CONJUNTOS

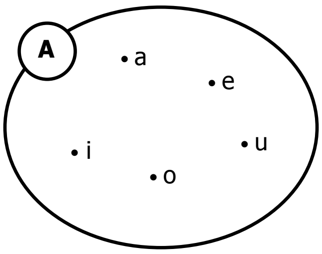
Definição:
Conjunto é uma coleção (lista) de objetos, coisas, etc. Os componentes de um conjunto são chamados de "elementos".

Representação:
Um conjunto normalmente é denominado por uma letra MAIÚSCULA e pode ser representado basicamente de três maneiras:

- **Por extensão (listagem, tabular):** A = { a, e, i, o, u }

- **Por compreensão (propriedade):** A = { x | x é vogal } ou A = { x **:** x é vogal }

- **Por diagramas* (figuras):**



Nota:
Para representar que o conjunto **A** tem "cinco" elementos, escrevemos:
n(A) = 5

* Diagramas de Venn-Euler

Observações:

Conjunto dos números primos: P = { 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...} $\rightarrow$ **Conjunto Infinito**

Conjunto dos números pares positivos menores que 100: P = { 2, 4, 6, 8, ... , 96, 98 } $\rightarrow$ **Conjunto Finito**

Pertinência:

Se T = { i , f , s , c } então: $s \in T$ $\rightarrow$ o elemento "s" pertence ao conjunto T
$x \notin T$ $\rightarrow$ o elemento "x" **não** pertence ao conjunto T

Conjunto Unitário:
Um conjunto é unitário quando possui um único elemento. Veja os exemplos:
Conjunto dos números primos pares: C = { 2 }
Conjunto dos satélites naturais da Terra: S = { Lua }

Conjunto Vazio
Um conjunto é vazio quando não possui elementos. Representamos um conjunto vazio por: { } ou $\varnothing$. Veja os exemplos:

$A = \{ x \mid x^2 = 4 \text{ e } x \text{ é ímpar} \} \quad \therefore \quad A = \varnothing$

$D = \{ x : x \text{ é positivo e negativo} \} \quad \therefore \quad D = \{ \ \}$

Simbolicamente: $V = \{ \ \} = \varnothing \Leftrightarrow (\forall x, x \notin V)$

Observação: $\{ \varnothing \}$ é um conjunto **UNITÁRIO**.

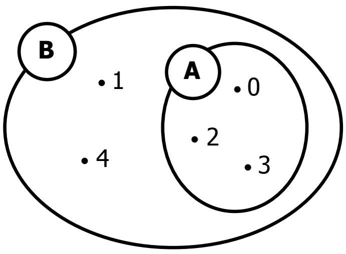
Subconjunto [ou Parte]
Se todo elemento de um conjunto A também for um elemento de um conjunto B, então podemos dizer que A é um subconjunto de B [ou parte de B].

Para exemplificar, considere os conjuntos A = { 0, 2, 3 } e B = { 0, 1, 2, 3, 4 }.

A é **subconjunto** de B, pois todos os elementos de A também estão em B.

Através de símbolos, escrevemos: $\mathbf{A \subset B}$ [Lê-se: A está contido em B]
Podemos dizer também que B contém A. Escrevemos: $\mathbf{B \supset A}$

Em diagramas, temos:



Simbolicamente, temos: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$

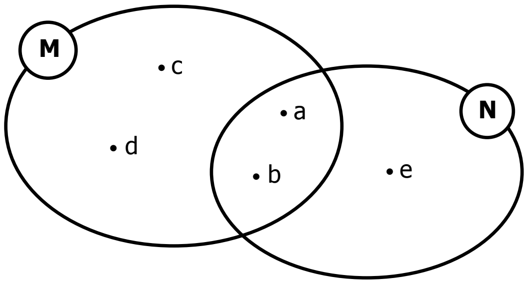
Consequências:
- $\forall A$, temos que $A \subset A$
- $\forall A$, temos que $\varnothing \subset A$
- $\forall A, \forall B$ e $\forall C$, se temos que: $A \subset B$ e $B \subset C$, então: $A \subset C$.

Observe outro exemplo:

Considere os conjuntos N = { a, b, e } e M = { a, b, c, d }.

Neste caso temos: $\mathbf{N \not\subset M}$ [Lê-se: N não está contido em M] ou ainda $\mathbf{M \not\supset N}$ [Lê-se: M não contém N]

Em diagramas, temos:



"N **não** é subconjunto de M"

Igualdade de Conjuntos
Dois ou mais conjuntos são iguais quando possuem exatamente os mesmos elementos. Caso contrário, são diferentes.
Veja os exemplos:

A = { x | x é número par positivo menor que 8 }

B = { 4, 6, 2 }

C = { 2, 4, 5 }

D = { 2, 4, 6, 8 }

E = { 2, 4, 4, 6 }

Analisando:

A = B = E

A ≠ C

A ≠ D

Simbolicamente, temos: $A = B \Leftrightarrow (\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ ou ainda $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ e } B \subset A)$

Observação: a representação do conjunto "E" **não** é usual, pois não se repete um elemento de um conjunto.

Lembretes:

- Os símbolos $\in$, $\notin$ são utilizados para relacionar $\in$lementos com conjuntos.
- Os símbolos $\subset, \not\subset, \supset, \not\supset$ são utilizados para relacionar $\subset$onjuntos com conjuntos.

Conjunto Universo ou Universal:
É um conjunto específico, ao qual pertencem todos os elementos de interesse que serão considerados em determinada situação ou problema.

Exemplo 1:
Quando estudamos a população humana, por exemplo, o conjunto universo [que pode ser representado por **U**] será constituído por todos os seres humanos do planeta.

Exemplo 2:
Considere o conjunto $A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x^2 + x - 12 = 0 \}$. Neste caso, temos que o conjunto universo é: $\mathbf{U} = \mathbb{N}$.

Nota: Veremos mais adiante que $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, ...\}$ é conhecido como "Conjunto dos Números Naturais".

Assim, devemos encontrar os valores do Conjunto Universo que satisfazem equação quadrática: $\mathbf{x^2 + x - 12 = 0}$.

Então, para resolvermos a equação em questão, aplicamos a Fórmula de Bháskara: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Isso implica que: $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4.(1).(-12)}}{2.(1)} \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm 7}{2}$

As raízes são: $x' = \dfrac{-1+7}{2} = \dfrac{6}{2} \therefore \boxed{x' = 3}$ e $x'' = \dfrac{-1-7}{2} = \dfrac{-8}{2} \therefore \boxed{x'' = -4}$

Entretanto, note que uma das raízes não faz parte do Conjunto Universo $\mathbf{U} = \mathbb{N}$, pois: $-4 \notin \mathbb{N}$.

Como os elementos do conjunto A devem satisfazer as "duas condições", temos que o conjunto A é unitário.

Logo: A = { 3 }.

O Conjunto das Partes de um Conjunto: [$\mathcal{P}$]

Dado um conjunto A, podemos construir um novo conjunto formado por todos os subconjuntos (partes) de A. Esse novo conjunto chama-se CONJUNTO dos SUBCONJUNTOS de A ou CONJUNTO das PARTES de A e é indicado por $\mathcal{P}(A)$.

Exemplo: Considere o conjunto $B = \{ 3, 5, 10 \}$.

Os possíveis Subconjuntos de B são:

$\varnothing$	$\{3, 5\}$
$\{3\}$	$\{3, 10\}$
$\{5\}$	$\{5, 10\}$
$\{10\}$	$\{3, 5, 10\}$

Então, o Conjunto das $\mathcal{P}$artes de B é: $\mathcal{P}(B) = \{ \varnothing, \{3\}, \{5\}, \{10\}, \{3, 5\}, \{3, 10\}, \{5, 10\}, B \}$

Atenção:

$5 \in B$ $\{5\} \subset B$ $\{5\} \in \mathcal{P}(B)$ $\{\{5\}\} \subset \mathcal{P}(B)$

$\varnothing \subset B$ $\varnothing \in \mathcal{P}(B)$ $\varnothing \subset \mathcal{P}(B)$ $5 \notin \mathcal{P}(B)$ $B \in \mathcal{P}(B)$

Simbolicamente, temos: $\mathcal{P}(A) = \{ X \mid X \subset A \}$ e $X \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \subset A$

Número de Elementos de um Conjunto das Partes:

Seja A um conjunto com um número finito de elementos.

Indicamos por **n(**A**)** $\rightarrow$ o **número de elementos** de A.

Indicamos por **n[**$\mathcal{P}$(A)**]** $\rightarrow$ o **número de elementos** do Conjunto das Partes de A.

Assim, temos que:

Se $n(A) = K \Rightarrow n[\mathcal{P}(A)] = 2^K$ ou ainda $n[\mathcal{P}(A)] = 2^{n(A)}$

Considerando o exemplo dado anteriormente:

$B = \{ 3, 5, 10 \}$ com $\mathcal{P}(B) = \{ \varnothing, \{3\}, \{5\}, \{10\}, \{3, 5\}, \{3, 10\}, \{5, 10\}, B \}$

Assim temos: $n(B) = 3$. Logo, note que: $n[\mathcal{P}(B)] = 2^3 = 8$ elementos.

EXERCÍCIOS – Conjuntos

1) Dado o conjunto $A = \{ b , o , y , z , e , r , a \}$, indique quais das sentenças são verdadeiras:

a) $o \in A$
b) $i \in A$
c) $x \notin A$
d) $7 \in A$
e) $boy \in A$
f) $a \notin A$
g) $b \subset A$

> **Nota:**
> Os exercícios com a indicação "PAIVA" foram extraídos do livro:
> • PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**. v.1. São Paulo: Moderna, 1995.

2) Represente por extensão, os conjuntos descritos abaixo.

a) O Conjunto G, dos números primos positivos menores que 10.
b) O Conjunto O, dos pólos geográficos da Terra.
c) O Conjunto S, dos números múltiplos não negativos de 3 menores que 15.
d) O Conjunto M, dos divisores positivos de 9.
e) O Conjunto A, dos números pares menores que 6.

