Lista de Exercícios – Relação Binária

1) Para cada relação de *A*={-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4} em *B*={0, 2, 4, 6, 8} a seguir:
I) Enumere os pares ordenados;
II) Represente por meio do diagrama de flechas;
III) Faça o gráfico cartesiano;
IV) Estabeleça o domínio e a imagem.
V) Encontre a relação inversa.

a) $R_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = 2x+1\}$

b) $R_2 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = x^2\}$

c) $R_3 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = |x|\}$

d) $R_4 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = -x\}$

2) Dado o conjunto *A*={1, 2, 3, 4, 5, 6}, enumere os pares ordenados da relação *R* em *A* dada por:

$$R = \{(x,y) \in A^2 \mid \text{mdc}(x,y) = 2\}.$$

3) Seja $A = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$. Determine:

a) $R_1 = \left\{(x,y) \in A^2 \mid y = x - \frac{1}{2}\right\}$

b) $R_2 = \left\{(x,y) \in A^2 \mid y = \frac{1}{x}\right\}$

4) Dado o conjunto $A = \{m \in \mathbb{Z} \mid -7 \le m \le 7\}$, construa o gráfico cartesiano da relação binária *R* em *A* definida por $x^2 + y^2 = 25$.

5) Se *R* é a relação binária de $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 6\}$ em $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \le y \le 4\}$, definida por $y = \frac{x}{2}$.

Forneça:
a) a representação cartesiana de *A*x*B*;
b) a representação cartesiana de *R*;
c) o domínio e a imagem de *R*.

6) Qual é o domínio da relação $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{2}{4 - x^2}\right\}$?

7) Diga se a relação "*x* é mais velho do que *y*" sobre o conjunto *A*={*x* | *x* é uma pessoa que mora em Passo Fundo} é reflexiva, simétrica, antissimétrica ou transitiva.

8) Considere o $\mathbf{Z}$ dos inteiros e um inteiro $m > 1$. Dizemos que x é congruente a y módulo m, que se denota como

$$x \equiv y \pmod{m}$$

se $x - y$ é divisível por m. Mostre que isso define uma relação de equivalência sobre $\mathbf{Z}$.

9) Seja A um conjunto de inteiros não nulos e seja $\approx$ a relação sobre $A \times A$ definida por

$$(a, b) \approx (c, d) \text{ se, e somente se, } ad = bc$$

Demonstre que $\approx$ é uma relação de equivalência.

10) Considere o conjunto $\mathbf{Z}$ dos inteiros. Defina aRb por $b = a^r$ para algum inteiro positivo r. Mostre que R é uma ordem parcial em $\mathbf{Z}$, ou seja, prove que R é: (a) reflexiva; (b) antissimétrica; (c) transitiva.

Respostas

1) a) $R_1 = \{\ \}$; $Dom(R_1) = \{\}$ e $Im(R_1) = \{\}$; $R_1^{-1} = \left\{(x, y) \in B \times A \mid y = \dfrac{x-1}{2}\right\} = \{\}$

b) $R_2 = \{(-2,4),(0,0),(2,4)\}$; $Dom(R_2) = \{-2,0,2\}$ e $Im(R_2) = \{0,4\}$;

$R_2^{-1} = \left\{(x, y) \in B \times A \mid y = \pm\sqrt{x}\right\} = \{(4,-2),(0,0),(4,2)\}$

c) $R_3 = \{(-4,4),(-2,2),(0,0),(2,2),(4,4)\}$; $Dom(R_3) = \{-4,-2,0,2,4\}$ e

$Im(R_3) = \{0,2,4\}$;

$R_3^{-1} = \left\{(x, y) \in B \times A \mid y = \pm x\right\} = \{(4,-4),(2,-2),(0,0),(2,2),(4,4)\}$

d) $R_4 = \{(-4,4),(-2,2),(0,0)\}$; $Dom(R_4) = \{-4,-2,0\}$ e $Im(R_4) = \{0,2,4\}$;

