

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica



Integrais

Ementa

INTEGRAL INDEFINIDA

- ❖ ~~Conceito e propriedades da integral indefinida;~~
- ❖ ~~Técnicas de integração: substituição e partes;~~
- ❖ ~~Integração por substituição trigonométrica;~~
- ❖ ~~Integração de funções racionais por frações parciais;~~

Ementa

INTEGRAL DEFINIDA

- ❖ ~~Conceito e propriedades da integral definida;~~
- ❖ ~~Teorema fundamental do cálculo;~~
- ❖ ~~Cálculo de áreas, comprimento de arcos, volumes e volumes de revolução;~~
- ❖ **Integrais impróprias;**
- ❖ **Integrais múltiplas;**

Integrais Impróprias

Uma integral imprópria é a integral que possui um ou ambos os limites de integração infinitos. Segue as Definições:

Definição 1:

Se f é uma função integrável em $[a, +\infty)$ então:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Integrais Impróprias

Definição 2:

Se f é uma função integrável em $(-\infty, b]$ então:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Definição 3:

Se f é uma função integrável em $(-\infty, +\infty)$, então:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx$$

Integrais Impróprias

Se nas definições anteriores os limites existirem, as integrais impróprias são ditas **convergentes**; caso contrário, são ditas **divergentes**.

Exemplo: Estude as convergências das seguintes integrais impróprias.

a)
$$\int_{-\infty}^2 \frac{1}{(4-x^2)} dx$$

b)
$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$

Integrais Múltiplas

A noção de integral definida pode ser estendida para funções de duas ou mais variáveis. Sabemos que a integral definida de uma função de uma variável

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

originou-se do problema da determinação de áreas sob curvas.

As integrais das funções de duas variáveis originam-se do problema da determinação de volumes sob superfícies.

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica



Integrais Múltiplas

Dada uma função f de duas variáveis, contínua e não-negativa numa região R do plano xy , achar o volume do sólido compreendido entre a superfície $z = f(x,y)$ e a região R .

O procedimento para calcular o volume consiste em subdividir a região R em n retângulos e para cada ponto arbitrário (x_i, y_i) de cada retângulo, obter a altura $f(x_i, y_i)$.

Integrais Múltiplas

Com isso é possível calcular o volume de um paralelepípedo com área da base ΔA_i e altura $f(x_i, y_i)$ como o produto $\Delta A_i \cdot f(x_i, y_i)$, de modo que o somatório

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta A_i$$

pode ser considerado como uma aproximação do volume V do sólido inteiro.

Integrais Múltiplas

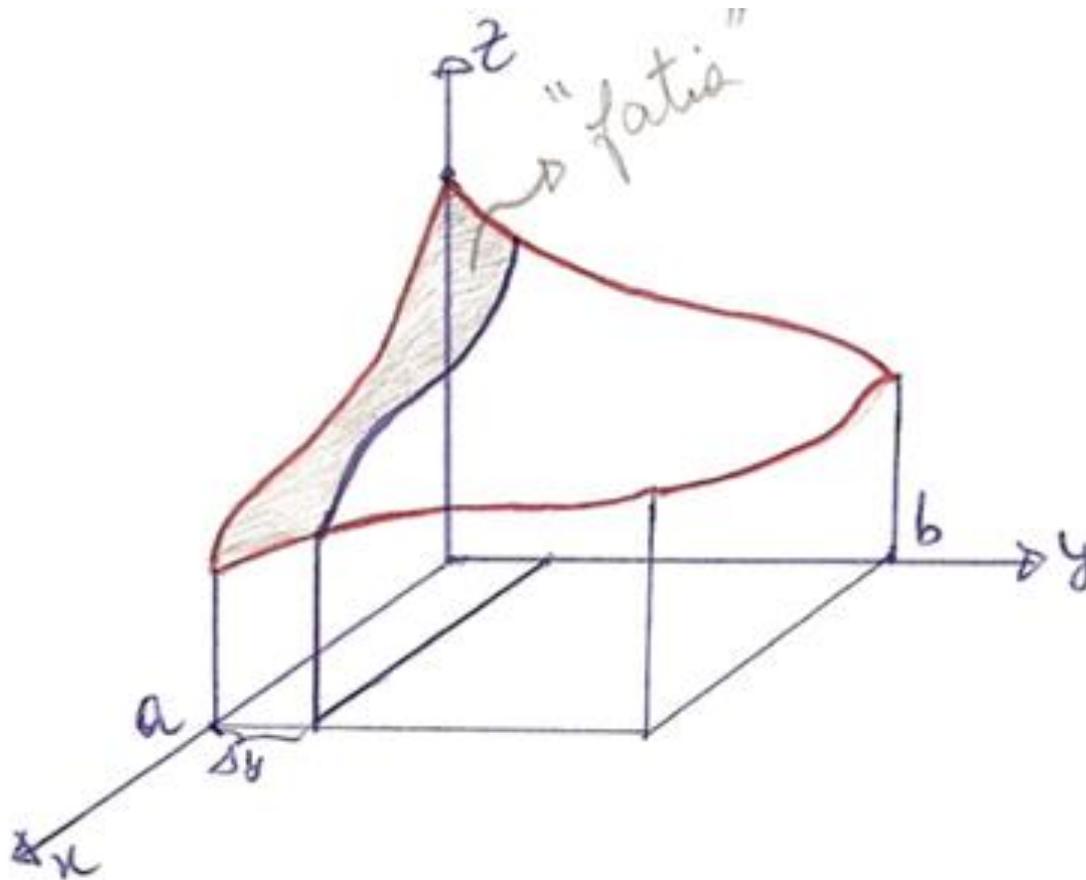
1. Cálculo de Integrais Duplas e Integrais Iteradas

