

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica



Integrais

Ementa

INTEGRAL INDEFINIDA

- ❖ ~~Conceito e propriedades da integral indefinida;~~
- ❖ ~~Técnicas de integração: substituição e partes;~~
- ❖ ~~Integração por substituição trigonométrica;~~
- ❖ ~~Integração de funções racionais por frações parciais;~~

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica



Ementa

INTEGRAL DEFINIDA

- ❖ **Conceito e propriedades da integral definida;**
- ❖ **Teorema fundamental do cálculo;**
- ❖ **Cálculo de áreas, comprimento de arcos, volumes e volumes de revolução;**
- ❖ **Integrais impróprias;**
- ❖ **Integrais múltiplas;**

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO: INTEGRAL DEFINIDA

Integral definida

Teorema fundamental do cálculo: Seja f contínua em $[a, b]$ tal que existe uma função $F(x)$ com $F'(x) = f(x)$, então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Exemplo: $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica



INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

Historicamente, foi da necessidade de calcular áreas de figuras planas cujos contornos não são segmentos de reta que surgiu a noção de integral.

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica



INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

O processo para determinar a área de uma região sob um gráfico da função $f: [a, b]$, consiste em dividirmos o intervalo $[a, b]$ em subintervalos suficientemente pequenos que neles $f(x)$ possa ser considerada constante e com isso formar “n” retângulos nos quais serão calculados em cada um a sua área e a soma das áreas dos “n” retângulos será aproximadamente a área procurada.

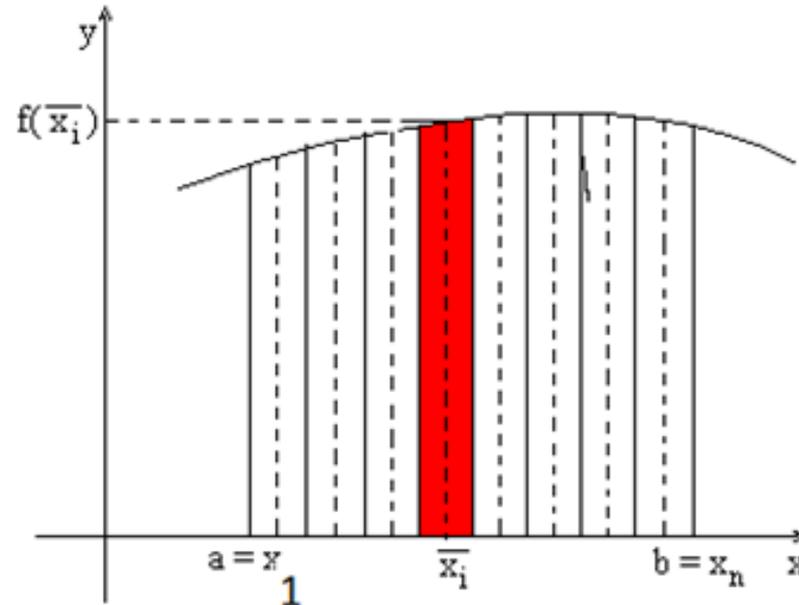
INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

$$A_1 = \Delta x \cdot f(\bar{x}_1)$$

$$A_2 = \Delta x \cdot f(\bar{x}_2)$$

...

$$A \cong \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(\bar{x}_i)$$



INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

De um modo geral, se f é uma função contínua em $[a, b]$, o n° do qual a soma $A \cong \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(\bar{x}_i)$ se aproxima a medida em que os Δx se tornam simultaneamente pequenos é chamado integral de f em $[a, b]$ e é representado por

$$\int_a^b f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x$$

que é chamado soma de Riemann

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

Exemplo:

Faça uma estimativa da área A sob o gráfico de $f(x) = 250 - \frac{x^2}{10}$,
 $0 \leq x \leq 50$, dividindo o intervalo para x $[0, 50]$ em subintervalos
de comprimento 10.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

$$A_1 = 10 \left(250 - \frac{5^2}{10} \right) = 2475$$

$$A_2 = 10 \left(250 - \frac{15^2}{10} \right) = 2275$$

$$A_3 = 10 \left(250 - \frac{25^2}{10} \right) = 1875$$

$$A_4 = 10 \left(250 - \frac{35^2}{10} \right) = 1275$$

$$A_5 = 10 \left(250 - \frac{45^2}{10} \right) = 475$$

Somando todas as áreas $A_1 + A_2 + \dots + A_5$ obtemos a área total que pode ser expressa por:

$$A \cong \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(\bar{x}_i) \cong 8375$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL



x_i	$f(x_i)$	$P=f(x_i) \cdot \Delta x$
5	247,5	2475
15	227,5	2275
25	187,5	1875
35	127,5	1275
45	47,5	475
		8375

