Extensões do Conceito de Integral

Até o momento, calculamos integrais de funções contínuas definidas em intervalos fechados e limitados. Em diversas aplicações surge a necessidade de relaxar algumas dessas condições. Nas seções que seguem vamos estender o conceito de integral para as seguintes situações:

- integrais de funções contínuas por parte;
- integrais com limites de integração infinitos;
- integrais com integrandos infinitos.

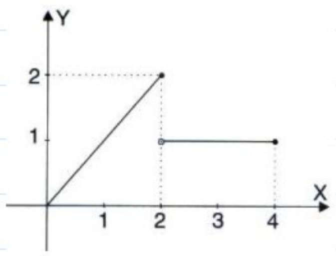
Integrais de Funções Contínuas por Partes

Definição Dizemos que $f(x)$ é contínua por partes em $[a, b]$ se pudermos subdividir o intervalo $[a, b]$ em um número finito de subintervalos.

$$[a, b] = [a = x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n = b]$$

de tal forma que $f(x)$ é contínua em cada intervalo aberto (x_{i-1}, x_i) e para cada i existem os limites laterais correspondentes.

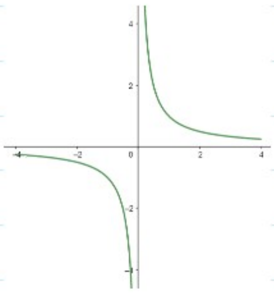
$$\lim_{x \to x_i^-} f(x) \text{ e } \lim_{x \to x_i^+} f(x).$$



$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$$

Função contínua por partes



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

Função não é contínua por partes

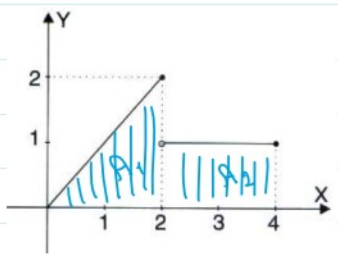
Cálculo da Integral de uma Função Contínua por Partes

Podemos calcular a integral definida de uma função contínua por partes como segue:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx.$$

Ex:

Calcular $\int_0^4 f(x)\,dx$, sendo $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{se } 2 < x \leq 4 \end{cases}$



$$A_1 = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 x\,dx + \int_2^4 1\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + x\Big|_2^4$$

$$= \frac{4}{2} - 0 + 4 - 2$$

$$= 2 + 4 - 2$$

$A_2 = 2 \cdot 1 = 2$ $\qquad\qquad = 4$

$A_T = A_1 + A_2 = 2 + 2 = 4$

Integrais Impróprias

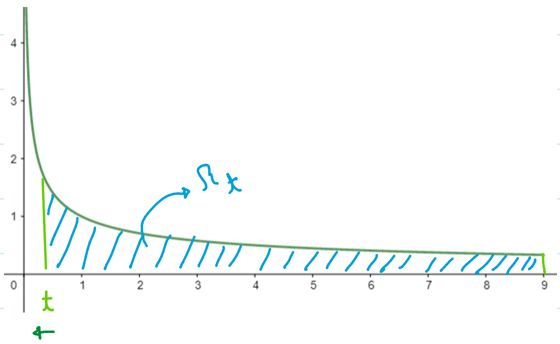
São integrais de funções:

- Definidas em intervalos do tipo [a, b), (a, b], (a, b), [a, +∞), (-∞, b], (a, +∞), (-∞, b) e (-∞, +∞);
- Com descontinuidade infinita em [a, b].

Problema: Calcular a área da região R determinada pelo gráfico de $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 0 < x ≤ 9, e o eixo x.

R é limitada

f é definida em [0, 9]



$$A(R_t) = \int_t^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$= 2\sqrt{x}\,\Big|_t^9$$
$$= 2\sqrt{9} - 2\sqrt{t}$$
$$= (6 - 2\sqrt{t})$$

É intuitivo que para valores de t muito pequenos a região limitada R_t é uma boa aproximação da região ilimitada R. Isto nos induz a escrever:

$$A(R) = \lim_{t \to 0^+} A(R_t)$$
$$= \lim_{t \to 0^+} \int_t^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$= \lim_{t \to 0^+} (6 - 2\sqrt{t})$$
$$= 6$$

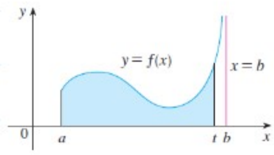
$\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ é uma integral imprópria.

