INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Profª. Me. Samanta Santos da Vara Vanini

<u>Lista sobre Matrizes</u>

EXERCÍCIOS

1. Construa a matriz real quadrada A de ordem 3, definida por: $a_{ij} = \begin{cases} 2^{i+j} \text{ se } i < j \\ i^2 - j + 1 \text{ se } i \geq j \end{cases}$.

2. Sendo $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcule:

   a) N – P + M
   b) 2M – 3N – P
   c) N – 2(M – P)

3. Calcule a matriz X, sabendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $(X + A)^t = B$.

4. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$, determine *a* e *b*, de modo que AB = I, em que I é a matriz identidade.

5. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule:

   a) A^2
   b) A^3
   c) A^2B
   d) $A^2 + 3B$

6. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, calcule $AB + B^t$.

7. Resolva a equação:

$$\begin{pmatrix} 2x & -3 \\ x-1 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & x \\ -1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2x^2-3y \\ 2x-y-2 & 11 \end{pmatrix}$$

8. Determine os valores de *x*, *y* e *z* na igualdade abaixo, envolvendo matrizes reais 2 x 2: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y & 0 \\ x & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z-y & 0 \\ y-z & 0 \end{pmatrix}$

9. O produto M.N da matriz $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pela matriz $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

a) não se define.

b) É a matriz identidade de ordem 3

c) É uma matriz de uma linha e uma coluna.

d) É uma matriz quadrada de ordem 3.

e) Não é uma matriz quadrada.

10. A inversa da matriz $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ é:

a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ c) Inexistente. d) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

11. Escreva as seguintes matrizes:

a) $M = (m_{ij})$, com $1 \le i \le 3$ e $1 \le j \le 3$, tal que $m_{ij} = 3i + 2j - 5$.

b) Matriz diagonal de ordem 4 em que $a_{ij} = i + j$.

c) Matriz triangular inferior de ordem 3 onde $\begin{cases} a_{ij} = (i+j)^2 \text{ para } i = j \\ a_{ij} = -2 \text{ para } i > j \end{cases}$

12. Um projeto de pesquisa sobre dietas envolve adultos e crianças de ambos os sexos. A composição dos participantes no projeto é dada pela matriz

$\begin{bmatrix} 80 & 120 \\ 100 & 200 \end{bmatrix}$, onde as linhas são o sexo masculino e feminino respectivamente, e as colunas são adultos e crianças respectivamente.

O número diário de gramas de proteínas, de gorduras e de carboidratos consumidos por crianças e por adultos é dado pela matriz $\begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 30 \end{bmatrix}$, onde as linhas são os adultos e crianças respectivamente e as colunas são proteínas, gorduras e carboidratos respectivamente.

A partir dessas informações, julgue os itens e justifique todas através de cálculos:

a) 6000g de proteínas são consumidos diariamente por adultos e crianças do sexo masculino.

b) A quantidade de gorduras consumida diariamente por adultos e crianças do sexo masculino é 50% menor que a consumida por adultos e crianças do sexo feminino.

c) As pessoas envolvidas no projeto consomem diariamente um total de 13200g de carboidratos.

13. O gerente de uma danceteria fez um levantamento sobre a freqüência da casa em um final de semana e enviou a seguinte tabela para o proprietário: $\begin{bmatrix} 80 & 60 \\ ? & 75 \end{bmatrix}$, onde as linhas representam sábado e domingo respectivamente e as colunas rapazes e moças respectivamente.

O gerente esqueceu-se de informar um campo da tabela, mas sabia que, curiosamente, a arrecadação nos dois dias foi a mesma. Sabendo que o ingresso para rapazes é de R$ 15,00 e para moças é de R$ 12,00:

a) Represente, através de produto de matrizes, a matriz que fornece a arrecadação da casa em cada dia.

b) Qual é o valor do campo que ficou sem ser preenchido?

14. Em uma empresa de montagem de máquinas trabalham com a montagem mecânica, elétrica e teste. Para uma máquina X demoram 30 minutos com a montagem elétrica, 40 minutos com a montagem mecânica e 30 minutos com teste. Para uma máquina Y demoram 20 minutos com a montagem elétrica, 50 minutos com a montagem mecânica e 30 minutos com teste. E finalmente, para

uma máquina Z demoram 30 minutos com a montagem elétrica, 30 minutos com a montagem mecânica e 20 minutos com teste. Assim respondam o que se pede:

a) Representem em uma matriz as informações dadas anteriormente.
b) Quantas horas são necessárias para a montagem mecânica das três máquinas?
c) Quantas **horas** são necessárias para realização da montagem da máquina Z?

Respostas:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 16 \\ 4 & 3 & 32 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

2) a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 7 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & -5 \\ 11 & -8 & 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & -6 & -4 \\ -2 & 1 & 6 \\ -14 & 10 & -9 \end{pmatrix}$

3) $X = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

4) $a = 1$ e $b = 0$

5) $\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -26 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -15 & -3 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & -17 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

7) V = {(2,3),(2,-3)}

8) $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ ou $x = 3$, $y = 6$, $z = 9$

9) d)

10) b)

11) a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 16 & 0 \\ -2 & -2 & 36 \end{pmatrix}$

12) a) (F) pois 6000g são de gorduras ingeridas por pessoas do sexo feminino
b) (F) pois corresponde somente a aproximadamente 30%
c) (V) pois 5200 + 8000 = 13200