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

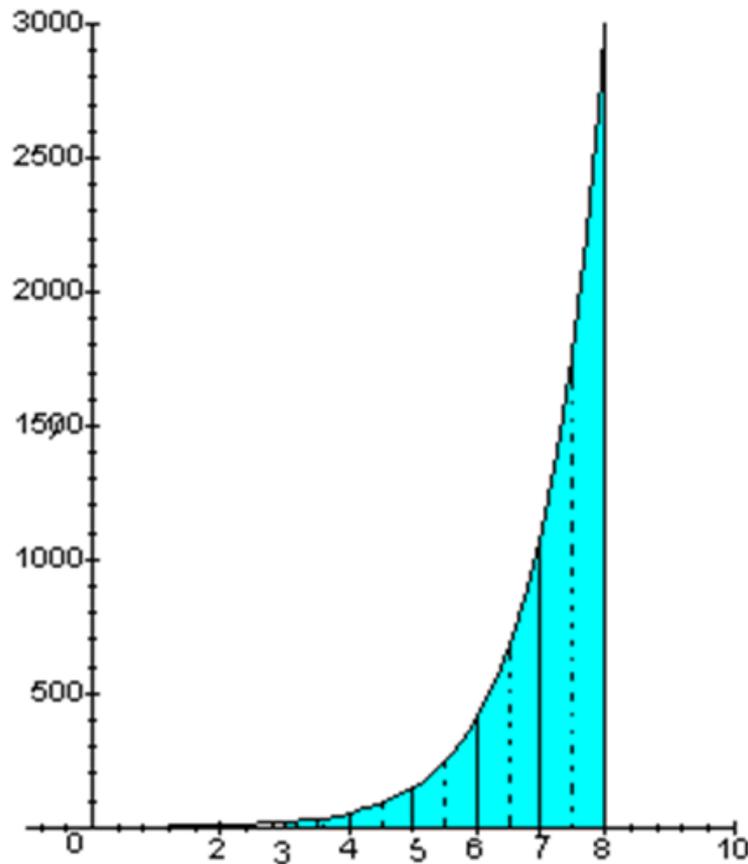


INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

Exemplo:

Ache a área aproximada abaixo da curva $f(x) = e^x$ e acima do eixo x ou seja, acima do intervalo $[3, 8]$, usando ponto médio com 5 intervalos.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL



x_i	$f(x_i)$	$P=f(x_i) \cdot \Delta x$
$X_1= 3,5$	33,11545	33,115452
$X_2= 4,5$	90,01713	90,0171313
$X_3= 5,5$	244,6919	244,691932
$X_4= 6,5$	665,1416	665,141633
$X_5= 7,5$	1808,042	1808,04241
		2841,00856

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica



INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

Exemplo:

Seja a função $f(x) = x^2$ e considere a região R sob o gráfico de f no intervalo $[0,1]$. Para obter uma aproximação da área de R , construímos quatro retângulos, isto é, dividimos o intervalo $[0,1]$ em quatro subintervalos.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

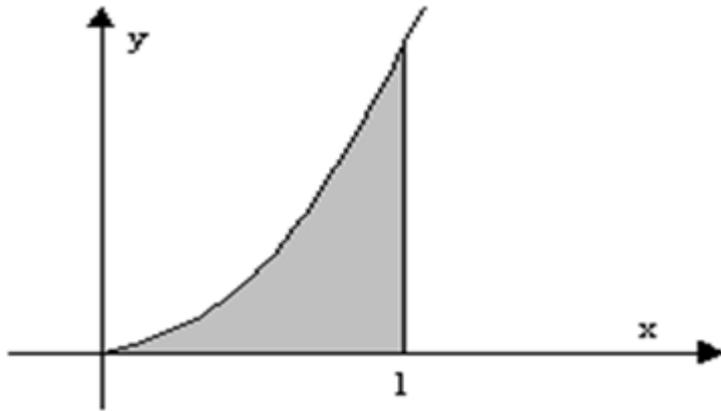


Tabela 1

Número de Retângulos n	4	8	16	32	64	100	200
Aproximação de A	0,328127	0,332031	0,333008	0,333252	0,333313	0,333325	0,333331

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

De um modo geral, se f é uma função contínua em $[a, b]$, o n° do qual a soma $A \cong \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(\bar{x}_i)$ se aproxima na medida em que os Δx se tornam simultaneamente pequenos é chamado integral de f em $[a, b]$ e é representado por

$$\int_a^b f(x) dx \cong \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x \right]$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

Definindo Área: Os exemplos anteriores indicam como definir a área A sob o gráfico de uma função num intervalo $[a, b]$.