3) Represente os conjuntos abaixo através de uma <u>propriedade</u> comum a seus elementos.

a) $B = \{ 1 , 3 , 5 \}$
b) $A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$
c) $G = \{ 0 , 5, 10 , 15 , 15 , 20 , ... \}$
d) $O = \{ 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 \}$
e) $S = \{ 0 , 1 , 4 , 9 , 16 , ... \}$

4) Dado o conjunto $E = \{\, 2 , 3 , 14 , 18 \,\}$, estabeleça as relações $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$ entre :

a) 2 .... E

b) { 2 } .... E

c) { 4 } .... E

d) { 2 , 3 } .... E

e) $\varnothing$ .... E

f) 4 .... E

g) { 1 , 2 , 3 } .... E

h) { 2 , 3 , 14 , 18 } .... E

i) { 3 } .... $\mathcal{P}(E)$

j) 3 .... $\mathcal{P}(E)$

k) { $\varnothing$, {3} } .... $\mathcal{P}(E)$

l) { {3} } .... $\mathcal{P}(E)$

m) { 2 , 18 } .... $\mathcal{P}(E)$

n) $\varnothing$ .... $\mathcal{P}(E)$

o) { {3} , {14} } .... $\mathcal{P}(E)$

5) Determine o número de elementos de $\mathcal{P}(A)$, quando:

a) A = { x | x é número ímpar compreendido entre 4 e 21 }

b) A = { $x \in \mathbb{N}$ | x é número par menor que 10 }

6) Quantos elementos tem um conjunto que possui 2048 subconjuntos?

7) Escreva por extensão o conjunto das partes do conjunto M, sendo M = { x | x é vogal da palavra banana }.

8) O Conjunto das Partes de um conjunto V é um conjunto unitário. Isto é possível? Quando?

9) [PAIVA] Num programa de tevê, um espectador participa de um jogo onde deve responder a 5 perguntas. As perguntas por apresentarem diferentes níveis de dificuldade, correspondem a prêmios diferentes: um relógio, um rádio, um fogão, um televisor e uma geladeira. Para cada resposta certa, o espectador recebe um prêmio correspondente à pergunta. De quantas maneiras diferentes pode ser premiado (ou não) esse espectador?

10) [PAIVA] Uma represa possui quatro comportas e elas têm vazões diferentes entre si. Pode-se dar vazão por apenas uma das comportas, ou por duas quaisquer, ou por três quaisquer, ou ainda pelas quatro simultaneamente. De quantas maneiras diferentes pode-se dar vazão à água desta represa?

11) [PAIVA] Um fabricante de perfume dispõe de 8 essências diferentes para a fabricação de uma série de perfumes. Sabendo que cada mistura de pelo menos 2 essências resulta numa fragrância diferente, calcule o número de fragrâncias (perfumes) que podem se obtidas.

12) Quando um conjunto das partes $\mathcal{P}(C)$ tiver 2 elementos, quantos elementos terá o conjunto C?

13) Escreva todos os elementos do conjunto a seguir, por extensão: $M = \{\, x \in \mathbb{N} \mid (x-1).(x-2).(x+3) = 0 \,\}$

14) Represente os conjuntos dados por meio de uma propriedade (por compreensão) utilizando fórmulas matemáticas:

Exemplo: $K = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\}$ → **Por compreensão:** $K = \left\{\, x \mid x = \frac{n}{n+1} \text{ com } n \in \mathbf{N} \,\right\}$

Considere que: $\mathbb{N} = \{\, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ → Conjunto do Números Naturais

a) $A = \{\, 0 , 7 , 14 , 21 , 28 , \dots \,\}$

b) $B = \{\, 0 , 1 , 16 , 81 , 256 , \dots \,\}$

c) $C = \{\, 0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , \dots \,\}$

d) $D = \{\, 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11 , \dots \,\}$

e) $E = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \dots \right\}$

f) $F = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \dots \right\}$

g) $G = \left\{ \frac{7}{4}, \frac{3}{2}, \frac{11}{8}, \frac{13}{10}, \dots \right\}$

h) $H = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \dots \right\}$

☠ **15)** Escreva o conjunto $D = \{ 2 , 10 , 12 , 16 , 17 , 18 , 19 , 200 \}$ através de uma propriedade (característica) comum de seus elementos.

RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS

1a) V **1b)** F **1c)** V **1d)** F **1e)** F **1f)** F **1g)** F **2a)** $G = \{ 2 , 3 , 5 , 7 \}$ **2b)** O = { Norte , Sul }

2c) $S = \{ 0 , 3 , 6 , 9 , 12 \}$ **2d)** $M = \{ 1 , 3 , 9 \}$ **2e)** $A = \{ 4 , 2 , 0 , -2 , -4 , -6 , \ldots \}$

3a) Uma entre as possíveis maneiras é: B = { x | x é ímpar positivo menor que 6 }

3b) Uma entre as possíveis maneiras é: A = { x | x é inteiro positivo menor que 7 }

3c) Uma possível maneira é: G = { x | x é múltiplo não negativo de 5 } ou ainda: G = { $x \in \mathbb{N}$ | x é múltiplo de 5 }

3d) Uma possível maneira é: O = { x | x é primo positivo menor que 20 } ou ainda: O = { $x \in \mathbb{N}$ | x é primo e $x < 20$ }

3e) Uma possível maneira é: S = { x | x é quadrado perfeito } ou ainda: S = { x | $x = n^2$ com $n \in \mathbb{N}$ }

4a) $\in$ **4b)** $\subset$ **4c)** $\not\subset$ **4d)** $\subset$ **4e)** $\subset$ **4f)** $\notin$ **4g)** $\not\subset$

4h) $\subset$ **4i)** $\in$ **4j)** $\notin$ **4k)** $\subset$ **4l)** $\subset$ **4m)** $\in$ **4n)** $\in$ ou $\subset$ **4o)** $\subset$

5a) $n[\mathcal{P}(A)] = 2^8 = 256$ elementos **5b)** $n[\mathcal{P}(A)] = 2^5 = 32$ elementos **6)** 11 elementos

7) $\mathcal{P}(M) = \{ \varnothing , \{a\} \}$ **8)** Sim. Quando temos que $V = \varnothing$, teremos $\mathcal{P}(V) = \{ \varnothing \}$. Note que: $n[\mathcal{P}(V)] = 2^0 = 1$

9) 32 maneiras diferentes **10)** 15 maneiras diferentes **11)** 247 fragrâncias **12)** 1 elemento, ou seja: $n(C) = 1$

13) $M = \{ 1 , 2 \}$ Note que o conjunto solução da equação $(x-1)(x-2)(x+3) = 0$ é $\{ 1 , 2, -3 \}$ porém temos que $-3 \notin \mathbb{N}$

14a) $A = \left\{ x \mid x = 7n \text{ com } n \in N \right\}$ **14b)** $B = \left\{ x \mid x = n^4 \text{ com } n \in N \right\}$

14c) $C = \left\{ x \mid x = 2n \text{ com } n \in N \right\}$ **14d)** $D = \left\{ x \mid x = 2n+1 \text{ com } n \in N \right\}$

14e) $E = \left\{ x \mid x = \dfrac{2n+1}{2n+2} \text{ com } n \in N \right\}$ **14f)** $F = \left\{ x \mid x = \dfrac{\sqrt{n}}{2} \text{ com } n \in N \right\}$

14g) $G = \left\{ x \mid x = \dfrac{2n+7}{2n+4} \text{ com } n \in N \right\}$ **14h)** $H = \left\{ x \mid x = \dfrac{n}{n+2} \text{ com } n \in N \right\}$

Para descontrair!

Créditos: Mauricio de Sousa Produções Ltda.

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

As operações que envolvem conjuntos têm aplicações específicas em diversas áreas da ciência e da tecnologia, além de outros campos da própria matemática.

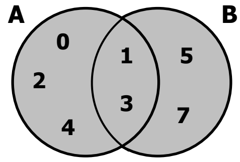
Podemos destacar três operações (básicas) principais com conjuntos. São elas: união, intersecção e subtração. Estudaremos esses casos, e alguns mais, através de exemplos.

Veja:

• UNIÃO OU REUNIÃO

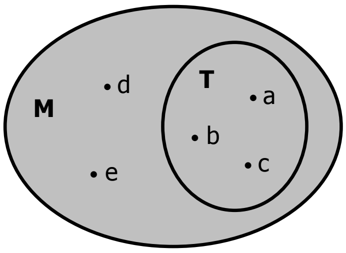
Simbolicamente: $A \cup B = \{ x \mid x \in A$ **ou** $x \in B \}$

Exemplo 1: $A = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ e $B = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ Nos diagramas:



$A \cup B = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7 \}$

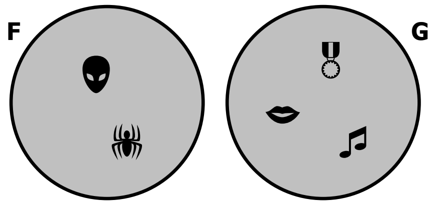
Exemplo 2: $T = \{ a, b, c \}$ e $M = \{ a, b, c, d, e \}$ Nos diagramas:



$T \cup M = \{ a, b, c, d, e \} = M$

Note que: $T \subset M$

Exemplo 3: F = { 👽, 🕷 } e G = { 🎖, 👄, ♫ } Nos diagramas:



$F \cup G =$ { 👽, 🕷, 🎖, 👄, ♫ }

Observações:

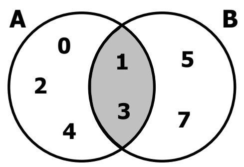
\# Nos diagramas acima, as regiões sombreadas representam a UNIÃO dos conjuntos em questão.

\# Também representamos o conectivo "**ou**" pelo símbolo: $\vee$

• INTERSECÇÃO

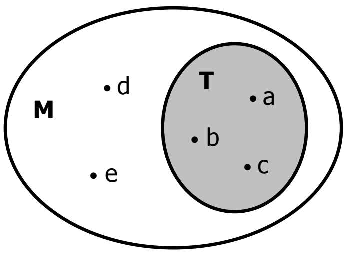
Simbolicamente: $A \cap B = \{ x \mid x \in A$ **e** $x \in B \}$

Exemplo 1: $A = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ e $B = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ Nos diagramas:



$A \cap B = \{ 1, 3 \}$

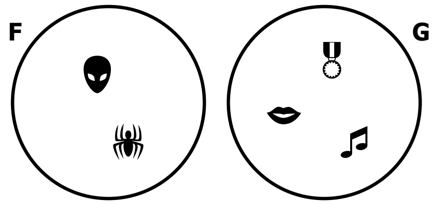
Exemplo 2: $T = \{ a, b, c \}$ e $M = \{ a, b, c, d, e \}$ Nos diagramas:



$T \cap M = \{ a, b, c \} = T$

Note que: $T \subset M$

Exemplo 3: F = { 👽, 🕷 } e G = { 🎖, 👄, ♫ } Nos diagramas:



$F \cap G = \{ \ \}$

Nota: Se $A \cap B = \varnothing$, dizemos que A e B são conjuntos **disjuntos**.