Integrais Impróprias com Integrandos Infinitos

Definição

(a) Se f é contínua em $[a, b)$ e $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$, definimos:

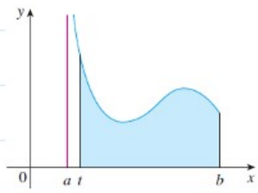
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$



se este limite existir.

(b) Se f é contínua em $(a, b]$ e $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ definimos:

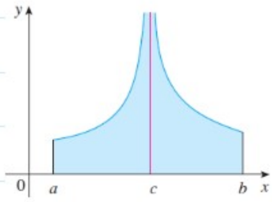
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$



se este limite existir.

(c) Se f é contínua para todo $x \in [a, b]$, exceto para $x = c \in (a, b)$, e tem limites laterais infinitos em c, definimos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



se ambas as integrais impróprias $\int_a^c f(x)dx$ e $\int_c^b f(x)dx$ existirem.

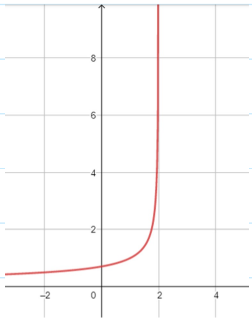
A integral imprópria $\int_a^b f(x)dx$ é chamada **convergente** se o limite correspondente existir e **divergente** se o limite não existir.

É importante observar que as integrais impróprias com integrandos infinitos têm a mesma notação que as integrais definidas. Na prática, sempre que nos deparamos com uma integral definida, devemos analisar a função integrando para verificar se não estamos diante de uma integral imprópria.

Exemplos:

1) Determine se a integral é convergente ou divergente.

a) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$ é imprópria



A função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ está definida em $[0,2)$

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = \lim_{t \to 2^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$$

$$= \lim_{t \to 2^-} \left(-2\sqrt{2-x}\,\Big|_0^t \right)$$

$$= \lim_{t \to 2^-} \left(-2\sqrt{2-t} + 2\sqrt{2-0} \right)$$

$$= 2\sqrt{2}$$

Calcular separadamente

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = -\int \frac{du}{\sqrt{u}}$$

Subs:

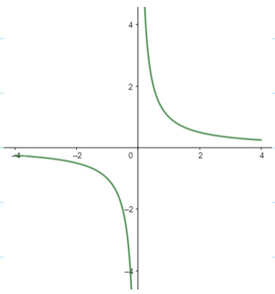
$u = 2-x$ $\qquad = -2\sqrt{u} + c$

$du = -dx$ $\qquad = -2\sqrt{2-x} + c$

$-du = dx$

Logo, a integral é convergente.

b) $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ é imprópria

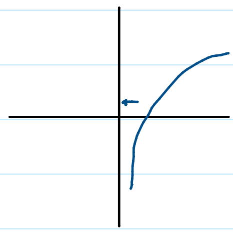


A função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ está definida em $(0,1]$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \left(\ln x \,\Big|_t^1 \right)$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \left(\cancel{\ln 1}^{\,0} - \ln t \right)$$



$$= -\lim_{t \to 0^+} \ln t$$

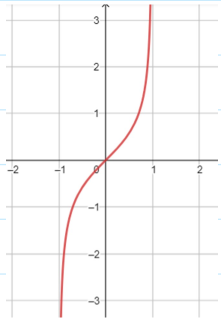
$$= -(-\infty)$$

$$= +\infty$$

Logo, a integral é divergente

2) Calcule a integral:

$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ é imprópria.



A função $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ está definida em $(-1,1)$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \lim_{t\to -1^+} \int_{t}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \lim_{t\to 1^-} \int_{0}^{t} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Vamos calcular separadamente as integrais

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{u} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Subs.:

$u = 1-x^2$

$du = -2x\,dx$

$\frac{du}{-2} = x\,dx$

$$\int_{t}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}\,\Big|_{t}^{0} = -1 + \sqrt{1-t^2}$$

$$\int_{0}^{t} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}\,\Big|_{0}^{t} = -\sqrt{1-t^2} + 1$$

Segue que:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \lim_{t\to -1^+} \int_{t}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \lim_{t\to 1^-} \int_{0}^{t} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \lim_{t\to -1^+} \left(-1 + \sqrt{1-t^2}\right) + \lim_{t\to 1^-} \left(-\sqrt{1-t^2} + 1\right)$$

$$= -1 + 1 = 0$$

3) Calcule, se possível, a integral $\int_0^4 \frac{dx}{x-2}$