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de igual comprimento $\Delta x = \frac{(a-b)}{n}$.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

Em seguida, tomemos n pontos arbitrários $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ chamados pontos representativos pertencentes ao primeiro, segundo e n -ésimo subintervalos, respectivamente. Então aproximando a área A da região R pelos n retângulos de larguras Δx e alturas $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$, de modo que as áreas dos retângulos são $f(x_1)\Delta x, f(x_2)\Delta x, \dots, f(x_n)\Delta x$, temos

$$A \cong f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x$$

Integral Definida:

De um modo geral, se f é uma função contínua em $[a, b]$, o número do qual a soma $A \cong \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]\Delta x$ se aproxima na medida em que os Δx se tornam simultaneamente pequenos é chamado integral de f em $[a, b]$ e é representada

por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x \right]$$

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica



Integral Definida:

Exemplo:

Faça uma estimativa da área A sob o gráfico de

$f(x) = -x^2 + 4$, $0 \leq x \leq 2$, dividindo o intervalo $[0, 2]$ em

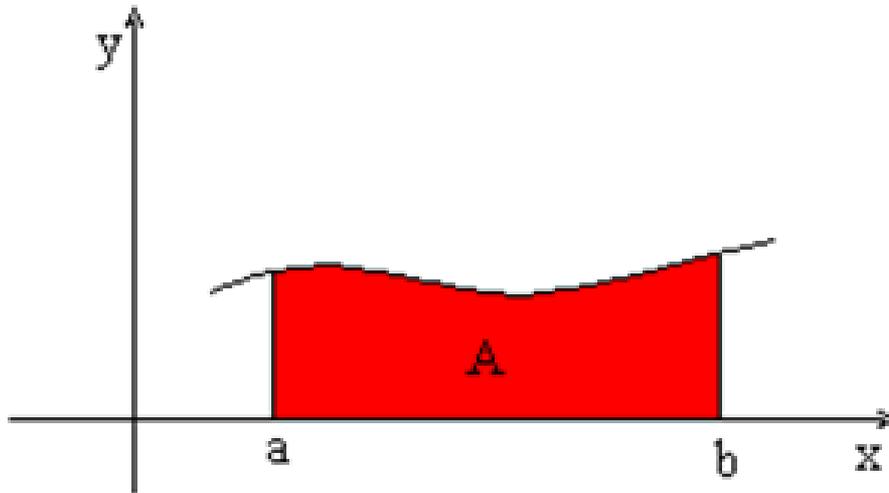
subintervalos de comprimento 0,5.

Aplicações de integrais

Área de uma região plana

A) Se f é uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e se $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ então a área da região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$ é dada por:

Aplicações de integrais

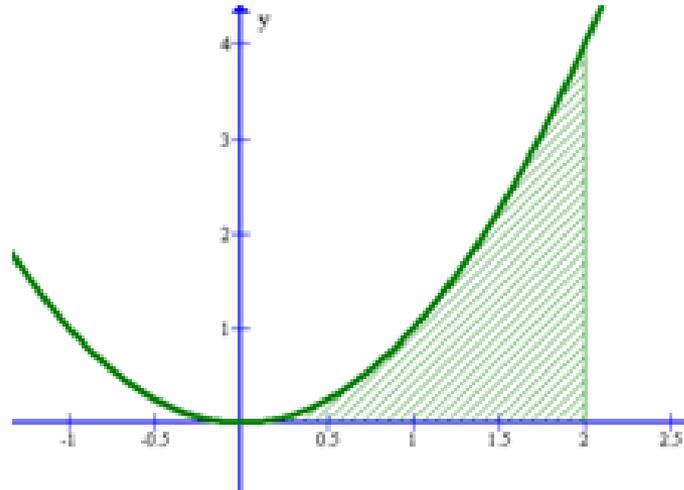


$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Aplicações de integrais

Exemplo:

Calcular a área da região limitada pela curva $y = x^2$, o eixo x e as retas $x = 0$ e $x = 2$.



Aplicações de integrais

Área de uma região plana

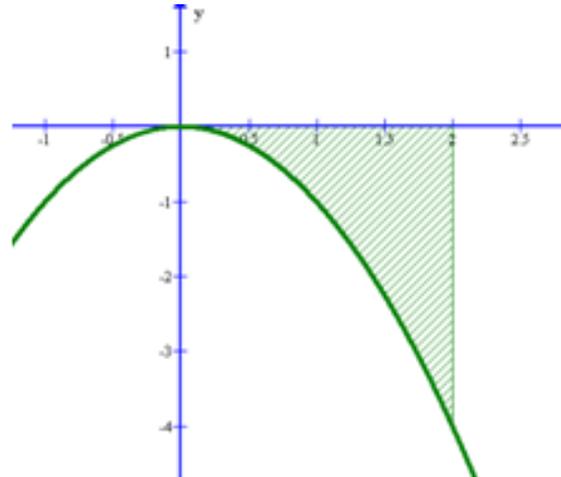
B) Se f é uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e se $f(x) \leq 0 \forall x \in [a, b]$ então a área da região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$ é dada por:

$$A = -\int_a^b f(x) dx \quad \text{ou} \quad A = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \quad \text{Módulo}$$

Aplicações de integrais

Exemplo:

Calcular a área determinada pela função $y = -x^2$, eixo x , $x = 0$ e $x = 2$.



Aplicações de integrais

Exemplo:

Determine a área formada pela função $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, o eixo x , $x \in [-2, 3]$.

