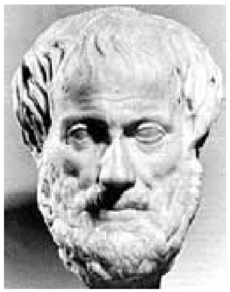
Ciência da Computação

Lógica

De acordo com as Diretrizes Curriculares do MEC para Cursos de Computação e Informática, “[...] a lógica matemática é uma ferramenta fundamental na definição de conceitos computacionais.”

Notas Históricas



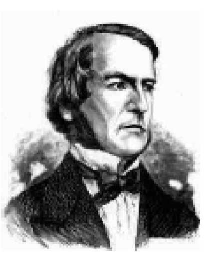
Aristóteles (384 a.C.–322 a.C.), filósofo grego. Produziu uma obra rica e multifacetada. Nela encontramos uma exaustiva compilação dos conhecimentos do seu tempo, mas também, uma filosofia que ainda hoje influência a nossa maneira de pensar.

Responsável por escrever os primeiros grandes trabalhos de lógica:

– Coleção de regras para raciocínio dedutivo que pode ser usado em qualquer área do conhecimento.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), filósofo e matemático alemão, provavelmente mais conhecido por ter inventado o cálculo integral e diferencial independentemente de Isaac Newton.

Propõe o uso de símbolos para mecanizar o processo de raciocínio dedutivo.



George Boole (1815–1864), matemático e filósofo inglês.

Augustus De Morgan (1806–1871), matemático inglês.

Propõem as bases da lógica simbólica moderna usando as idéias de Leibniz.

Ciência da Computação

Aplicações

A lógica formal fornece as bases para o método de pensar organizado e cuidadoso que caracteriza qualquer atividade racional.

Investigação criminal, experiência científica, estudo sociológico... e ciência da computação (linguagens de programação, circuitos digitais, inteligência artificial...)

Lógica Proposicional (ou Cálculo Proposicional)

O cálculo proposicional é a parte da lógica matemática que estuda a validade de argumentos em uma linguagem própria, a linguagem proposicional. Trabalha com tabelas-verdade, focando a atenção na estrutura e não no conteúdo.

Proposição é uma sentença declarativa que é falsa ou verdadeira, mas não ambas.

Valor verdade é o resultado da avaliação de uma proposição (V ou F).

Ciência da Computação

Exemplos:
Quais das expressões abaixo são proposições?

a) Pare!

b) **Dez é menor que sete.**

c) Como você está?

d) **O número 712 é ímpar.**

e) **A lua é o único satélite natural do planeta terra.**

f) $x^2 - 4 = 0$

g) Ela é muito talentosa.

Respostas:

a) Frase imperativa, não é uma proposição.

b) Proposição falsa.

c) Interrogação, não é uma proposição.

d) Proposição falsa.

e) Proposição verdadeira.

f) Não é uma proposição já que depende do valor de x.

g) Não é uma proposição já que depende da referência ao pronome “ela”.

Ciência da Computação

Valor lógico: Verdadeiro (V) ou Falso (F).

Algumas leis fundamentais

O valor lógico (V ou F) de uma proposição composta é unicamente determinado pelos valores lógicos de suas proposições constituintes.

Uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.

Conectivos (ou operadores lógicos): São usados para formar proposições compostas, combinando duas ou mais proposições simples.

Conectivo $\wedge$ (e)

Ex: Considere as proposições a seguir.

A → Elefantes são grandes.

B → Bolas de futebol são redondas.

Logo: A $\wedge$ B → Elefantes são grandes e bolas de futebol são redondas.

Valor lógico do conectivo Λ

A
verdadeira

B
verdadeira

A Λ B
verdadeira

A
falsa

B
falsa

A Λ B
falsa

A
verdadeira

B
falsa

A Λ B
falsa

A Λ B

<u>Conjunção de A e B</u>

Tabela-verdade

A	B	A ∧ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ciência da Computação

Conectivo V (ou inclusivo)

Ex: Considere as proposições a seguir.

P ⇒ Estou usando uma jaqueta.

Q ⇒ Estou usando um moletom.

Logo: P V Q ⇒ Estou usando uma jaqueta ou estou usando um moletom.

Valor lógico do conectivo V

P verdadeira

Q verdadeira

P V Q verdadeira

P falsa

Q falsa

P V Q falsa

P verdadeira

Q falsa

P V Q verdadeira

P V Q

Disjunção de P e Q

<u>Tabela-verdade</u>

P	Q	P V Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ciência da Computação

Conectivo $\oplus$ (ou exclusivo)

Ex: Considere as proposições a seguir.