13) a) $\begin{pmatrix} 80 & 60 \\ x & 75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix}$

b) No domingo foram 68 rapazes

14) a) $\begin{pmatrix} 30 & 40 & 30 \\ 20 & 50 & 30 \\ 30 & 30 & 20 \end{pmatrix}$

b) 2h
c) 1h

Profª. Me. Samanta Santos da Vara Vanini

Exercícios Complementares

1) Obtenha a matriz A em cada caso:

a) $A = (a_{ij})_{2x2}$, sabendo que $a_{ij} = i^2 - 3j$

b) $A = (a_{ij})_{3x2}$, sabendo que $a_{ij} = (-1)^i \cdot (2i - 3j)$

2) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, calcule:

a) A + B + C

b) A – B – C

c) $2B - \frac{1}{2} \cdot A + 3C$

d) 2 · (A – B) – 3 · (B + C)

e) $2A - 3B^t - C^t$

3) Dados $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -5 \end{bmatrix}$, determine:

a) A + B

b) 3A + 2B

4) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$, determine:

a) $2A^T$

b) $A + B^T$

c) $(3A - B)^T$

d) $A^T + B$

5) (FALM – PR) Determine os valores de x e y para os quais:

$$\begin{bmatrix} 2 & x & 3 \\ y & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -y & 3 \\ x & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6) Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, determine a matriz X tal que

X + A – B = 0

7) Calcule, se possível:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 6 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

8) Encontre a transposta de cada matriz:

a) A= $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) B = $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

c) C = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

d) D = $\begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

9) Seja A = $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 3 & 6 & -1 \\ -5 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

a) AA^T

b) A^TA

10) (EEM-SP-2009) Considere as matrizes M_1 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e M_2 = $\begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Sabendo que M_2M_1 – M_1M_2 = $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$, determine os valores dos parâmetros *p* e *q*.

11) Determine, se existir, a inversa de cada matriz:

a) A = $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

b) C = $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

12) Determine x, y e z sabendo que:

$\begin{bmatrix} x-2 & 4 \\ y+1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2z-3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & z \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

13) Uma nutricionista recomendou a alguns pacientes a ingestão de uma quantidade mínima de frutas, leite e cereais. A matriz A = $\begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 600 \end{bmatrix}$ fornece, respectivamente, a quantidade mínima, em gramas, de frutas, leite e cereais. A matriz B = $\begin{bmatrix} 0{,}006 & 0{,}033 & 0{,}108 \\ 0{,}001 & 0{,}035 & 0{,}018 \\ 0{,}084 & 0{,}052 & 0{,}631 \end{bmatrix}$ apresenta a quantidade de proteínas (1ª linha), gorduras (2ª linha) e carboidratos (3ª linha), em gramas, fornecida por grama ingerida de fruta (1ª coluna), leite (2ª coluna) e cereais (3ª co
luna).

a) Determine a matriz que mostra a quantidade diária mínima (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida pela ingestão daqueles alimentos.

b) Se, por engano, operarmos com a matriz A\` = $\begin{bmatrix} 600 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$, sendo, respectivamente, cereais, leite e frutas, em lugar da matriz A, o que é preciso alterar na matriz B para que a solução do item anterior continue correta?

14) Uma das formas de se enviar uma mensagem secreta é por meio de códigos matemáticos, seguindo os passos:

I. Tanto o destinatário quanto o remetente possuem uma matriz chave *C*.

II. O destinatário recebe do remetente uma matriz *P*, tal que $MC = P$, onde *M* é a matriz mensagem a ser decodificada.

III. Cada número *M* corresponde a uma letra do alfabeto: $1 = a$, $2 = b$ ... $23 = z$.

IV. O alfabeto dever ser considerado excluindo as letras *k*, *w* e *y*.

V. O número 0 corresponde ao ponto de exclamação.

VI. A mensagem é lida, encontrando a matriz *M*, fazendo a correspondência número/letra e ordenando as letras por linhas da matriz conforme segue:

$m_{11}m_{12}m_{13}m_{21}m_{22}m_{23}m_{31}m_{32}m_{33}$.

Considerando as matrizes $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 1 \\ 18 & 38 & 17 \\ 19 & 14 & 0 \end{bmatrix}$, qual foi a mensagem enviada por meio da matriz *M*?

15) Um dispositivo eletrônico, usado em segurança, modifica a senha escolhida por um usuário, de acordo com o procedimento descrito abaixo:

A senha escolhida $S_1S_2S_3S_4$ deve conter quatro dígitos, representados por S_1, S_2, S_3, e S_4.

Esses dígitos são transformados nos dígitos M_1, M_2, M_3, e M_4, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \text{ onde } P \text{ é a matriz } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se a senha de um usuário, já modificada, é 0110, qual foi a senha escolhida pelo usuário?

Respostas

1) a) $\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

2) a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 14 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -4 & 25 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -2 & -40 \\ 15 & 8 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -2 & -11 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$

3) a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \\ 8 & -2 & -8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 7 & 11 & 6 \\ 3 & 2 & 20 \\ 20 & -3 & -19 \end{bmatrix}$

4) a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$

5) x = 3 e y = 2

6) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

7) a) $\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 6 & 12 & 3 \\ -4 & -8 & -2 \\ 8 & 16 & 4 \end{bmatrix}$ c) Impossível d) $\begin{bmatrix} 1 & 15 & 11 \\ -5 & 27 & 30 \end{bmatrix}$

8) a) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & -6 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

9) a) $\begin{bmatrix} 45 & -5 & -2 \\ -5 & 46 & -41 \\ -2 & -41 & 45 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 50 & 30 & 7 \\ 30 & 56 & -24 \\ 7 & -24 & 30 \end{bmatrix}$

10) p = 5 e q = 2

11) a) $A^{-1} = \frac{1}{19} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ b) Sistema impossível, logo não existe inversa de A.

12) x = 4, z = −1 e y = 4

13) $\begin{bmatrix} 75,9 \\ 21,5 \\ 411 \end{bmatrix}$

14) Boasorte

15) 1001

50