

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica



Integrais

Ementa

INTEGRAL INDEFINIDA

- ❖ ~~Conceito e propriedades da integral indefinida;~~
- ❖ ~~Técnicas de integração: substituição e partes;~~
- ❖ **Integração por substituição trigonométrica;**
- ❖ **Integração de funções racionais por frações parciais;**

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica



Ementa

INTEGRAL DEFINIDA

- ❖ Conceito e propriedades da integral definida;
- ❖ Teorema fundamental do cálculo;
- ❖ Cálculo de áreas, comprimento de arcos, volumes e volumes de revolução;
- ❖ Integrais impróprias;
- ❖ Integrais múltiplas;

Integração por Partes

O processo de *integração por partes* é indicado quando o integrando possui um produto do tipo:

- **função potência x função logarítmica;**
- **função potência x função trigonométrica;**
- **função potência x função exponencial.**

E todas as outras decorrentes da combinação entre estas funções.

Integração por Partes

Tomando como ponto de partida a **Derivação** pela **Regra do Produto** temos:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u'v + uv' \quad (\text{Regra do Produto})$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}(uv) \right] = \int u'v dx + \int uv' dx \quad (\text{Integrando ambos os lados})$$

$$uv = \int v \underline{u' dx} + \int u \underline{v' dx} \quad (\text{Reescrevendo a expressão})$$

$$uv = \int v du + \int u dv \quad (\text{Escrevendo na forma diferencial})$$

Integração por Partes com **u** e **v**
funções diferenciáveis de **x**.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Integração por Partes

A **integral por partes** pode ser aplicada *sucessivas vezes* para um mesmo exercício. Quando um dos fatores, for potência procura-se diminuir o expoente desta potência.

Dica: Ao aplicarmos esta técnica devemos separar o **integrando** em **duas** partes, ***u*** e ***dv***, levando em conta duas situações:

1º- A parte escolhida como ***dv*** deve ser facilmente integrável;

2º- $\int vdu$ deve ser mais simples do que $\int udv$;

Integração por Partes

Exemplo:

1) $\int x e^x dx$

2) $\int x \text{sen}(2x) dx$

3) $\int e^x \text{sen}(x) dx$

4) $\int x \ln(x) dx$

5) $\int x^2 e^{-x} dx$

6) $\int e^x \cdot \cos(x) dx$

Integrais envolvendo potências de funções trigonométricas

SENO E COSSENO

Caso 1. $\int \sin^n u du$ ou $\int \cos^n u du$ onde n é um número inteiro ímpar

Usamos $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, então $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Exemplo : $\int \cos^3 x dx$

Integrais envolvendo potências de funções trigonométricas

SENO E COSSENO

Caso 2. $\int \text{sen}^n u du$ ou $\int \text{cos}^n u du$ onde n é um número par

$$\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Usamos:

$$\text{cos}^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Exemplo: $\int \text{sen}^2 x dx$

Integrais envolvendo potências de funções trigonométricas

SENO E COSSENO

Caso 3. $\int \sin^n x \cos^m x dx$ onde pelo menos um dos expoente é ímpar (abre-se o expoente ímpar e substitui-se).

Usamos $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, então $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Exemplo: $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$

Integrais envolvendo potências de funções trigonométricas

SENO E COSSENO

Caso 4. $\int \sin^n x \cos^m x dx$ onde m e n são pares

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Usamos:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Exemplo: $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

Integração por substituição trigonométrica

Até agora resolvemos integrais envolvendo potências e produtos de funções trigonométricas. Surgem integrais que envolvem expressões tais como: $\sqrt{a^2 - b^2u^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2u^2}$ e $\sqrt{b^2u^2 - a^2}$.

É possível resolver estas integrais fazendo uma **substituição trigonométrica**, que resulta em uma integral de funções trigonométricas.

Integração por substituição trigonométrica

Podemos expressá-las sem os radicais, utilizando a chamada **Substituição Trigonométrica**, conforme a tabela:

Caso	Radical	Subs. Trigonométrica	Transformada	Trigonometria no Triângulo Retângulo
I	$\sqrt{a^2 - b^2 u^2}$	$u = \left(\frac{a}{b}\right) \text{sen}(\theta)$	$a \cdot \sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta)} = a \cdot \text{cos}(\theta)$	$\text{tg}\theta = \frac{\text{CO}}{\text{CA}}$
II	$\sqrt{a^2 + b^2 u^2}$	$u = \left(\frac{a}{b}\right) \text{tg}(\theta)$	$a \cdot \sqrt{1 + \text{tg}^2(\theta)} = a \cdot \text{sec}(\theta)$	$\text{cos}\theta = \frac{\text{CA}}{\text{HI}}$
III	$\sqrt{b^2 u^2 - a^2}$	$u = \left(\frac{a}{b}\right) \text{sec}(\theta)$	$a \cdot \sqrt{\text{sec}^2(\theta) - 1} = a \cdot \text{tg}(\theta)$	$\text{sen}\theta = \frac{\text{CO}}{\text{HI}}$

Integração por substituição trigonométrica

Demonstraremos o desenvolvimento do radical $\sqrt{a^2 - b^2 u^2}$,
os demais casos são análogos.