Observações:

\# Nos diagramas acima, as regiões sombreadas representam a INTERSECÇÃO dos conjuntos em questão.

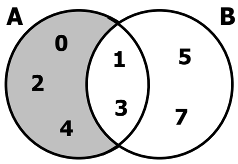
\# Também representamos o conectivo "**e**" pelo símbolo: $\wedge$

• SUBTRAÇÃO OU DIFERENÇA

Simbolicamente: $A - B = \{ x \mid x \in A$ **e** $x \notin B \}$

Exemplo 1: $A = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ e $B = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ Nos diagramas:

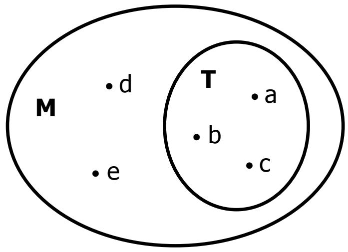
$A - B = \{ 0, 2, 4 \}$



Exemplo 2: $T = \{ a, b, c \}$ e $M = \{ a, b, c, d, e \}$ Nos diagramas:

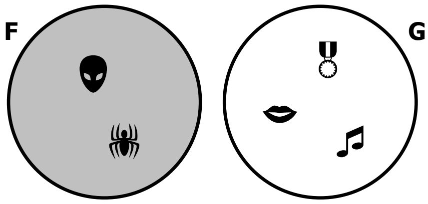
$T - M = \{ \quad \}$

Note que: $T \subset M$



Exemplo 3: F = { 👽, 🕷 } e G = { 🎖, 👄, ♫ } Nos diagramas:

F – G = { 👽, 🕷 } = F



Observação:
Nos diagramas acima, as regiões sombreadas representam a DIFERENÇA dos conjuntos em questão.

Particularidade da Subtração: Complemento de um Conjunto

Se $A \subset B$ podemos escrever $C_B^A = B - A$. Lê-se "**complementar (ou complemento) de A em relação a B**".

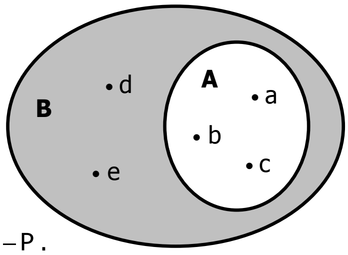
Em linguagem simplificada, podemos dizer que C_B^A é "**o que falta para o conjunto A ficar igual ao B**".

Exemplo:

Considere os conjuntos $A = \{ a, b, c \}$ e $B = \{ a, b, c, d, e \}$.

Observe que $A \subset B$, então podemos fazer $C_B^A = B - A = \{ d, e \}$

Nos diagramas ao lado, a área sombreada representa o complemento.



• Para um conjunto **P** qualquer e conjunto Universo **U**, temos: $C_U^P = P' = P^C = \overline{P} = U - P$.

Nota: Observe que o complemento só poderá ocorrer quando relacionarmos um conjunto com um de seus **subconjuntos**.

Tópico Extra: Diferença Simétrica [Δ]

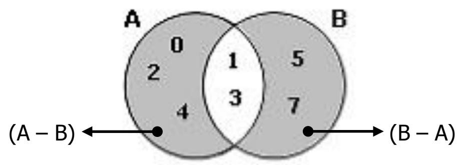
A diferença simétrica entre os conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que **pertencem à união** dos conjuntos A e B e **não pertencem à intersecção** dos conjuntos A e B. Simbolicamente, temos:

$$A \,\Delta\, B = \{ x \mid x \in (A \cup B) \text{ e } x \notin (A \cap B) \} \qquad \text{ou ainda} \qquad A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$$

Podemos dizer de outra forma que a diferença simétrica entre os conjuntos A e B é o conjunto que contém todos os elementos que estão em A ou estão em B, mas não em ambos.

Exemplo: $A = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ e $B = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ Nos diagramas:

$A \,\Delta\, B = \{ 0 , 2 , 4 , 5 , 7 \}$



A área sombreada representa a diferença simétrica.

Notas:

- $(A \,\Delta\, A) = \varnothing$
- $(A \,\Delta\, B) = A$ se, e somente se, $B = \varnothing$

PROPRIEDADES GERAIS:

Para os conjuntos A, B e C quaisquer, teremos várias propriedades. Veja algumas:

- $A \cup A = A$ • $A \cup \varnothing = A$ • $A \cup B = B \cup A$ → Propriedade Comutativa (na União)
- $A \cap A = A$ • $A \cap \varnothing = \varnothing$ • $A \cap B = B \cap A$ → Propriedade Comutativa (na Intersecção)

- $A - B \neq B - A$ → **Nota:** só teremos $A - B = B - A$ se $A = B$.

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ • $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ • $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Algumas das propriedades apresentadas acima são identificadas por um "nome", como a comutativa, por exemplo.
Faça uma pesquisa e identifique o nome de mais algumas!

Número de Elementos de um Conjunto Finito

Seja A um conjunto com um número finito de elementos. Indicaremos por **n(A)** o número de elementos de A.
Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Assim, valem as seguintes propriedades:

- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ • $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

Para você Pensar!

Algumas Propriedades envolvendo o Complemento [de um Conjunto]

Para os conjuntos A e B quaisquer, temos:

- $C_A^A = \varnothing$
- $C_A^{\varnothing} = A$
- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ que também pode ser escrito na forma: $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ que também pode ser escrito na forma: $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Da propriedade acima, podemos escrever a forma generalizada para uma quantidade "n" de conjuntos:

$$(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n)^C = A_1^{\,C} \cup A_2^{\,C} \cup A_3^{\,C} \cup \ldots \cup A_n^{\,C}$$

EXERCÍCIOS – Operações com Conjuntos

1) Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 4, 5\}$, $B = \{0, 2, 4, 6\}$, $C = \{1, 3, 5, 11\}$ e $D = \{2, 4\}$, determine:

a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $A \cap C$
d) $A - B$
e) $A \cup B \cup C$
f) $A \cap B \cap C$
g) $(B \cap C) \cup A$
h) $(A \cap C) \cap \varnothing$
i) $\{\ \} \cup (A \cup B)$
j) $(B \cup C) \cap A$
l) $B - C$
m) $B - (D - A)$
n) C_B^D
o) C_A^D
p) $C_C^{\varnothing}$
q) $n[\mathcal{P}(C)]$
r) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
s) $\mathcal{P}(B)$

RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS

1a) {0,1,2,4,5,6} **1b)** {0,2,4} **1c)** {1,5} **1d)** {1,5} **1e)** {0,1,2,3,4,5,6,11} **1f)** $\varnothing$ **1g)** A = {0,1,2,4,5}

1h) $\varnothing$ **1i)** {0,1,2,4,5,6} **1j)** {0,1,2,4,5} = A **1l)** B = {0,2,4,6} **1m)** B = {0,2,4,6} **1n)** {0,6}

1o) {0,1,5} **1p)** C = {1,3,5,11} **1q)** 16 elementos **1r)** { $\varnothing$, {0}, {2}, {4}, {0,2}, {0,4}, {2,4}, {0,2,4} }

s) $\mathcal{P}(B)$ = { $\varnothing$, {0} , {2} , {4} , {6} , {0,2} , {0,4} , {0,6} , {2,4} , {2,6} , {4,6} , {0,2,4} , {0,2,6} , {0,4,6} , {2,4,6} , B }

PROBLEMAS QUE ENVOLVEM CONJUNTOS

Através da "Teoria de Conjuntos" que estudamos até o momento, podemos solucionar diversos problemas que envolvem conjuntos, das mais variadas espécies.

Antes de entrarmos propriamente no referido estudo, podemos destacar a fórmula: $\boxed{\mathbf{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}}$, que calcula o número de elementos da união de dois conjuntos finitos quaisquer.

O estudo em questão se dará através da análise de exemplos.

EXEMPLO 1:

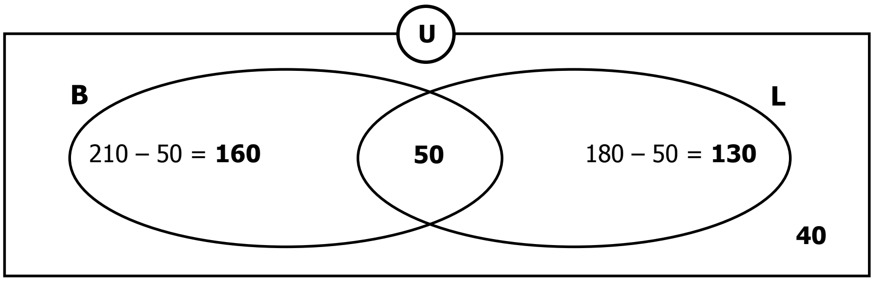
Uma empresa de Hardware monta diversos modelos de computadores, inclusive com Blu-Ray e/ou monitor com tela de LED. Feito uma análise numa linha de produção, foram levantados os seguintes dados:

Periféricos	Blu-Ray	Monitor LED	Blu-Ray e Monitor LED	Nenhum dos dois
Número de Computadores	210	180	50	40

Quantos computadores foram montados nesta linha de produção?

Resolução:

Através das informações do problema, podemos montar os diagramas a seguir:



Observando os diagramas ao lado, podemos escrever:

$n(U) = 160 + 130 + 50 + 40$

$n(U) = 380$

Logo, foram montados 380 computadores nesta linha de produção.

Note que:

$n(B \cup L) = n(B) + n(L) - n(B \cap L)$

$n(B \cup L) = 210 + 180 - 50$

$n(B \cup L) = 340$

$n(U) = n(B \cup L) + 40$

$n(U) = 340 + 40$

$n(U) = 380$

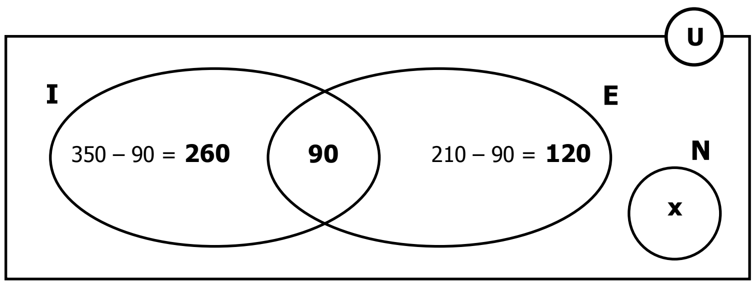
EXEMPLO 2:

[GIONVANNI / Adaptada] Numa escola de 630 alunos, 350 deles estudam Italiano, 210 estudam Espanhol e 90 estudam as duas disciplinas (Italiano e Espanhol). Pergunta-se:

a) Quantos alunos estudam apenas Italiano? (Estudam Italiano mas não estudam Espanhol)
b) Quantos alunos estudam apenas Espanhol?
c) Quantos alunos estudam Italiano ou Espanhol?
d) Quantos alunos não estudam nenhuma das duas disciplinas?
e) Quantos alunos estudam somente um idioma?