Seja um sólido S de volume V , limitado na base pelo plano $z = 0$, nas laterais pelos planos $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ e na parte superior pela função $z = f(x,y)$, conforme figura.

Integrais Múltiplas

1. Cálculo c

Seja
plano $z = 0$,
na parte su



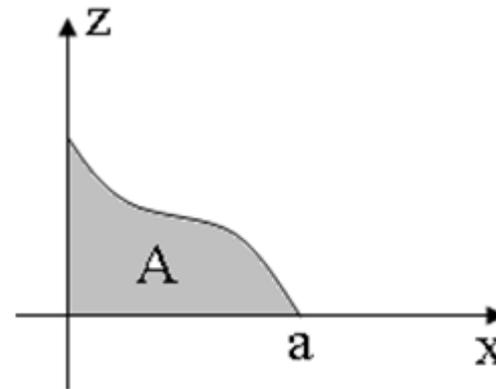
se pelo
 $x = 0$, $y = b$ e
jura.

Integrais Múltiplas

1. Cálculo de Integrais Duplas e Integrais Iteradas

O volume V de S pode ser calculado somando as “fatias” de espessura Δy e volume .

$$V_i = \int_0^a f(x, y) dx \cdot \Delta y$$



Integrais Múltiplas

1. Cálculo de Integrais Duplas e Integrais Iteradas

Se aumentarmos as subdivisões de modo que os comprimentos e as larguras dos retângulos da base tendam para zero, então é admissível que o volume exato seja:

$$V \cong V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

$$V \cong \sum_{i=1}^n \int_0^a f(x, y) dx \Delta y$$

$$V \cong \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_0^a f(x, y) dx \Delta y$$

Integrais Múltiplas

1. Cálculo de Integrais Duplas e Integrais Iteradas

As somas acima são chamadas somas de Riemann e o limite das somas de Riemann é denotado por:

$V = \int_0^b \int_0^a f(x, y) dx dy$ que é chamada integral dupla de $f(x, y)$ em R .

Essa equação pode ser reescrita como: $V = \iint_R f(x, y) dA$

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica



Integrais Múltiplas

1. Cálculo de Integrais Duplas e Integrais Iteradas

A integral dupla pode ser entendida como duas integrais iteradas. A solução da equação anterior é obtida resolvendo primeiramente a integral interna e depois, com este resultado, a integral externa.

Integrais Múltiplas

1. Cálculo de Integrais Duplas e Integrais Iteradas

As derivadas parciais de uma função $f(x,y)$ são calculadas mantendo-se uma das variáveis fixa e diferenciando em relação a outra variável. Consideremos o inverso deste processo, **integração parcial**. Os símbolos:

$$\int_b^a f(x,y)dx \quad e \quad \int_a^c f(x,y)dy$$

Integrais Múltiplas

1. Cálculo de Integrais Duplas e Integrais Iteradas

denotam **integrais definidas parciais**; a primeira integral, chamada **integral definida parcial em relação a x** , é calculada mantendo y fixo e integrando em relação a x e a segunda integral, chamada **integral definida parcial em relação a y** , é calculada mantendo x fixo e integrando em relação a y .

