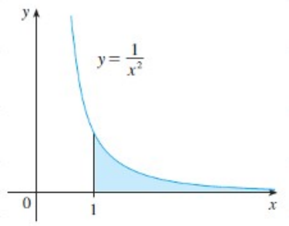
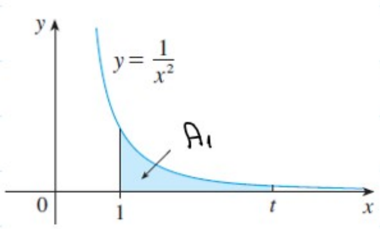
Integrais Impróprias

Integrais Impróprias com Limites de Integração Infinitos

Motivação: Calcular a área da região R que está sob a curva $y = \frac{1}{x^2}$, acima do eixo x e a direita da reta x = 1.



Você poderia pensar que, como a região tem extensão infinita, sua área deve ser infinita. Mas vamos analisar com mais cuidado:
A área da parte da região R que está a esquerda da reta x = t é:



$$A_1 = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^t = -\frac{1}{t} + 1$$

Observe que $A_1 < 1$ independente de quão grande t seja escolhido.
Também observe que:

$$A = \lim_{t \to +\infty} A_1 = \lim_{t \to \infty} \left(1 - \underbrace{\frac{1}{t}}_{\to 0}\right) = 1$$

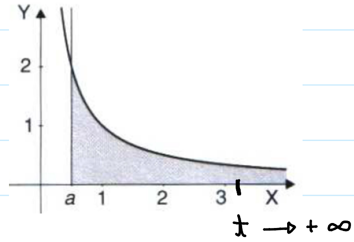
A_1 se aproxima de 1 quando t tende ao infinito, assim dizemos que a área da região infinita é igual a 1 e escrevemos:

$$A = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

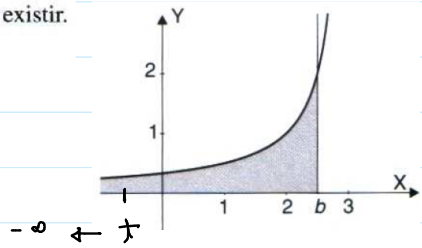
Definimos assim a integral de f (não necessariamente uma função positiva) sobre um intervalo infinito como o limite das integrais sobre os intervalos finitos.

Definição

(a) Se f é contínua para todo $x \geq a$, definimos $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$ se este limite existir.



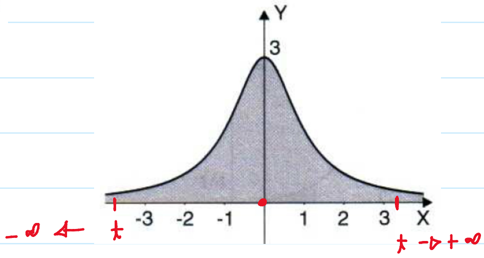
(b) Se f é contínua para todo $x \leq b$, definimos $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$ se este limite existir.



(c) Se f é contínua para todo x, definimos $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$

se ambas as integrais impróprias $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ e $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ existirem.

Neste caso, qualquer número real a pode ser usado.



Exemplos:

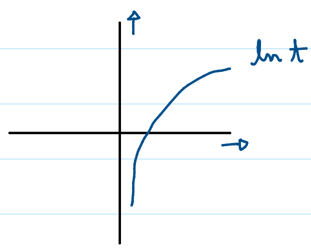
1) Determine se a integral é convergente ou divergente.

a) $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\ln|x|\Big|_1^t\right)$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\ln|t| - \cancel{\ln 1}^{\,0}\right)$$

$$= +\infty$$



Logo, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ é divergente.

Observação:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \text{ converge} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \text{ diverge}$$

Geometricamente, isso quer dizer que, embora as curvas $y = 1/x^2$ e $y = 1/x$ pareçam muito semelhantes para $x > 0$, a região sob $y = 1/x^2$ à direita de $x = 1$ (a região sombreada na Figura 4) tem uma área finita, enquanto a região correspondente sob $y = 1/x$ (na Figura 5) tem uma área infinita. Observe que $1/x^2$ e $1/x$ se aproximam de 0 quando $x \to \infty$, mas $1/x^2$ se aproxima mais rápido de 0 que $1/x$. Os valores de $1/x$ não diminuem rápido o suficiente para que sua integral tenha um valor finito.