Resolução:

Através das informações do problema, podemos montar os diagramas ao lado:



Então, podemos responder:

a) 260 alunos

b) 120 alunos

c) 260 + 120 + 90 = 470 alunos

d) x = 630 – 470 = 160 alunos

e) 260 + 120 = 380 alunos

Com base no exposto até então, escreva uma fórmula que determina o número de elementos da união de três conjuntos finitos quaisquer.

n(A ∪ B ∪ C) = ...

EXEMPLO 3:

[PUC – RJ] Uma população consome três marcas de sabão em pó: A, B e C. Feita uma pesquisa de mercado, colheram-se os resultados tabelados abaixo. Determine o número de pessoas consultadas.

Marca	Número de Consumidores
A	105
B	200
C	160
A e B	25
B e C	40
A e C	25
A , B e C	5
Nenhuma das 3	120

A receita para a ignorância perpétua é permanecer satisfeito com suas opiniões e contente com seus conhecimentos. [Elbert Hubbard]

☠ Esquentando o Processador!

Abaixo, dois "probleminhas" para você utilizar toda a sua capacidade de imaginação e processamento...

1) Se a metade de XII não é seis, então quanto é?

2) Uma lesma começa a subir num poste de 10m de altura. De dia ela sobe 2m e à noite desce 1m. Em quantos dias atingirá o topo do poste?

EXERCÍCIOS – Problemas que envolvem Conjuntos

1) [GIONVANNI] Numa pesquisa, verificou-se que, das pessoas consultadas, 100 liam o jornal A, 150 liam o jornal B, 20 liam os dois jornais (A e B) e 110 não liam nenhum deles. Quantas pessoas foram consultadas?

2) [UnB – DF] De 200 pessoas que foram pesquisadas sobre suas preferências em assistir aos campeonatos de corrida pela televisão, foram colhidos os seguintes dados: 55 dos entrevistados não assistem; 101 assistem às corridas de Fórmula 1 e 27 assistem às corridas de Fórmula 1 e Motovelocidade. Quantas das pessoas entrevistadas assistem, exclusivamente, às corridas de Motovelocidade?

3) [GIONVANNI / Adaptada] Uma editora estuda a possibilidade de relançar as obras: "Helena", "Iracema" e "A Moreninha". Para isso efetuou uma pesquisa de mercado e concluiu que, em cada 1000 pessoas consultadas,
- 600 leram A Moreninha;
- 400 leram Helena;
- 300 leram Iracema;
- 20 leram as três obras.
- 200 leram A Moreninha e Helena;
- 150 leram A Moreninha e Iracema;
- 100 leram Iracema e Helena;

Determine:
a) o número de pessoas que leu apenas uma das três obras.
b) o número de pessoas que não leu nenhuma das três obras.
c) o número de pessoas que leu duas ou mais obras.
d) o número de pessoas que leu Helena ou Iracema.

4) [Fafi – BH] Durante a Segunda Guerra Mundial, os aliados tomaram um campo de concentração nazista e de lá resgataram 979 prisioneiros. Desses, 527 estavam com sarampo, 251 com tuberculose e 321 não tinham nenhuma destas duas doenças. Qual o número de prisioneiros com as duas doenças?

5) [UFLA – MG] Numa comunidade são consumidos os tipos de leite A, B e C. Feita uma pesquisa de mercado sobre o consumo desses produtos, foram colhidos os resultados:

Tipo de Leite	A	B	C	A e B	B e C	A e C	A, B e C	Nenhum
Número de Consumidores	100	150	200	20	40	30	10	160

Determine quantas pessoas:
a) foram consultadas.
b) consomem apenas dois tipos de leite.
c) não consomem o leite tipo B.
d) não consomem o leite tipo A ou não consomem o leite tipo B.

6) O departamento de seleção de pessoal de uma indústria automobilística, analisando o currículo de 47 candidatos, concluiu que apenas 3 dos candidatos nunca trabalharam em montagem ou pintura; e que precisamente 32 candidatos já trabalharam em montagem e 29 já trabalham em pintura. Quantos desses candidatos já trabalham nos dois setores?

7) [Marinha / Adaptada] Uma pesquisa em que 500 pessoas foram entrevistadas revelou que:
- 235 compram a Revista Super Interessante;
- 245 compram a Revista Quatro Rodas;
- 250 compram a Revista Veja;
- 130 compram as Revistas Super Interessante e Quatro Rodas;
- 120 compram as Revista Quatro Rodas e Veja;
- 60 compram as Revistas Super Interessante e Veja;
- 30 não compram nenhuma destas Revistas.

Perguntas-se:
a) Quantas pessoas compram as três Revistas?
b) Quantas compram somente uma das Revistas?

> **Nota:**
> Os exercícios com a indicação "GIOVANNI" foram extraídos do livro:
> • GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática: uma nova abordagem**. v.1. São Paulo: FTD, 2000.

8) [MACK – SP / Adaptada] Dez mil aparelhos de TV foram examinados depois de dez anos de uso e constatou-se que 4 mil deles apresentavam problemas de imagem, 2800 tinham problemas de som e 3500 não apresentavam nenhum dos problemas citados. Qual é o número de aparelhos que apresentavam somente problemas de imagem?

9) De dois conjuntos E e F sabe-se que:
- São 45 os elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos;
- São 13 os elementos que pertencem a ambos;
- F tem 8 elementos a mais que E.

Quantos elementos possui cada um desses conjuntos?

RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS

1) 340 **2)** 44 **3a)** 460 **3b)** 130 **3c)** 410 **3d)** 600 **4)** 120 **5a)** 530 **5b)** 60 **5c)** 380
5d) 510 **6)** 17 **7a)** 50 **7b)** 260 **8)** 3700 **9)** n(E) = 25, n(F) = 33

O homem superior é modesto nas palavras e excepcional nos atos. [Confúcio]

CONJUNTOS NUMÉRICOS FUNDAMENTAIS

O sistema numérico que utilizamos e do tipo decimal posicional e é conhecido como sistema indo-arábico. Os números provenientes deste sistema foram organizados em conjuntos ditos "conjuntos numéricos fundamentais" para facilitar o estudo dos mesmos. Entender toda a estrutura numérica e sua ordenação é o que se pretende neste momento.

Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$)

$\mathbb{N} = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , ...\}$

Temos que: $\mathbb{N} - \{ 0 \} = \mathbb{N}^* \rightarrow$ Conjunto dos Naturais Positivos

> **Observação:**
> Muitas literaturas Matemáticas [principalmente relacionadas ao ensino superior] **não** consideram o número 0 [zero] como Natural. Na verdade, em algumas áreas da Matemática, torna-se mais "conveniente" considerar o zero como **Inteiro**, pois isso simplifica algumas definições. Assim poderemos, em certas situações, fazer uso dessa prerrogativa e excluir o zero do conjunto $\mathbb{N}$.

Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

$\mathbb{Z} = \{..., -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , ...\}$ ou $\mathbb{Z} = \{ 0 , \pm 1 , \pm 2 , \pm 3 , ...\}$

$\mathbb{Z}^* = \{..., -3, -2 , -1 , 1 , 2 , 3 , ...\} = \mathbb{Z} - \{ 0 \} \rightarrow$ Conjunto dos números Inteiros Não Nulos

$\mathbb{Z}_+ = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , ...\} \rightarrow$ Conjunto dos números Inteiros Não Negativos

$\mathbb{Z}_+^* = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ...\} \rightarrow$ Conjunto dos números Inteiros Positivos

$\mathbb{Z}_- = \{..., -3 , -2 , -1 , 0 \} \rightarrow$ Conjunto dos números Inteiros Não Positivos

$\mathbb{Z}_-^* = \{ -1 , -2 , -3 , ...\} \rightarrow$ Conjunto dos números Inteiros Negativos

Note que: $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^*$ e $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$)

Um número é dito racional quando é possível escrevê-lo na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Formalmente, temos:

$$\mathbb{Q} = \{ x \mid x = \frac{a}{b} \text{, com } a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \}$$

Exemplos: ♦ -8 ♦ $-\frac{5}{4} = \frac{-5}{4} = \frac{5}{-4}$ ♦ $-\frac{1}{3}$ ♦ 0 ♦ $\frac{1}{2}$ ♦ $\frac{12}{3}$ ♦ 7 ♦ $\sqrt{121}$ ♦ $14\% = \frac{14}{100} = \frac{7}{50}$

Observe que: $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$

Além da forma $\frac{a}{b}$ já mencionada, os números racionais também podem ser representados na forma **decimal**; isto acontece quando dividimos a (numerador) por b (denominador). Temos então:

• Decimais exatos [finitos]: ♦ $-\frac{5}{4} = -1{,}25$ ♦ $\frac{3}{8} = 0{,}375$ ♦ $\frac{12}{5} = 2{,}4$ ♦ $\frac{75}{20} = \frac{15}{4} = 3{,}75$ ♦ $\frac{617}{500} = 1{,}234$

• Decimais [dízimas] periódicos: ♦ $-\frac{1}{3} = -0{,}333... = -0{,}\overline{3}$ [período] [fração geratriz] ♦ $\boxed{\frac{14}{33}} = 0{,}4242... = 0{,}\overline{42}$

♦ $\frac{6}{7} = 0{,}857142857142... = 0{,}\overline{857142}$ ♦ $\frac{13}{6} = 2{,}1666... = 2{,}1\overline{6}$ → [observar arredondamento da calculadora]

Observações:

Entre dois números inteiros, nem sempre existe outro número inteiro.

Entre dois números racionais, sempre existe outro número racional.