Integrais Múltiplas

1. Cálculo de Integrais Duplas e Integrais Iteradas

Exemplo:

Resolva a integral: $\int_0^1 \int_0^2 (x \cdot y) dx dy$

Integrais Múltiplas

2. Propriedades das integrais duplas

Se f e g são funções integráveis em R e c é constante, então:

$$\text{i) } \iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA$$

$$\text{ii) } \iint_R [f(x, y) - g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA - \iint_R g(x, y) dA$$

$$\text{iii) } \iint_R c \cdot f(x, y) dA = c \cdot \iint_R f(x, y) dA$$

Integrais Múltiplas

2. Propriedades das integrais duplas

Exemplos:

1) Resolva a integral:
$$\int_{-2}^0 \int_{-1}^2 (x^2 + y^2) dx dy$$

2) Resolva a integral:
$$\int_1^2 \int_0^3 (2y^2 - 3xy^2) dy dx$$

Integrais Múltiplas

2. Propriedades das integrais duplas

Exemplos:

3) Resolva a integral:
$$\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} [\text{sen}(x) + \cos(x)] dx dy$$

4) Resolva a integral:
$$\int_0^1 \int_0^1 e^{x+y} dy dx$$

5) Calcule o volume (aproximado) do sólido compreendido entre $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$ e $z = x + y + 1$.

Integrais Múltiplas

2. Propriedades das integrais duplas

Teorema: Seja R o retângulo definido pelas desigualdades:

$$a \leq x \leq b \quad \text{e} \quad c \leq y \leq d$$

Se $f(x, y)$ for contínua nesse retângulo, então:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

Integrais Múltiplas

2. Propriedades das integrais duplas

Exemplos:

1) Verifique se a igualdade é verdadeira: $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx = \int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx dy$

2) Calcule a integral dupla $\iint_R y^2 x \, dA$ no retângulo

$$R = \{(x, y) / -3 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$$

Integrais Múltiplas

3. Integrais Iteradas com Limites de Integração Não-Constantes

Definição:

(a) Uma região do tipo I é limitada à esquerda e à direita por retas verticais $x = a$ e $x = b$ e é limitada abaixo e acima por curvas contínuas $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$, onde $g_1(x) \leq g_2(x)$ para $a \leq x \leq b$.

Integrais Múltiplas

3. Integrais Iteradas com Limites de Integração Não-Constantes

Definição:

Se R é uma região do tipo I, na qual $f(x,y)$ é contínua, então:



$$\iint_R f(x,y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$$

Integrais Múltiplas

3. Integrais Iteradas com Limites de Integração Não-Constantes

Definição:

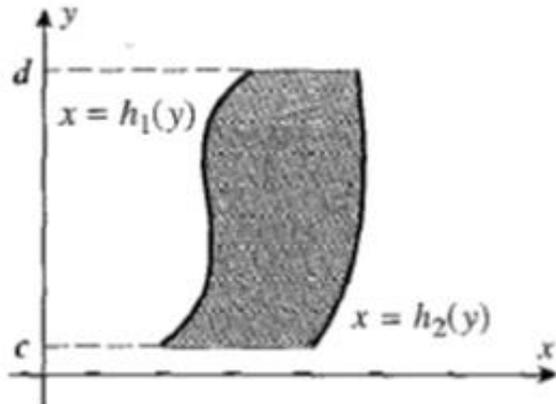
(b) Uma região do tipo II é limitada abaixo e acima por retas horizontais $y = c$ e $y = d$ e é limitada à direita e à esquerda por curvas contínuas $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$, que satisfazem $h_1(y) \leq h_2(y)$, para $c \leq y \leq d$.

Integrais Múltiplas

3. Integrais Iteradas com Limites de Integração Não-Constantes

Definição:

Se R é uma região do tipo II, na qual $f(x,y)$ é contínua, então:



Região do tipo II

$$\iint_R f(x,y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$$

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica



Integrais Múltiplas

Exemplo:

Calcule $\iint_R (x+2y)dA$, onde R é a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1+x^2$.