P ➡ Vim de carro para o IFSUL.

Q ➡ Vim de ônibus para o IFSUL.

Logo: $P \oplus Q$ ➡ Ou vim de carro, ou vim de ônibus para o IFSUL.

Tabela-verdade

P	Q	$P \oplus Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

P ou Q, mas não ambos.

Ciência da Computação

Conectivo → (se..., então...)

Ex: Considere as proposições a seguir.

A ⇒ Sócrates é humano.

B ⇒ Sócrates é imortal.

Logo: $A \rightarrow B$ ⇒ Se Sócrates é humano, então Sócrates é imortal.

A tabela-verdade para o condicional **não é tão óbvia** quanto para $\wedge$ e $\vee$.

Ex: Seu amigo diz: “Se eu passar no teste de lógica, então eu vou ao Cultural na sexta-feira”.

E se ele não passar?

Independente se ele vai passar ou não, não podemos afirmar que a observação é falsa!

Ciência da Computação

Em outras palavras...

"Se A, então B" reflete a noção de que a partir de uma hipótese verdadeira (ou seja, A é verdade), obrigatoriamente deve-se chegar a uma conclusão verdadeira (ou seja, B é verdade) para que A → B seja verdadeira.

Entretanto, partindo de uma falsa hipótese, qualquer conclusão pode ser considerada.

Assim, A → B é **Falsa** se **A é verdadeira** e **B é falsa**. E **Verdade**, caso contrário.

Ciência da Computação

Valor lógico do conectivo →

A verdadeira
B verdadeira
A → B verdadeira

A falsa
B verdadeira
A → B verdadeira

A verdadeira
B falsa
A → B falsa

A falsa
B falsa
A → B verdadeira

A → B

Condicional ou implicação de A em B

Tabela-verdade

A	B	$A \rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ciência da Computação

Exemplos de proposições condicionais:

Se hoje é sexta-feira, então 2 + 3 = 5.

– Implicação que é sempre verdadeira pela definição (tabela da verdade) da proposição condicional.

Se hoje é sexta-feira, então 2 + 3 = 6.

– É verdadeira todos os dias da semana, exceto sexta-feira, apesar de $2+3 \neq 6$, ou seja, a conclusão ser sempre falsa.

Observações:

- Nós não usaríamos essas implicações em linguagem natural já que não existe uma relação entre hipótese e conclusão.
- O conceito matemático de implicação está baseado na tabela-verdade, ou seja, nos valores que a hipótese e a conclusão podem assumir.

Ciência da Computação

Uma maneira usual de entender a tabela-verdade de uma condicional é pensar em uma obrigação ou um contrato. Por exemplo, uma promessa que muitos políticos fazem quando são candidatos é

"Se eu for eleito, então vou diminuir os impostos."

Se o político for eleito, os eleitores devem esperar que esse político diminua os impostos. No entanto, se o político não for eleito, os eleitores não terão nenhuma expectativa sobre o que tal político fará com os impostos, mesmo que a pessoa tenha influência suficiente para baixá-los. Será apenas quando o político for eleito, mas não baixar os impostos, que os eleitores poderão dizer que o político quebrou sua promessa de campanha. Esse último cenário corresponde ao caso em que p é verdadeira e q é falsa em $p \to q$.

Conectivo ↔ (se, e somente se)

Ex: Considere as proposições a seguir.

A ➡ Este programa está correto.

B ➡ Este programa produz a resposta correta para todos os possíveis valores de dados de entrada.

Logo: A ↔ B ➡

Este programa está correto se somente se ele produz a resposta correta para todos os possíveis valores de dados de entrada.

INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Ciência da Computação

Ciência da Computação

Valor lógico do conectivo ↔

A verdadeira
B verdadeira
→ A ↔ B verdadeira

A falsa
B verdadeira
→ A ↔ B falsa

A verdadeira
B falsa
→ A ↔ B falsa

A falsa
B falsa
→ A ↔ B verdadeira

R ↔ S → <u>Bicondicional ou equivalência de A em B</u>

Ciência da Computação

Tabela-verdade

$\boxed{A \leftrightarrow B}$ é uma abreviatura de $\boxed{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)}$

A	B	A → B	B → A	A → B ∧ B → A	A ↔ B
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Ciência da Computação

Os conectivos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ são **conectivos binários**, pois juntam duas expressões através de um conectivo lógico produzindo uma terceira expressão.