Também podemos utilizar as notações: $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+^*$, $\mathbb{Q}_-$ e $\mathbb{Q}_-^*$

Encontrando a fração geratriz de números decimais [racionais]:

● Para decimais exatos [finitos]: escrevemos o número decimal em questão sem a vírgula e acrescentamos o denominador 1 (um) seguido de tantos zeros quanto forem as casas após a vírgula. Em seguida, simplifique a fração encontrada, se possível. Veja os exemplos:

♦ $1{,}4 \rightarrow \dfrac{14}{10} = \dfrac{14^{\div 2}}{10_{\div 2}} = \dfrac{7}{5}$ ♦ $5{,}231 \rightarrow \dfrac{5231}{1000}$ ♦ $2{,}75 \rightarrow \dfrac{275}{100} = \dfrac{275^{\div 25}}{100_{\div 25}} = \dfrac{11}{4}$

● Para decimais [dízimas] periódicos: "damos um nome" ao número decimal e através da multiplicação deste por 10 e/ou suas potências [100, 1000, etc.], criamos dois números que possuam exatamente as mesmas casas decimais para realizarmos a subtração dos mesmos. Veja os exemplos:

♦ $0{,}333...$

Denominamos $x = 0{,}333...$

$$-\begin{cases} 10x = 3{,}333... \\ \quad x = 0{,}333... \end{cases}$$
$$9x = 3$$
$$x = \frac{3}{9} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

♦ $2{,}1666...$

Denominamos $x = 2{,}1666...$

$$-\begin{cases} 100x = 216{,}666... \\ 10x = \quad 21{,}666... \end{cases}$$
$$90x = 195$$
$$x = \frac{195^{\div 15}}{90_{\div 15}} \Rightarrow x = \frac{13}{6}$$

♦ $1{,}424242...$

Denominamos $n = 1{,}424242...$

$$-\begin{cases} 100n = 142{,}4242... \\ \quad n = \quad 1{,}4242... \end{cases}$$
$$99n = 141$$
$$n = \frac{141^{\div 3}}{99_{\div 3}} \Rightarrow n = \frac{47}{33}$$

Observações:

Existe outro método para encontrar a fração geratriz de uma dízima periódica. Pesquise e procure sabe mais!
As calculadoras científicas mais modernas são capazes de encontrar a fração geratriz de um número decimal. Experimente!

Tipos de Fração:

● Fração Própria: é aquela em que o **numerador** é MENOR que o **denominador**. Isso significa que o seu valor é sempre inferior a um inteiro. Podemos dizer que é a "fração verdadeira", pois faz jus ao seu nome. Veja os exemplos:

♦ $\dfrac{4}{5} = 0{,}8$ ♦ $\dfrac{3}{8} = 0{,}375$ ♦ $\dfrac{7}{50} = 0{,}14$ ♦ $\dfrac{7}{100} = 0{,}07$ ♦ $\dfrac{10}{21} = 0{,}\overline{476190}$ ♦ $\dfrac{1}{3} = 0{,}333...$

● Fração Imprópria: é aquela em que o **numerador** é MAIOR que o **denominador**. Isso significa que o seu valor é sempre superior a um inteiro. Veja os exemplos:

♦ $\dfrac{5}{4} = 1{,}25$ ♦ $\dfrac{17}{2} = 8{,}5$ ♦ $\dfrac{75}{20} = \dfrac{15}{4} = 3{,}75$ ♦ $\dfrac{617}{500} = 1{,}234$ ♦ $\dfrac{33}{14} = 2{,}3\overline{571428}$ ♦ $\dfrac{31}{6} = 5{,}1666...$

● Fração Aparente: é um caso particular de fração imprópria quando o **numerador** é um MÚLTIPLO do **denominador**, ou seja, a fração pode ser simplificada resultando em um **número inteiro**. Veja os exemplos:

♦ $\dfrac{14}{2} = 7$ ♦ $\dfrac{52}{13} = 4$ ♦ $\dfrac{42}{3} = 14$ ♦ $\dfrac{18}{18} = 1$ ♦ $\dfrac{100}{10} = 10$ ♦ $\dfrac{0}{12} = 0$ [caso especial]

● Fração Mista ou Número Misto: também é um caso particular de fração imprópria, porém ocorre quando é escrita em duas partes: a **parte inteira** mais a **parte fracionária**, que neste caso sempre será uma **fração própria**. Veja os exemplos:

♦ $\dfrac{7}{5} = 1{,}4 = 1 + 0{,}4 = 1 + \dfrac{4}{10} = 1\dfrac{2}{5}$ ♦ $\dfrac{13}{2} = 6{,}5 = 6 + 0{,}5 = 6 + \dfrac{5}{10} = 6\dfrac{1}{2}$ ♦ $6\dfrac{1}{2} = 6 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{(2.6)+1}{2} = \dfrac{13}{2}$

Notas:

Algumas calculadoras científicas podem representar frações na forma mista. Verifique como a sua calculadora "trata" as frações.
Duas ou mais frações são equivalentes quando possuem o mesmo valor [representam o mesmo número real].
Uma fração é dita irredutível quando não pode mais ser simplificada. Neste caso dizemos que o numerador e o denominador são primos entre si.

Conjunto dos Números Irracionais (Ir)

Um número é Irracional, quando NÃO é possível escrevê-lo na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Assim, podemos escrever:

Ir = { x | x é dízima <u>não</u> periódica }

Veja os exemplos:

- $\sqrt{2} = 1{,}4142135...$
- $\sqrt[3]{25} = 2{,}92401773...$
- $\sqrt{3} = 1{,}7320508...$
- $2{,}01001000100001...$
- $-\sqrt{3} = -1{,}7320508...$
- $\pi = 3{,}14159265...$ (Número "pi")
- $e = 2{,}7182818...$ (Número de Euler)

Observe que $\sqrt{9} \notin$ Ir, pois sabemos que $\sqrt{9} = 3$.

Outras Notações para o Conjunto dos Irracionais: $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ ou $\mathbb{Q}'$

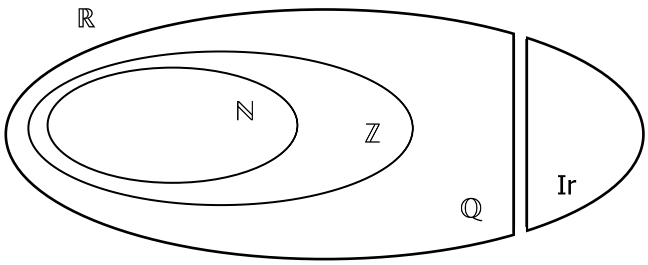
Conjunto dos Números Reais (ℝ)

Unindo todos os conjuntos numéricos estudados até aqui, teremos o conjunto dos números reais. Ou seja:

$\mathbb{R} = \{ x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ ou } x \in \text{Ir} \} = \mathbb{Q} \cup \text{Ir}$

Desta forma, todo número natural, inteiro, racional ou irracional também é um número REAL.

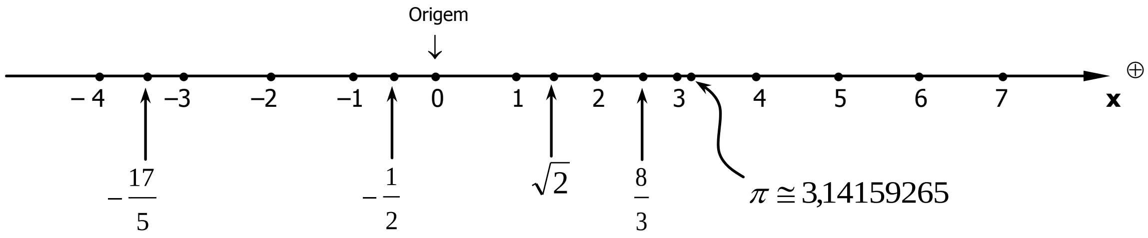
Podemos representar através de "diagramas" o conjunto dos números reais, conforme abaixo.



Um número REAL qualquer é **racional** ou **irracional**.

Observe que: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{Q} \cap \text{Ir} = \varnothing$.

Uma representação geométrica (dos números reais) muito importante e útil é a "Reta Real", também conhecida como reta numérica real ou eixo real, ou ainda, eixo das abscissas. Veja:



Em nosso estudo, quando falarmos de números e não forem feitas "restrições" sobre esses, adotaremos sempre como padrão, os números reais.

Também temos os intervalos, que são subconjuntos do conjunto dos números reais:

$\mathbb{R}^* = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \}$ → Conjunto dos números Reais Não Nulos **ou** <u>diferentes</u> de zero

$\mathbb{R}_+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$ → Conjunto dos números Reais Não Negativos **ou** <u>maiores ou igual</u> a zero

$\mathbb{R}^*_+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$ → Conjunto dos números Reais Positivos **ou** <u>maiores</u> que zero.

$\mathbb{R}_- = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \}$ → Conjunto dos números Reais Não Positivos **ou** <u>menores ou igual</u> a zero

$\mathbb{R}^*_- = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \}$ → Conjunto dos números Reais Negativos **ou** <u>menores</u> que zero

Observação: Temos que $\sqrt[3]{-8} = -2 \in \mathbb{R}$, mas $\sqrt[2]{-9} = \sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$.

Não estão definidas para o conjunto dos números reais, raízes de números negativos com índice par.

Conjunto dos Números Complexos ($\mathbb{C}$)

Também conhecido como conjunto dos números “imaginários”, não fará parte de nosso estudo neste momento (embora tenha grande aplicação na área eletroeletrônica, entre outras). Podemos dizer, de forma simples, que se trata de um conjunto numérico que envolve, além dos números reais, números do tipo $\sqrt{-4}$ que não podem ser definidos em $\mathbb{R}$.

INTERVALOS

↳ são subconjuntos do conjunto $\mathbb{R}$. Podem ser representados através da notação de conjunto, de colchetes ou na reta Real. Analise atentamente os exemplos a seguir e perceba a simbologia utilizada:

Intervalo Aberto

$\{ x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 10 \}$ = $]\,2\,,\,10\,[$ =

↳ Notação de Conjunto ↳ Notação de Colchetes ↳ Representação na Reta Real

Atenção: Observe que no intervalo aberto acima, foram representados todos os números reais ENTRE os números 2 e 10, e consequentemente, os números 2 e 10 (que são os limitantes do intervalo) foram EXCLUÍDOS do conjunto representado.

Intervalo Fechado

$\{ x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x \le 10 \}$ = $[\,2\,,\,10\,]$ =

Atenção: Observe que no intervalo fechado acima, foram representados todos os números reais DO número 2 ATÉ o 10, e consequentemente, os números 2 e 10 (que são os limitantes do intervalo) foram INCLUÍDOS do conjunto representado.