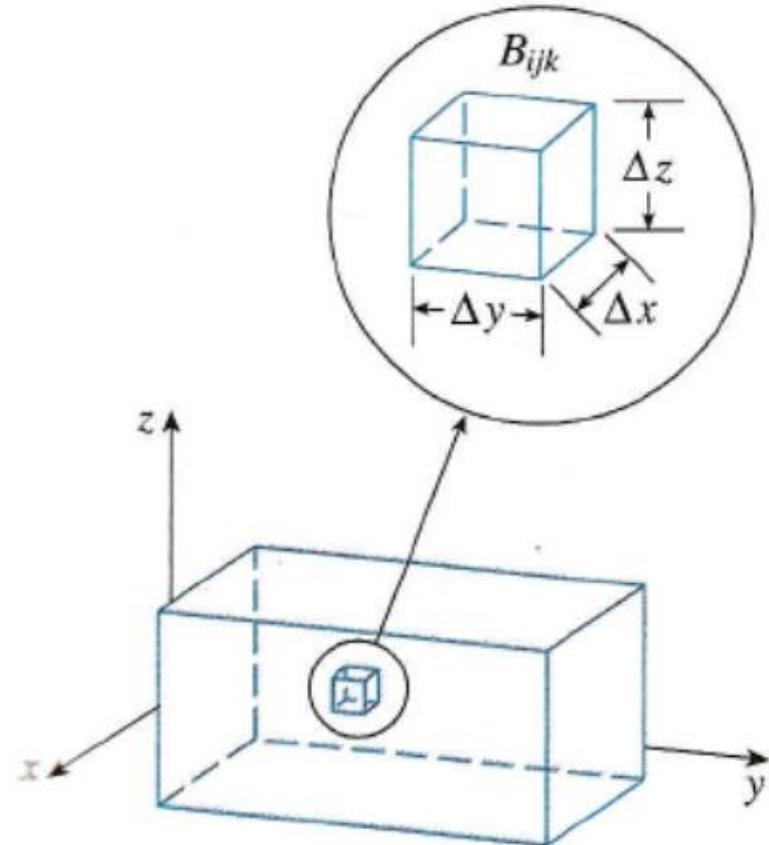
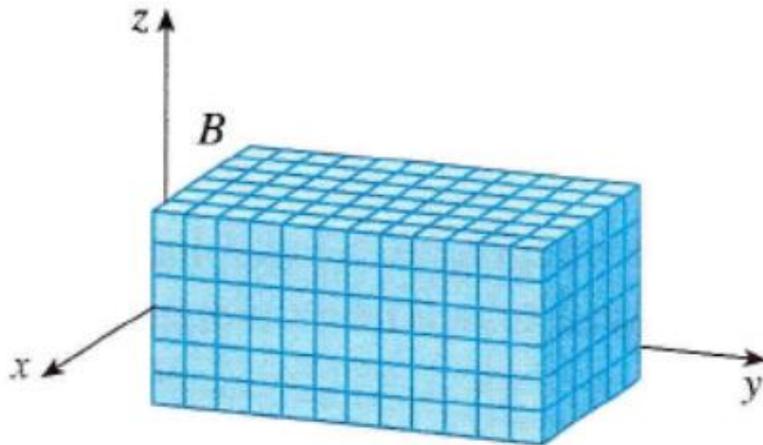
Integral tripla

Seja f uma função de três variáveis e suponha que f seja contínua e definida numa região retangular:

$$B = \{(x, y, z) / a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad r \leq z \leq s\}$$

O primeiro passo é dividir B em subcaixas. Fazemos isso dividindo o intervalo $[a, b]$ em l subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimentos iguais Δx , dividindo $[c, d]$ em m subintervalos de comprimentos Δy e dividindo $[r, s]$ em n subintervalos de comprimentos Δz , conforme figura:

Integral tripla



Integral tripla

Cada subcaixa tem volume $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$. Assim, formamos a soma tripla de Riemann.

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) \Delta V$$

Por analogia com a definição de integral dupla (vista em aulas anteriores) definimos a integral tripla como o limite das somas triplas de Riemann.

Integral tripla

Definição: A integral tripla de f sobre a caixa B é:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) \Delta V$$

se existir.

Como para integrais duplas, o método prático para calcular uma integral tripla consiste em expressá-la como uma

integral iterada:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica



Integral tripla

A integral iterada do lado direito da igualdade indica que primeiro integramos em relação a x (mantendo y e z constantes), em seguida integramos em relação a y (mantendo z fixo) e finalmente em relação a z .

Observação: Existem outras ordens possíveis de integração, todas fornecendo o mesmo resultado.

Integral tripla

Exemplos:

1) Calcule a integral tripla $\iiint_G 12xyz^2 dV$ na caixa retangular G definida pelas desigualdades $-1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$, $0 \leq z \leq 2$.

2) Calcule a integral tripla $\iiint_B xyz^2 dV$, onde B é a caixa retangular dada por: $B = \{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$.

3) Calcule a integral tripla: $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{2y}^{1+y^2} (x) dz dy dx =$