Já o **conectivo unário** é um conectivo agindo sobre uma expressão para produzir uma segunda expressão, que é o caso da *negação*.

Ciência da Computação

Negação (não é o caso que ...)

’ ¬ ~ ‾

Tabela-verdade

A	~A
V	F
F	V

Ex:

A ⇒ 9 é igual a 5.

Logo:

~A ⇒ 9 é diferente de 5.

Ciência da Computação

Expressões em português

E, mas, também além disso, embora.

Conjunção
Conectivo ∧

Ou

Disjunção
Conectivo ∨

Não A.
É falso que A...
Não é verdade que A...

Negação
Conectivo ’ ¬ ~

Ciência da Computação

Se A, então B
A implica em B
A, logo B
B segue de A
A é condição suficiente para B
B é condição necessária para A
Basta A para B

<u>Condicional</u>
Conectivo →

A se, e somente se, B
A é condição necessária
e suficiente para B

<u>Bicondicional</u>
Conectivo ↔

Exercícios

Podemos encadear letras de proposições, conectivos e parênteses para formar novas expressões, como:

$$(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$$

respeitando regras de sintaxe.

Uma cadeia que forma uma expressão válida é denominada **fbf (fórmula bem formada)**.

Ciência da Computação

Ordem de precedência:

1. Efetua-se primeiro as expressões dentro dos parênteses mais internos.
2. ’ (negação)
3. $\wedge$
4. $\vee$
5. $\rightarrow$
6. $\leftrightarrow$

Ciência da Computação

Exemplos:

$A \vee B'$ significa $A \vee (B')$

$A \vee B \rightarrow C$ significa $(A \vee B) \rightarrow C$

Em uma fbf com diversos conectivos, o último a ser aplicado é o conectivo principal.

Ex.: $((A \vee B) \wedge C) \rightarrow (B \vee C')$

$P \rightarrow Q$

Algoritmo para Construir a Tabela-Verdade

A Tabela-Verdade de uma proposição composta por *n* variáveis é obtida por:

1. As primeiras *n* colunas da tabela devem ser rotuladas com as letras sentenciais – outras colunas servirão para combinações intermediárias.
2. Sob cada uma das primeiras colunas lista-se todas as 2^n possíveis combinações dos valores verdade das letras sentencias.
3. Para cada linha computa-se o valor verdade resultante das proposições intermediárias, isto é, as letras sentenciais ligadas por conectivos ou precedidas de negação.

Exemplo: Construir a tabela-verdade da proposição (A ∧ B') → C'

Envolve 3 proposições independentes, logo, há $2^3 = 8$ situações possíveis:

A	B	C	B'	C'	A ∧ B'	(A ∧ B') → C'
V	**V**	**V**	F	F	F	V
V	**V**	**F**	F	V	F	V
V	**F**	**V**	V	F	V	F
V	**F**	**F**	V	V	V	V
F	**V**	**V**	F	F	F	V
F	**V**	**F**	F	V	F	V
F	**F**	**V**	V	F	F	V
F	**F**	**F**	V	V	F	V

Ex.: A tabela mostra a fbf (A ∧ B') → C'
O conectivo principal, de acordo com as regras de precedência, é o condicional.

Contradição

Ex:

$(A \vee A') \rightarrow (B \wedge B')$

A	B	A'	B'	A V A'	B Λ B'	(A V A') → (B Λ B')
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Uma fbf cujo valor **é sempre Falso é denominada <u>contradição</u>**.

Ex: “Hoje é quinta-feira e hoje não é quinta-feira.”

Tautologia

Ex:

$(A' \wedge B) \rightarrow (A' \vee B)$

A	**B**	**A'**	**A' Λ B**	**A' V B**	**(A' Λ B) → (A' V B)**
V	**V**				
V	**F**				
F	**V**				
F	**F**				

Uma fbf que assume **apenas o valor Verdade é uma Tautologia**.

Ex: "Hoje vai ter sol ou hoje não vai ter sol".

Contingência

Ex:

A V B’ → (A V B)’

A	B	B’	A V B’	A V B	(A V B)’	A V B’ → (A V B)’
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Uma fbf que não é nem tautologia nem contradição **é denominada <u>contingência</u>**.

Equivalências lógicas

Se $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia, então P e Q são logicamente equivalentes e denotamos por $P \Leftrightarrow Q$.

Em outras palavras, P é equivalente a Q quando P e Q tem o mesmo valor-verdade em todas as combinações possíveis das variáveis que formam as proposições.