Intervalo Semi-aberto ou Semi-fechado

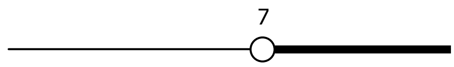
$\{ x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \le 10 \}$ = $]\,2\,,\,10\,]$ =

$\{ x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x < 10 \}$ = $[\,2\,,\,10\,[$ =

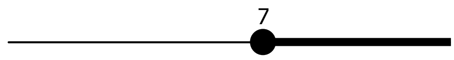
↳ $\{ x \mid 2 \le x < 10 \}$ ↳ $[\,2\,,\,10\,)$ =

Intervalos Infinitos (incomensuráveis)

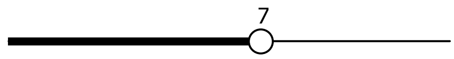
$\{ x \in \mathbb{R} \mid x > 7 \}$ = $]\,7\,,\,+\infty\,[$ =



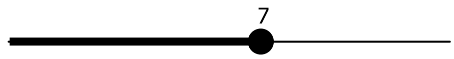
$\{ x \in \mathbb{R} \mid x \ge 7 \}$ = $[\,7\,,\,+\infty\,[$ =



$\{ x \in \mathbb{R} \mid x < 7 \}$ = $]\,-\infty\,,\,7\,[$ =



$\{ x \in \mathbb{R} \mid x \le 7 \}$ = $]\,-\infty\,,\,7\,]$ =

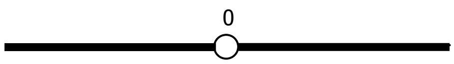


↳ $\{ x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \le 7 \}$ → Não recomendável!

Observações e Similaridades:

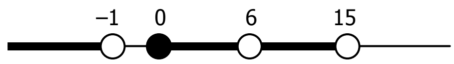
$\mathbb{R} = \{ x \mid x \in \mathbb{R} \}$ = $]\,-\infty\,,\,+\infty\,[$ =

$\mathbb{R}^* = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \ne 0 \}$ = $]\,-\infty\,,\,0\,[\ \cup\ ]\,0\,,\,+\infty\,[$ =



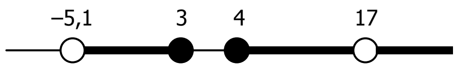
↳ $\{ x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 0 \}$

$\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 0 \le x < 15 \text{ e } x \ne 6 \}$ =



↳ $\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 0 \le x < 6 \text{ ou } 6 < x < 15 \}$

$\{ x \in \mathbb{R} \mid -5{,}1 < x \le 3 \text{ ou } x \ge 4 \text{ e } x \ne 17 \}$ =



↳ $\{ x \in \mathbb{R} \mid -5{,}1 < x \le 3 \text{ ou } 4 \le x < 17 \text{ ou } x > 17 \}$

Atenção!

• Note que os conjuntos $A = \{ x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leq 6 \}$ e $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 6 \}$ são DIFERENTES.

Veja na reta real:

O conjunto A é finito, pois tem somente 4 elementos, ou seja, $A = \{ 3 , 4 , 5 , 6 \}$. Em contrapartida, não podemos determinar o número de elementos do conjunto B, pois este último possui infinitos elementos.

• **Fique atento para as diferentes notações de conjunto:** $\{ 3 , 10 \} \neq [3 , 10]$

O conjunto $\{ 3 , 10 \}$ possui 2 elementos e o intervalo $[3 , 10]$ possui infinitos elementos.

Algumas Definições Importantes!

• **Oposto de um Número Real**

Veja os exemplos:

$$7 \xrightarrow{oposto} -7 \qquad -\frac{14}{3} \xrightarrow{oposto} \frac{14}{3}$$

Particularidade: $0 \xrightarrow{oposto} 0$

Assim: A SOMA de um número com o seu OPOSTO é ZERO!

Observação: Note que, considerando um estudo somente no $\mathbb{N}$, um número natural [não nulo] não tem oposto natural.

• **Inverso de um Número Real**

Veja os exemplos:

$$3 \xrightarrow{inverso} \frac{1}{3} \qquad \frac{4}{3} \xrightarrow{inverso} \frac{3}{4} \qquad -\frac{1}{14} \xrightarrow{inverso} -14 \qquad -\frac{7}{8} \xrightarrow{inverso} -\frac{8}{7}$$

Particularidades: $1 \xrightarrow{inverso} 1$ $\quad -1 \xrightarrow{inverso} -1$

Assim: O PRODUTO de um número com o seu INVERSO é UM!

Observação: O número ZERO **não** possui inverso!

• **Módulo [ou Valor Absoluto] de um Número Real**

Veja os exemplos:

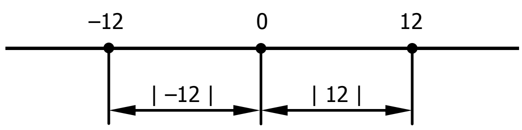
$$|14| = 14 \qquad |-14| = 14 \qquad \left|\frac{7}{5}\right| = \frac{7}{5}$$

Particularidade: $|0| = 0$

Assim: O MÓDULO de um número real não nulo é sempre o seu valor POSITIVO (absoluto).

Simbolicamente, temos: $|x| = \begin{cases} x, & se \ \ x \geq 0 \\ -x, & se \ \ x < 0 \end{cases}$

Nota: Podemos considerar ainda que o módulo de um número real representa a **distância** desse número até a **origem**, pois consideramos uma grandeza de distância sempre positiva (ou zero). Veja:



Então: $|12| = |-12| = 12$ u.c. (unidades de comprimento)

Exemplo: Simplifique as expressões:

a) $|\,14-3\,| - |-5|$

$|\,11\,| - |-5|$

$11 - 5$

6

b) $|\,x+18\,| - x$, sendo que $x+18 \geq 0$

$x+18 - x$

18

c) $|\,x+18\,| - x$, sendo que $x+18 < 0$

$-(x+18) - x$

$-x-18 - x$

$-2x-18$

Para refletir: Não aprenda a desejar aquilo que não merece. [retirado de um biscoito da sorte chinês]

EXERCÍCIOS – Conjuntos Numéricos Fundamentais e Intervalos

1) Relacione usando $\in$ ou $\notin$:

a) -5 .... $\mathbb{N}$

b) $\frac{2}{3}$ .... $\mathbb{Z}$

c) $\sqrt{5}$ .... $\mathbb{R}$

d) 4 .... $\mathbb{Q}$

e) $\frac{4}{11}$ .... $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

f) $\sqrt{-9}$ .... $\mathbb{R}$

g) -13 .... $\mathbb{Q}$

h) $\sqrt{0}$ .... $\mathbb{R}$

i) -1 .... $\mathbb{R}$

j) $\frac{108}{9}$ .... $\mathbb{N}$

l) 0 .... $\mathbb{Z}_+$

m) $-\frac{4}{2}$ .... $\mathbb{Q}^*$

n) $\sqrt{361}$ .... Ir

o) (2,33... x 9) .... $\mathbb{N}$

p) $\frac{\sqrt[3]{-64}}{2}$ .... $\mathbb{Z}$

q) 0,127 .... $\mathbb{Q}^*$

2) Os conjuntos $A = \{ x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 4 \}$ e $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0 \}$ são iguais?

3) Represente em cada reta real os intervalos correspondentes:

a) $]-\infty, -1]$ $\rightarrow$ ____________________

b) $\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2 \}$ $\rightarrow$ ____________________

c) $]\ 0\ ,\ 3\ [$ $\rightarrow$ ____________________

d) $\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq \sqrt{2} \}$ $\rightarrow$ ____________________

e) $[-5\ ,\ 4\ [$ $\rightarrow$ ____________________

f) $\{ x \in \mathbb{R} \mid x > -5 \}$ $\rightarrow$ ____________________

g) $\left[-\frac{2}{5}\ ,\ \frac{1}{2}\right]$ $\rightarrow$ ____________________

h) $\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2 \}$ $\rightarrow$ ____________________

i) $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x > 2 \}$ $\rightarrow$ ____________________

j) $\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 3 \text{ e } x \neq 1\}$ $\rightarrow$ ____________________

k) $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x = 4 \}$ $\rightarrow$ ____________________

l) $\{ x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -1 \text{ ou } 1 < x \leq 2 \}$ $\rightarrow$ ____________________

ATENÇÃO: Analise os intervalos [h] e [i] e note que eles são completamente diferentes.

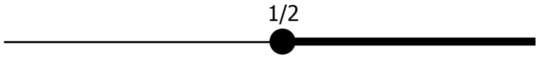
4) Dados os intervalos abaixo, escreva-os em notação de conjunto:

a) 

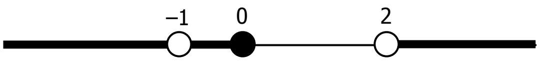
→ { .... }

b) 

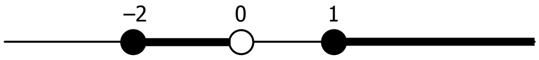
→ { .... }

c) 

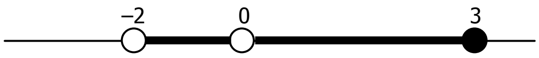
→ { .... }

d) 

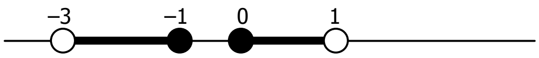
→ { .... }

e) 

→ { .... }

f) 

→ { .... }

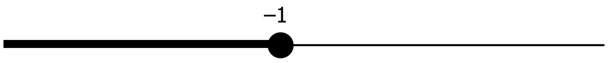
g) 

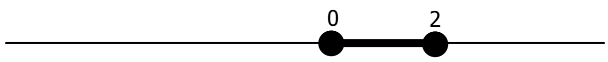
→ { .... }

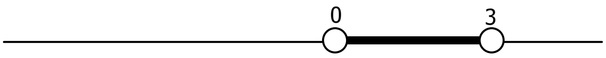
RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS

1a) $\notin$ **1b)** $\notin$ **1c)** $\in$ **1d)** $\in$ **1e)** $\notin$ **1f)** $\notin$ **1g)** $\in$ **1h)** $\in$ **1i)** $\in$ **1j)** $\in$ **1l)** $\in$ **1m)** $\in$ **1n)** $\notin$ **1o)** $\in$ **1p)** $\in$ **1q)** $\in$

2) Sim

3a) 

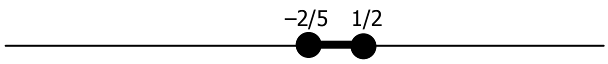
3b) 

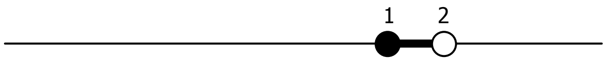
3c) 

3d) 

3e) 

3f) 

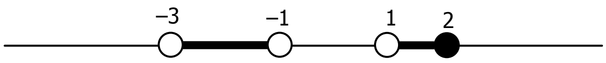
3g) 

3h) 

3i) 

3j) 

3k) 

3l) 

4a) $\{ x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3 \}$ **4b)** $\{ x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \}$ **4c)** $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1/2 \}$ **4d)** $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ e } x \neq -1 \text{ ou } x > 2 \}$

4e) $\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 0 \text{ ou } x \geq 1 \}$ **4f)** $\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 3 \text{ e } x \neq 0 \}$ **4g)** $\{ x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq -1 \text{ ou } 0 \leq x < 1 \}$

Toda a educação científica que não se inicia com a Matemática é, naturalmente, imperfeita na sua base. [Auguste Conté]

OPERAÇÕES COM INTERVALOS – UNIÃO, INTERSECÇÃO E SUBTRAÇÃO

Veremos como realizar as operações básicas com intervalos, através dos exemplos a seguir. A utilização da representação na reta real facilita muito a realização das operações com conjuntos de infinitos elementos.

