$$a) \int x^2 dx =$$

$$b) \int x^3 dx =$$

$$c) \int \frac{dx}{x^3} =$$

$$d) \int \sqrt{x} dx =$$

$$e) \int x^5 dx =$$

## Anti-diferencial ou Integral

### TEOREMAS DE INTEGRAÇÃO

$$2. \int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

Exemplos:

$$a) \int 3x^2 dx =$$

$$b) \int -x^3 dx =$$

$$c) \int \frac{5}{x^2} dx =$$

$$d) \int 2\sqrt[3]{x} dx =$$

## Anti-diferencial ou Integral

### TEOREMAS DE INTEGRAÇÃO

$$3. \int dx = x + c$$

Exemplos:

$$a) \int 3 dx =$$

$$b) \int \frac{1}{2} dx =$$

$$c) \int -5 dx =$$

## Anti-diferencial ou Integral

### TEOREMAS DE INTEGRAÇÃO

$$4. \int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$$

Exemplos:

$$a) \int (3x + 4)^2 dx =$$

$$b) \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx =$$

$$c) \int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} dx =$$

$$d) \int \sqrt{x}(x+2) dx =$$

## Anti-diferencial ou Integral

### Integração por substituição de variável

$$\int f(g(x))[g'(x)]dx = G(g(x)) + c$$

**Exemplo:** calcular  $\int 2x \sqrt{x^2 + 3} dx$

## Anti-diferencial ou Integral

### Exemplos:

a)  $\int (2x + 1)^2 dx$

b)  $\int 2x(3x^2 - 2)^3 dx$

c)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2 + 3}}$

d)  $\int 2(1 + 2x)^4 dx$

e)  $\int 10x \sqrt{5x^2 - 4} dx$

f)  $\int (x - 1)^4 dx$

g)  $\int \frac{x + 1}{(x^2 + 2x - 3)^2} dx$

h)  $\int \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} dx$

## Anti-diferencial ou Integral

### Integral da Função Exponencial

$$\int e^u du = e^u + c$$

$$\int e^{-u} du = -e^{-u} + c$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$$

**Exemplo:**  $\int 5^{3x} dx$



## Anti-diferencial ou Integral

### Exemplos:

a)  $\int 2e^x dx$

b)  $\int e^{5x} dx$

c)  $\int e^{-2x} dx$

d)  $\int e^{2-5x} dx$

e)  $\int (e^{3x} + x) dx$

f)  $\int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$

g)  $\int xe^{x^2} dx$

h)  $\int xe^{5x^2} dx$

## Anti-diferencial ou Integral

### Integral da Função logarítmica

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c$$

**Exemplo:**  $\int \frac{dx}{3-2x}$

## Anti-diferencial ou Integral

### Exemplos:

a)  $\int \frac{dx}{x}$

b)  $\int \frac{4}{x} dx$

c)  $\int \frac{4x dx}{x^2 + 1}$

d)  $\int \frac{3}{3x+1} dx$

e)  $\int \frac{4x^3 dx}{(2+x^4)}$

## Anti-diferencial ou Integral

### Integral das Funções Trigonométricas

- $\int \cos(u)du = \text{sen}(u) + C$
- $\int \text{sen}(u)du = -\cos(u) + C$
- $\int \sec^2(u)du = \text{tg}(u) + C$
- $\int \sec(u).\text{tg}(u)du = \sec(u) + C$
- $\int \cos \sec^2(u)du = -\cot g(u) + C$
- $\int \cos \sec(u).\cot g(u)du = -\cos \sec(u) + C$
- $\int \text{tg}(u)du = \ln|\sec(u)| + C = -\ln|\cos(u)| + C$
- $\int \cot g(u)du = \ln|\text{sen}(u)| + C$
- $\int \sec(u)du = \ln|\sec(u) + \text{tg}(u)| + C$
- $\int \cos \sec(u)du = \ln|\cos \sec(u) - \cot g(u)| + C$

## Anti-diferencial ou Integral

### Integral das Funções Trigonométricas

#### Exemplos:

$$1) \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$$

$$2) \int \operatorname{tg}(3x) dx$$

$$3) \int \frac{dx}{\cos^2(2x)}$$

## Anti-diferencial ou Integral

### Exemplos:

a)  $\int 2 \cos(x) dx$

b)  $\int 3x^2 \sin(x^3) dx$

c)  $\int \sin(2x) dx$

d)  $\int x \cos(x^2) dx$

e)  $\int \operatorname{tg}(3x) dx$

f)  $\int \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

g)  $\int \sec(3x) \operatorname{tg}(3x) dx$