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - b^2 u^2} &= \sqrt{a^2 - b^2 \left(\frac{a}{b} \operatorname{sen}(\theta) \right)^2} = \sqrt{a^2 - b^2 \cdot \frac{a^2}{b^2} \operatorname{sen}^2(\theta)} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} = \sqrt{a^2 \cdot (1 - \operatorname{sen}^2(\theta))} = \\ &= a \cdot \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta)} = a \sqrt{\operatorname{cos}^2(\theta)} = a \operatorname{cos}(\theta)\end{aligned}$$

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica



Integração por substituição trigonométrica

Observação: Verifique que a variável final é θ .

A expressão correspondente, na variável original (x), é obtida através das relações do *triângulo retângulo*.

Integração por substituição trigonométrica

$$\sqrt{a^2 - u^2} = a \cdot \cos(\theta)$$

$$u = a \cdot \sin(\theta)$$

$$du = a \cdot \cos(\theta) d\theta$$

$$\sqrt{a^2 + u^2} = a \cdot \sec(\theta)$$

$$u = a \cdot \tan(\theta)$$

$$du = a \cdot \sec^2(\theta) d\theta$$

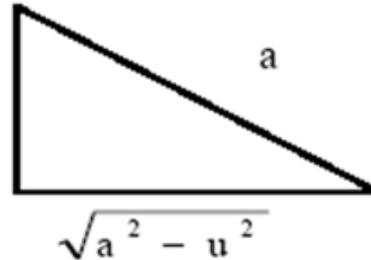
$$\sqrt{u^2 - a^2} = a \cdot \tan(\theta)$$

$$u = a \cdot \sec(\theta)$$

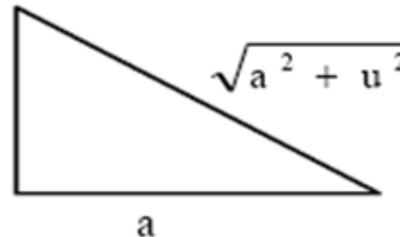
$$du = a \cdot \sec(\theta) \cdot \tan(\theta) d\theta$$



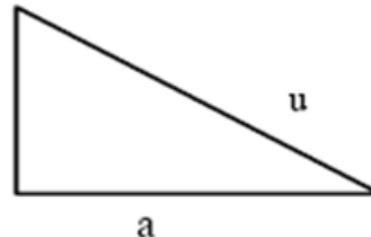
u



u



$\sqrt{u^2 - a^2}$



Integração por substituição trigonométrica

Exemplos:

$$1) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$2) \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx$$

$$3) \int \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}} dx$$

$$4) \int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} dx$$

Integração de funções racionais

Uma função racional $f(x)$ é definida como o quociente de duas funções polinomiais, ou seja, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios.

As integrais de algumas funções racionais simples, como por exemplo: $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^2+1}$, $\frac{2x}{x^2+1}$ são imediatas ou podem ser resolvidas por substituição, conforme vistas anteriormente.

Integração de funções racionais

Proposição: Se $p(x)$ é um polinômio com coeficientes reais, $p(x)$ pode ser expresso como um produto de fatores lineares e/ou quadráticos, todos com coeficientes reais.

Por exemplo, o polinômio $q(x) = x^2 - 3x + 2$ pode ser escrito como um produto de fatores lineares, ou seja, $q(x) = (x - 2)(x - 1)$.

Integração de funções racionais

Estamos interessados na integração de expressões da forma $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ onde o grau de $p(x)$ é menor que o grau de $q(x)$.

Caso isso não ocorra, devemos primeiro efetuar a divisão de $p(x)$ por $q(x)$.

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica



Integração de funções racionais

Caso 1 Os fatores de $q(x)$ são lineares e distintos, isto é, não se repetem. Neste caso podemos escrever $q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$, onde $a_i = 1, \dots, n$, são distintos dois a dois.

Integração de funções racionais

A decomposição da função racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ em

frações mais simples é dada por:

$$f(x) = \frac{A_1}{(x - a_1)} + \frac{A_2}{(x - a_2)} + \dots + \frac{A_n}{(x - a_n)}$$

onde A_1, A_2, \dots, A_n são constantes que devem ser determinadas.

Exemplo: $\int \frac{1}{(x - 1)(x + 2)} dx$

Integração de funções racionais

Caso 2 Os fatores $Q(x)$ são todos lineares e alguns se repetem.

Se algum fator linear $(x - a_i)$ de $q(x)$ tem multiplicidade r , a esse fator corresponderá uma soma de frações parciais da

forma:
$$\frac{B_1}{(x - a_i)^r} + \frac{B_2}{(x - a_i)^{r-1}} + \dots + \frac{B_r}{(x - a_i)}$$
, onde B_1, B_2, \dots, B_r

são constantes que devem ser determinadas.

Exemplo:
$$\int \frac{x^3 - 1}{(x^2)(x - 2)^3} dx$$