1. Exemplos de União ($\cup$)

1.1) Considerando os conjuntos $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 1 \}$ e $B = [\, 0 , 6 \,[$, determine $A \cup B$.

A

B

$A \cup B$

Logo: $\mathbf{A \cup B = \{ x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 6 \}}$

1.2) Dados os conjuntos $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 1 \}$ e $M = \{ x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \}$, calcule $B \cup M$.

B ______________________________

M ______________________________

$B \cup M$ ______________________________ Logo: $\mathbf{B \cup M = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2 \text{ e } x \neq 1 \}}$

1.3) Considerando os conjuntos $T =]-3, 0]$ e $M = [2, +\infty[$, determine $T \cup M$.

T ______________________________

M ______________________________

$T \cup M$ ______________________________ Logo: $\mathbf{T \cup M = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2 \}}$

1.4) Admitindo-se os conjuntos $B =]-\infty, \sqrt{2}[$ e $C = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \}$, obtenha $B \cup C$.

B ______________________________

C ______________________________

$B \cup C$ ______________________________ Logo: $\mathbf{B \cup C = \mathbb{R}}$

2. Exemplos de Intersecção ($\cap$)

2.1) Considerando os conjuntos $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 1 \}$ e $B = [0, 6[$, determine $A \cap B$.

A ______________________________

B ______________________________

$A \cap B$ ______________________________ Logo: $\mathbf{A \cap B = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1 \}}$

2.2) Dados os conjuntos $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1 \}$ e $D = \{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2 \}$, calcule $B \cap D$.

B ______________________________

D ______________________________

$B \cap D$ ______________________________ Logo: $\mathbf{B \cap D = \{ 1 \}}$

2.3) Considerando os conjuntos $J =]-3, 0]$ e $C = [2, +\infty[$, determine $J \cap C$.

J ______________________________

C ______________________________

$J \cap C$ ______________________________ Logo: $\mathbf{J \cap C = \{ \quad \}}$

2.4) Admitindo-se os conjuntos $K =]-\infty, \sqrt{2}[$ e $H = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \}$, obtenha $K \cap H$.

K ______________________________

H ______________________________

$K \cap H$ ______________________________ Logo: $\mathbf{K \cap H = \{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < \sqrt{2} \}}$

Para refletir: Muitas coisas você pode, mas não deve. [Mr. Pi]

3. Exemplos de Subtração (–)

3.1) Considerando os conjuntos $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 1 \}$ e $B = [\, 0 \,, 6 \,[$, determine $A - B$.

A ______________________

B ______________________

A – B ______________________ Logo: $\mathbf{A - B = \{ x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 0 \}}$

3.2) Dados os conjuntos $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 1 \}$ e $M = \{ x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \}$, calcule $B - M$.

B ______________________

M ______________________

B – M ______________________ Logo: $\mathbf{B - M = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 1 \} = B}$

3.3) Considerando os conjuntos $T = \,]\, 0 \,, 3 \,]$ e $M = [-2 \,, +\infty \,[$, determine $T - M$.

T ______________________

M ______________________

T – M ______________________ Logo: $\mathbf{T - M = \{ \quad \}}$

3.4) Admitindo-se os conjuntos $B = \,]\, -\infty \,, \sqrt{2} \,[$ e $C = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \}$, obtenha $B - C$.

B ______________________

C ______________________

B – C ______________________ Logo: $\mathbf{B - C = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \}}$

4. Exemplo "Misto"

4.1) Dados os conjuntos: $A = \,]\, -\infty \,, -1 \,]$, $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2 \}$, $C = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \}$ e $D = \,]\, -2 \,, 3 \,]$, obtenha o conjunto $[(A \cap B) \cup C] - D$.

A ______________________

B ______________________

A ∩ B ______________________

C ______________________

(A ∩ B) ∪ C ______________________

D ______________________

[(A ∩ B) ∪ C] – D ______________________

Então: $\mathbf{[(A \cap B) \cup C] - D \;=\; \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq -2 \text{ ou } x > 3 \}}$

EXERCÍCIOS – Operações com Intervalos

1) Sendo $A = \,]\, -3 \,, 4 \,[$ e $B = [-1 \,, 6 \,[$, calcule $A \cup B$, $A \cap B$ e $A - B$, dando a resposta em notação de conjunto.

2) Dados $A = \,]\, -4 \,, 3 \,]$, $B = [-3 \,, 3 \,[$ e $C = [-7 \,, 0 \,]$, calcule o conjunto: $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

3) Considerando $A = \,]\, -\infty \,, 3 \,]$, $B = [-2 \,, 0 \,]$ e $C = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$, determine: $(A \cup B) \cap (B \cap C)$.

4) Dados A = [1 , 3] , B =] 2 , 5 [e C =] 0 , 4] , calcule; escrevendo a resposta em notação de conjunto:

a) $C \cap (A \cup B)$

b) $A \cap B \cap C$

c) $A \cup B \cup C$

d) $(A \cap B) - C$

5) Sendo A = [2 , +∞ [, B =] – ∞ , 5 [e M = [2 , 5] , efetue:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $B \cup M$

d) $B - M$

6) Obtenha $M \cap N$ e $M \cup N$ sendo: $M = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 1 \}$ e $N = \{ x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 3 \}$.

7) Obtenha $G \cap H$ e $G \cup H$ nos casos: $G = \{ x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{5} < x \leq \sqrt{10} \}$ e $H = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x \geq \sqrt{10} \}$.

8) Considere os intervalos A = [–1 , +∞ [e B =] 0 , 7 [. Obtenha:

a) $A - B$

b) $A \cup B$

c) $A \cap B$

d) $B - (A - B)$

9) Sendo M = [–3 , 3], A =] 0 , 5] e T = [6 , 8], determine o conjunto: $S = (M \cap A \cap T) - M$.

10) Dados A =] 1 , 4], B =] 2 , 8 [e C = [4 , 10] , determine:

a) $A \cup B \cup C$

b) $A \cap B \cap C$

c) $(A \cap B) - C$

11) Se $A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 11 \}$ e $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid 15 \leq x < 187 \}$, determine o número de elementos de $(B \cap A)$.

RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS

1) $A \cup B = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 6 \}$, $A \cap B = \{ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 4 \}$, $A - B = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -1 \}$ **2)** $\{ x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 3 \}$ **3)** $\{ 0 \}$

4a) $\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4 \}$ **4b)** $\{ x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 3 \}$ **4c)** $\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5 \}$ **4d)** $\{ \ \}$ **5a)** $\{ x \in \mathbb{R} \}$ **5b)** $\{ x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 5 \}$

5c) $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5 \}$ **5d)** $\{ x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \}$ **6)** $M \cap N = \{ x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq -2 \text{ ou } 1 \leq x \leq 3 \}$ e $M \cup N = \mathbb{R}$

7) $G \cap H = \{ \sqrt{10} \}$ e $G \cup H = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > -\sqrt{5} \}$ **8a)** $\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 0 \text{ ou } x \geq 7 \}$ **8b)** $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \}$ **= A**

8c) $\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 7 \} = B$ **8d)** B **9)** $S = \{ \ \}$ **10a)** $\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 10 \}$ **10b)** $\{ 4 \}$ **10c)** $\{ x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4 \}$

11) $n(B \cap A) = 15$

Para refletir: O pessimista senta-se e lastima-se; o otimista levanta-se e age.

SIMBOLOGIA MATEMÁTICA

$\in$	pertence
$\notin$	não pertence
$\subset$	está contido
$\not\subset$	não está contido
$\supset$	contém
$\not\supset$	não contem
/	tal que
$\varnothing$	conjunto vazio $\rightarrow$ $\{\ \}$
$\forall$	qualquer que seja / para todo
$\exists$	existe
$\nexists$	não existe
$\exists\vert$	existe um único
$\cup$	união
$\cap$	intersecção
$>$	maior
$\geq$	maior ou igual
$\gg$	muito maior
$<$	menor
$\leq$	menor ou igual
$\ll$	muito menor
#	cardinalidade
!	fatorial
$\Rightarrow$	implica / então
$\Leftrightarrow$	equivalente / se e somente se
$=$	igual
$\neq$	diferente
$\wedge$	e
$\vee$	ou
∞	infinito
$\therefore$	portanto
$\sum$	somatório
$\perp$	perpendicular
//	paralelo
$\equiv$	idêntico
$\sim$	semelhante / congruente
$\cong$	igual ou aproximadamente
$\approx$	semelhante
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$	conjunto dos números irracionais [ou Ir ou $\mathbb{Q}$']
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
C_B^A	complementar de A em relação a B

Esquentando o Processador!

Abaixo, dois "probleminhas" para você utilizar toda a sua capacidade de imaginação e processamento...

1) Um grande industrial na necessidade de ir a São Paulo, chegou a seu guarda-noturno e ordenou:
- Amanhã, acorde-me às 6 horas, por favor. Tenho que pegar o avião para São Paulo.
- Pois não, chefe!