Ex:

$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B' \rightarrow A')$ é uma tautologia. Portanto, $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (B' \rightarrow A')$

A	B	$A \rightarrow B$	B'	A'	$B' \rightarrow A'$	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B' \rightarrow A')$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Exercício:

Mostre que $A \rightarrow B$ é logicamente equivalente a $A' \vee B$

Como verificar se duas proposições P e Q são logicamente equivalentes?

1. Construa a tabela da verdade para P.
2. Construa a tabela da verdade para Q usando os mesmos valores de variáveis para as afirmações que formam a proposição.
3. Verifique se as tabelas da verdade de P e Q são idênticas para cada combinação de valores-verdade. Se forem, P e Q são equivalentes logicamente, caso contrário não.

Ciência da Computação

São proposições equivalentes: $(A \rightarrow B)$, $(B' \rightarrow A')$ e $(A' \vee B)$.

Exercício: A afirmação: "João não chegou ou Maria está atrasada" equivale logicamente a:

a) Se João não chegou, Maria está atrasada.

b) João chegou e Maria não está atrasada.

c) Se João chegou, Maria não está atrasada.

d) Se João chegou, Maria está atrasada.

e) João chegou ou Maria não está atrasada.

Ciência da Computação

Exercício: **ALESP – 2010)** Durante uma sessão no plenário da Assembléia Legislativa, o presidente da mesa fez a seguinte declaração, dirigindo-se às galerias da casa:

"Se as manifestações desrespeitosas não forem interrompidas, então eu não darei início à votação".

Esta declaração é logicamente equivalente à afirmação:

a) se as manifestações desrespeitosas não continuarem, então o presidente da mesa não começará a votação

b) se o presidente da mesa não deu início à votação, então as manifestações desrespeitosas não foram interrompidas

c) se as manifestações desrespeitosas forem interrompidas, então o presidente da mesa dará início à votação

d) se as manifestações desrespeitosas continuarem, então o presidente da mesa começará a votação

e) se o presidente da mesa deu início à votação, então as manifestações desrespeitosas foram interrompidas

Algumas regras de equivalência

$p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$	Idempotência
$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	Dupla negação
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	Comutatividade
$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	Associatividade
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributividade
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	Leis de Morgan

Negação dos conectivos

$(A \wedge B)'$	$\Leftrightarrow$	$A' \vee B'$
$(A \vee B)'$	$\Leftrightarrow$	$A' \wedge B'$
$(A \rightarrow B)'$	$\Leftrightarrow$	$A \wedge B'$
$(A \leftrightarrow B)'$	$\Leftrightarrow$	$A \oplus B$

Negação dos conectivos

Exemplo:

1) Quais das proposições a seguir representam a negação da proposição
   "Júlia gosta de manteiga, mas detesta creme." ?

a. Júlia detesta manteiga e creme.
b. Júlia não gosta de manteiga nem de creme.
c. Júlia não gosta de manteiga, mas adora creme.
~~d.~~ Júlia odeia manteiga ou gosta de creme.

Negação dos conectivos

Exemplo:

2) A negação lógica da proposição

“**O Brasil está na América do Sul ou Portugal está na África**”, é:

a. O Brasil não está na América do Sul e Portugal está na África.

b. O Brasil não está na América do Sul ou Portugal não está na África.

c. O Brasil está na América do Sul e Portugal não está na África.

d. O Brasil não está na América do Sul e Portugal não está na África.

e. Se o Brasil está na América do Sul, então Portugal está na África.

Negação dos conectivos

<u>Exemplo:</u>

3) A negação da seguinte proposição composta:

“**Se estudo atentamente então serei nomeado em concurso público**” é:

a. Se não estudo atentamente, então não serei nomeado em concurso público.

b. Estudo atentamente e não serei nomeado em concurso público.

c. Se não serei nomeado em concurso público, então não estudo atentamente.

d. Estudo atentamente ou serei nomeado em concurso público.

e. Não estudo atentamente se, somente se não serei nomeado em concurso público.

INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Ciência da Computação

Ciência da Computação

Negação dos conectivos

<u>Exemplo:</u>

3) A negação da proposição:

“**Chove em Imbé se, e somente se, faz calor no verão**” é:

a. Se chove em Imbé, então faz calor no verão.

b. Chove em Imbé e faz calor no verão.

c. Não chove em Imbé ou não faz calor no verão.

d. Não chove em Imbé se, e somente se, não faz calor no verão.

e. Ou chove em Imbé, ou faz calor no verão.

Exercícios