INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Sistemas de Equações Lineares

A um conjunto de equações lineares se dá o nome de **Sistemas de Equações lineares**:

Matriz Associada

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

em que a_{11}, a_{12}, ..., $a_{1n,}$ b_1, b_2, ..., b_m são números reais.

Sistemas de Equações Lineares

Se o conjunto ordenado de números reais satisfizer todas as equações do sistema, será denominado ***solução do sistema linear***.

Se o termo independente de todas as equações do sistema for nulo, isto é, $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$, o sistema linear será dito ***homogêneo***, caso contrário será dito ***não homogêneo***.

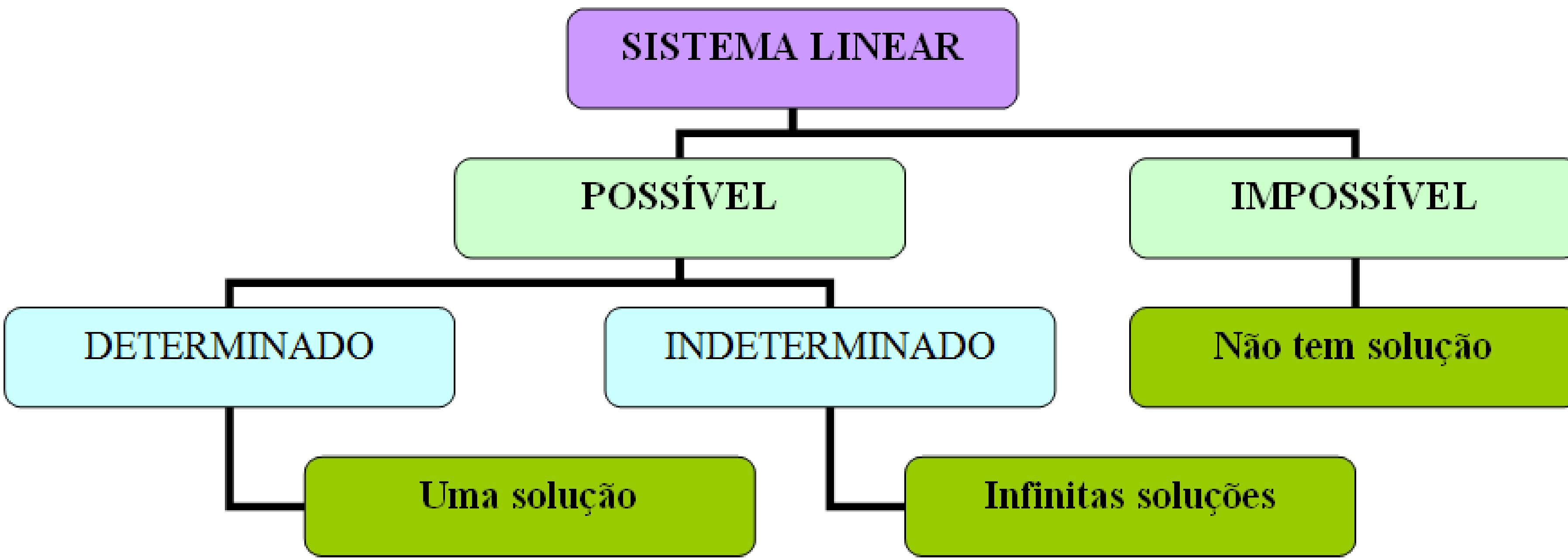
Sistemas de Equações Lineares

Uma solução do sistema linear homogêneo $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \\ 5x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$ é, por exemplo, (0, 0, 0).

Essa solução chama-se ***solução trivial*** do sistema homogêneo. Se o sistema homogêneo admitir outra solução onde as incógnitas não são todas nulas, a solução será chamada ***solução não trivial***.

Classificação de um Sistema Linear

Os sistemas lineares podem ser classificados de acordo com o diagrama abaixo.



Resolução de Sistemas Lineares pela Regra de Cramer

A *Regra de Cramer* é uma das mais tradicionais para resolver sistemas lineares, apresenta pós e contras sobre outros métodos. A grande vantagem é que ela fornece os valores das incógnitas diretamente como quociente de dois determinantes. Contudo, ela só se aplica quando o determinante da matriz do sistema é diferente de zero.

Resolução de Sistemas Lineares pela Regra de Cramer

Consideremos o sistema de três equações lineares com três incógnitas:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Inicialmente, calcula-se D, o determinante da matriz dos coeficientes do sistema.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Resolução de Sistemas Lineares pela Regra de Cramer

Se $D \neq 0$, podemos prosseguir, pois o sistema é possível e determinado (SPD).

Se $D = 0$, não se aplica a regra de Cramer, pois não podemos ter denominador igual a zero.

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D} \qquad z = \frac{D_z}{D}$$

.

Resolução de Sistemas Lineares pela Regra de Cramer

Para encontrarmos a variável x, por exemplo, calculamos Dx e logo após D. Para o cálculo de Dx colocamos na coluna dos coeficientes de x, os termos independentes que se encontram depois do sinal de igual. O determinante D, é calculado pelos coeficientes normais.

Vejamos o exemplo: $\begin{cases} 2x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$

Resolução de Sistemas Lineares por Escalonamento

Sistema escalonado

Um sistema linear é dito escalonado quando está disposto nas seguintes formas:

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 0x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 0x + 5y + z = 1 \\ 0x + 0y - z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 5z + 2t = 4 \\ 0x + 3y + 8z - 2t = 0 \\ 0x + 0y - z - 3t = 0 \\ 0x + 0y + 0z + 4t = 8 \end{cases}$$

Resolução de Sistemas Lineares por Escalonamento

Observe que, nestes exemplos, na primeira equação aparecem todas as incógnitas, na 2ª desaparece a incógnita x, na 3ª equação, quando há, desaparece a incógnita y, e assim sucessivamente.

O processo de resolução de um sistema linear que envolve a eliminação de incógnitas é denominado *método de escalonamento*.

Resolução de Sistemas Lineares por Escalonamento

Este método procura transformar o sistema dado em ***Sistemas Equivalentes*** (tem a mesma solução), até chegar a um Sistema Escalonado, usando as seguintes transformações elementares sobre as equações do sistema dado:

- Trocar as posições de duas equações;
- Multiplicar uma das equações por um número real diferente de zero;
- Multiplicar uma equação por um número real e adicionar o resultado a outra equação.

Resolução de Sistemas Lineares por Escalonamento

Exemplos de aplicação do método:

a) $$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ 3x - y + 2z = 8 \\ 5x - 2y + z = 3 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - 3y + z = 10 \\ 2x - 4y + 2z = 6 \end{cases}$$

.

Resolução de Sistemas Lineares por Escalonamento

Podemos ainda, resolver sistemas onde o número de equações é diferente do número de incógnitas:

Exemplos:

a) $\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 5x - 2y = 4 \\ 3x + y = 9 \\ 4x - 5y = -7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 5x - 2y = 4 \\ 10x - 4y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 8y + 24z + 18t = 84 \\ 4x - 14y + 52z + 42t = 190 \end{cases}$