Pontualmente às 6 horas o guarda apertou a campainha da residência do industrial e tentou demovê-lo da ideia de viajar:
- Patrão – disse o guarda – estou com mau presságio: sonhei esta noite que o Sr. teria um acidente com o avião e me permita sugerir que não viaje.

O industrial titubeou, mas viajou mesmo assim. Sem incidentes, chegou a São Paulo e por telefone mandou despedir o guarda. Por quê?

2) O pai do padre é filho de meu pai. O que sou do padre?

Para refletir: É costume de um tolo, quando erra, queixar-se dos outros. [Sócrates]

Exercícios Extras

Os exercícios apresentados a seguir foram extraídos do Livro:

Matemática: Ciência e Aplicações. Vol. 1. IEZZI, Gelson et al. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

LISTA 1 [Página 13]

5. Sendo $M = \{0, 3, 5\}$, classifique as sentenças seguintes em verdadeiras (*V*) ou falsas (*F*).

a) $5 \in M$ c) $\varnothing \in M$ e) $\varnothing \subset M$ g) $0 \in \varnothing$

b) $3 \subset M$ d) $0 \in M$ f) $0 = \varnothing$ h) $0 \subset M$

7. Sendo $A = \{1,2\}, B = \{2,3\}, C = \{1,3,4\}$ e $D = \{1,2,3,4\}$, classifique em verdadeiras (*V*) ou falsas (*F*) as sentenças abaixo:

a) $B \subset D$ c) $A \not\subset C$ e) $C \not\supset B$

b) $A \subset B$ d) $D \supset A$ f) $C = D$

9. Dado o conjunto $A = \{a, b, c\}$, em quais dos itens seguintes as sentenças são verdadeiras?

a) $c \notin A$ c) $\{a, c\} \subset A$ e) $\{b\} \subset A$

b) $\{c\} \in A$ d) $\{a, b\} \in A$ f) $\{a, b, c\} \subset A$

10. Dados os conjuntos $X = \{1,2,3,4\}, Y = \{0,2,4,6,8\}$ e $Z = \{0,1,2\}$:

a) determine todos os subconjuntos de *X* que têm três elementos cada um;

b) dê três exemplos de subconjuntos de *Y*, cada qual com quatro elementos;

c) determine o conjunto $\mathscr{P}(Z)$.

LISTA 2 [Página 17]

11. Dados os conjuntos $A = \{p,q,r\}, B = \{r,s\}$ e $C = \{p,s,t\}$, determine os conjuntos:

a) $A \cup B$ c) $B \cup C$ e) $A \cap C$

b) $A \cup C$ d) $A \cap B$ f) $B \cap C$

12. Sendo A, B e C os conjuntos dados no exercício anterior, determine:

a) $(A \cap B) \cup C$ c) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

b) $A \cap B \cap C$ d) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$

13. Dado $U = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, sejam $A = \{x \in U \mid x < 0\}$, $B = \{x \in U \mid -3 < x < 2\}$ e $C = \{x \in U \mid x \geq -1\}$.

Determine:

a) $A \cap B \cap C$ c) $C \cup (B \cap A)$

b) $A \cup B \cup C$ d) $(B \cup A) \cap C$

15. Se *A* e *B* são conjuntos quaisquer, classifique cada uma das sentenças seguintes em verdadeira (*V*) ou falsa (*F*):

a) $A \cup \varnothing = A$

b) $B \cap \varnothing = \varnothing$

c) $(A \cap B) \subset B$

d) $(B \cup A) \subset B$

e) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

f) $\varnothing \not\subset (A \cap B)$

LISTA 3 [Página 19]

16. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, c, d, e\}$, $C = \{c, d\}$ e $D = \{a, d, e\}$, classifique cada uma das sentenças seguintes em verdadeira (*V*) ou falsa (*F*).

a) $A - B = \{b\}$ f) $\complement_B D = \{c\}$

b) $B - C = \{a, e\}$ g) $(A \cap B) - D = \{a, d, e\}$

c) $D - B = \{c\}$ h) $B - (A \cup C) = \{e\}$

d) $\complement_A C = \varnothing$ i) $(\complement_B C) \cup (\complement_B D) = \{a, c, e\}$

e) $\complement_B \varnothing = \{a, c, d, e\}$

18. Considerando o conjunto universo $U = \{-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ e dados $A = \{x \in U \mid x \leq 3\}$, $B = \{x \in U \mid x$ é ímpar$\}$ e $C = \{x \in U \mid -2 \leq x < 1\}$, determine:

a) $A \cap B$ e) $\complement_A C$ i) $C \cup (A - B)$

b) $A \cup C$ f) $\complement_B A$ j) $(A - B) \cup (B - A)$

c) $A - C$ g) $\overline{B}$ k) $\overline{C} \cap \overline{A}$

d) $C - B$ h) $(A \cap C) - B$ l) $\overline{B} \cap (C - B)$

19. Sejam *A* e *B* subconjuntos de um conjunto universo *U*. Se *U* tem 35 elementos, *A* tem 20 elementos, $A \cap B$ tem 6 elementos e $A \cup B$ tem 28 elementos, determine o número de elementos dos conjuntos.

a) B c) $B - A$ e) $\overline{B}$ g) $\overline{A - B}$

b) $A - B$ d) $\overline{A}$ f) $\overline{A \cap B}$ h) $\overline{A} \cap \overline{B}$

LISTA 4 [Página 19 – exercícios complementares]

2. Em cada caso, represente o conjunto dado por uma propriedade característica de seus elementos:

a) $\{1, 4, 9, 16, ...\}$

b) $\{8, 10, 12, 14, ...\}$

c) $\{a, e, i, o, u\}$

d) {Curitiba, Florianópolis, Porto Alegre}

3. Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x \mid x$ é um número inteiro e $x \leq 2\}$ e $C = \{x \mid (x + 1) \cdot (x - 2) = 0\}$:

a) classifique as sentenças seguintes em verdadeiras (*V*) ou falsas (*F*);

(i) $C \subset B$

(ii) $\{-1, 2\} \in B$

(iii) $\varnothing \in C$

(iv) $A \supset B$

(v) $\varnothing \subset A$

(vi) *C* tem 4 subconjuntos.

b) construa o diagrama de Venn relativo aos conjuntos *A*, *B* e *C*;

c) determine os seguintes conjuntos:

(i) $A \cap B$

(ii) $B \cup (A \cap C)$

(iii) $C - A$

(iv) $A - B$

(v) $\mathscr{P}(C)$

(vi) $(B - A) \cap C$

(vii) $(C - A) \cup B$

(viii) $C \cap (A \cup B)$

(ix) $\complement_A C \cup \complement_C \varnothing$

5. Dados dois conjuntos *A* e *B*, chama-se diferença simétrica entre *A* e *B* ao conjunto:

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$$

(lê-se: *A* delta *B*)

Em cada caso, determine $A \,\Delta\, B$:

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$

b) $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{4\}$

6. Se um conjunto *X* tem 64 subconjuntos, qual o seu número de elementos?

7. Sabe-se que dois conjuntos *A* e *B* são tais que *B* tem 50 elementos, $A \cap B$ tem 24 e $A \cup B$ tem 85. Qual o número de elementos do conjunto *A*?

LISTA 5 [Página 32]

1. Determine $A \cap B$ e $A \cup B$, sendo:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 3\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 10\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 6\}$

d) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leq 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x < 4\}$

2. Descreva cada conjunto por meio de uma característica comum a todos os seus elementos.

a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

b) $B = \{0, 1, 2, 8, 9, 10\}$

c) $C = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

d) $D = \{-3, 3\}$

RESPOSTAS DA LISTA 1 [Página 13]:

5. a) V b) F c) F d) V e) V f) F g) F h) F

7. a) V b) F c) V d) V e) V f) F

9. *c*, *e*, *f*

10. a) $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}$ e $\{2, 3, 4\}$

b) Entre outros, temos: $\{0, 2, 4, 6\}, \{0, 4, 6, 8\}$ e $\{2, 4, 6, 8\}$

c) $\mathscr{P}(Z) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$

RESPOSTAS DA LISTA 2 [Página 17]:

11. a) $\{p,q,r,s\}$ b) $\{p,q,r,s,t\}$ c) $\{p,r,s,t\}$ d) $\{r\}$ e) $\{p\}$ f) $\{s\}$

12. a) $\{r,p,s,t\}$ b) $\varnothing$ c) $\{p,s\}$ d) $\{p,r,s,t\}$

13. a) $\{-1\}$ b) U c) $\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$ d) $\{-1,0,1\}$

15. a) V b) V c) V d) F e) V f) F

RESPOSTAS DA LISTA 3 [Página 19]:

16. a) V b) V c) F d) F e) V f) V g) F h) V i) V

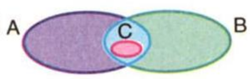
18. a) $\{-1,1,3\}$
b) A
c) $\{1,2,3\}$
d) $\{-2,0)$
e) $\{1,2,3\}$
f) Não pode ser determinado, pois $A \not\subset B$.
g) $\{-2,0,2,4\}$
h) $\{-2,0\}$
i) $\{-2,-1,0,2\}$
j) $\{-2,0,2,5\}$
k) $\{4,5\}$
l) $\{-2,0)$

19. a) 14 b) 14 c) 8 d) 15 e) 21 f) 29 g) 21 h) 7

RESPOSTAS DA LISTA 4 [Página 19 – exercícios complementares]:

2. a) {x|x é um número quadrado perfeito}
b) {x|x é um número par e maior que 6}
c) {x|x é vogal}
d) {x|x é capital de um estado do sul do Brasil}

3. a) (i) V (ii) F (iii) F (iv) V (v) V (vi) V

b) 

c) (i) $\{-2,-1,0,1,2\}$
(ii) B
(iii) $\varnothing$
(iv) $\{3\}$
(v) $\{\varnothing,\{-1\},\{2\},\{-1,2\}\}$
(vi) $\varnothing$
(vii) B
(viii) C
(ix) A

5. a) $\{2,4,5\}$ b) $\{0,2,6,8\}$

6. 6

7. 59

RESPOSTAS DA LISTA 5 [Página 32]:

1. a) $A \cap B = \{5,6\}; A \cup B = \mathbb{N}$
b) $A \cap B = B; A \cup B = A$
c) $A \cap B = \{1,2,3,4,5\}; A \cup B = A$
d) $A \cap B = \{3\}; A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$

2. a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$, entre outros.
b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 2 \text{ ou } 7 < x < 11\}$, entre outros.
c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 5\}$, entre outros.
d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 3\}$, entre outros.