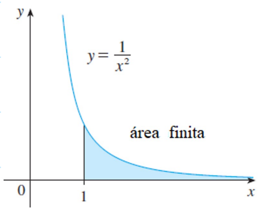


FIGURA 4 $\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$ converge

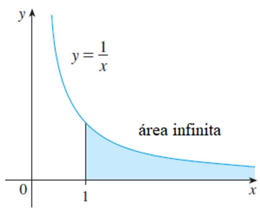


FIGURA 5 $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ diverge

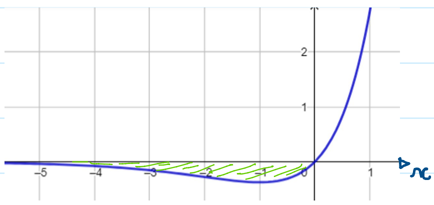
b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^0 x e^x\,dx$

$= \displaystyle\lim_{t \to -\infty} \left(xe^x - e^x\right)\Big|_t^0$

$= \displaystyle\lim_{t \to -\infty} \left(-1 - te^t - e^t\right)$

$= -1 - 0 - 0$

$= -1$

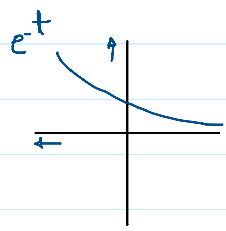


Integração por partes:

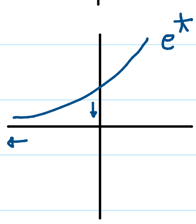
$\int x.e^x\,dx$

$= x.e^x - e^x + c$

$$\boxed{\lim_{t \to -\infty} te^t = \lim_{t \to -\infty} \frac{t}{e^{-t}} \overset{L'H}{=} \lim_{t \to -\infty} \frac{1}{-e^{-t}} = 0}$$

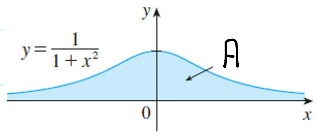


$$\boxed{\lim_{t \to -\infty} e^t = 0}$$



Logo, a integral converge para -1.

2) Calcule a área da região limitada pela curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ e o eixo x.



$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

desde que ambas as integrais do lado direito sejam convergentes

Vamos calcular cada uma delas separadamente:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left(\operatorname{arc\,tg} x\right)\Big|_{t}^{0}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left(\cancelto{0}{\operatorname{arc\,tg} 0} - \operatorname{arc\,tg} t\right)$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{t\to+\infty} \int_{0}^{t} \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(\operatorname{arc\,tg} x\right)\Big|_{0}^{t}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(\operatorname{arc\,tg} t - \cancelto{0}{\operatorname{arc\,tg} 0}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Logo,

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1-x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

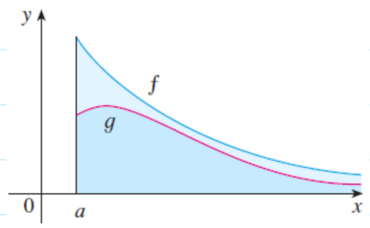
$$= \pi$$

Um teste de comparação para integrais impróprias

Algumas vezes é impossível encontrar o valor exato de uma integral imprópria, mas ainda assim é importante saber se ela é convergente ou divergente. Nesses casos o teorema a seguir é útil, pois permite afirmar a convergência ou divergência de uma integral comparando-a com outra.

Teorema: (Critério da comparação)
Sejam f e g funções definidas em um intervalo I, tais que $0 \leq g(x) \leq f(x)$, para todo $x \in I$, onde I é um intervalo da forma:
$[a, b)$, $(a, b]$, (a, b), $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ ou $(-\infty, +\infty)$.

- Se a integral de f em I é convergente, então a integral de g em I é convergente;
- Se a integral de g em I é divergente, então a integral de f em I é divergente.



Observação:
- O critério da comparação também pode ser aplicado quando f e g são ambas não positivas $f(x) \leq g(x) \leq 0$.
- A hipótese de f e g serem ambas não negativas (ou não positivas) é essencial. Se esta hipótese for removida podemos ter problemas.

Exemplo: Usando o critério da comparação, verifique se a integral imprópria converge ou diverge.

a) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$

Sabemos que $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ é divergente.

Para $x \geq 1$, temos

$$1+e^{-x} > 1$$

assim

$$\frac{1+e^{-x}}{x} > \frac{1}{x} > 0$$

$$f(x) > g(x) > 0$$

Como $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ é divergente, segue pelo critério da comparação que $\int_{1}^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$ é divergente

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2+1}\,dx$

Sabemos que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$ é divergente.

Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$0 \leq \operatorname{sen}^2 x \leq 1$$

assim

$$0 \leq \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}$$

$$0 \leq g(x) \leq f(x)$$

Como $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ é convergente, segue pelo critério da comparação que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2+1}\,dx$ é convergente.