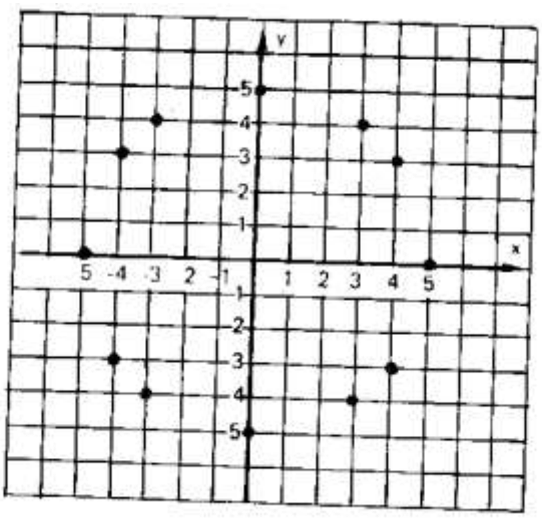
$R_4^{-1} = \left\{(x, y) \in B \times A \mid y = -x\right\} = \{(4,-4),(2,-2),(0,0)\}$

2) $R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 6), (6, 2), (6, 4)\}$

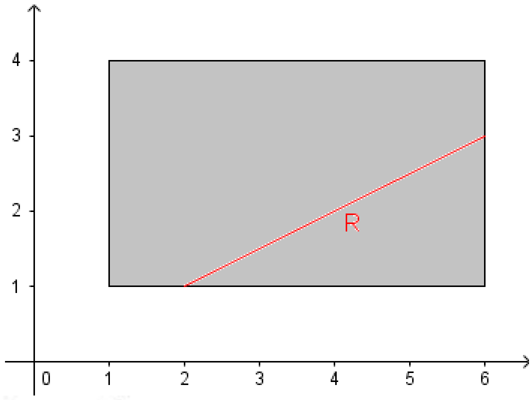
3) a) $R_1 = \left\{\left(\dfrac{1}{2}, 0\right), \left(1, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$

b) $R_2 = \left\{\left(\dfrac{1}{3}, 3\right), \left(\dfrac{1}{2}, 2\right), (1,1), \left(2, \dfrac{1}{2}\right), \left(3, \dfrac{1}{3}\right)\right\}$

4)



5) a) e b)



c) $D(R) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 6\}$ e $Im(R) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 3\}$

6) $D(R) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

7) Antissimétrica e transitiva.

8) Devemos mostrar que a relação é reflexiva, simétrica e transitiva.

(i) Para qualquer x em Z, temos $x \equiv x \pmod{m}$, pois $x - x = 0$ é divisível por m. Logo, a relação é reflexiva.

(ii) Suponha que $x \equiv y \pmod{m}$, ou seja, $x - y$ é divisível por m. Então $-(x - y) = y - x$ também é divisível por m, ou seja, $y \equiv x \pmod{m}$. Assim, a relação é simétrica.

(iii) Suponha agora que $x \equiv y \pmod{m}$ e $y \equiv z \pmod{m}$, portanto $x - y$ e $y - z$ são ambos divisíveis por m. Então, a soma

$$(x - y) + (y - z) = x - z$$

é também divisível por m; logo, $x \equiv z \pmod{m}$. Assim, a relação é transitiva.

Consequentemente, a relação de congruência módulo m sobre **Z** é de equivalência.

9) Devemos mostrar que $\approx$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

(i) *Reflexividade*: Temos $(a, b) \approx (a, b)$, uma vez que $ab = ba$. Logo, $\approx$ é reflexiva.

(ii) *Simetria*: Suponha que $(a, b) \approx (c, d)$. Então, $ad = bc$. Consequentemente, $cb = da$ e, assim, $(c, d) \approx (a, b)$. Logo, $\approx$ é simétrica.

(iii) *Transitividade*: Suponha que $(a, b) \approx (c, d)$ e $(c, d) \approx (e, f)$. Então, $ad = bc$ e $cf = de$. Multiplicando termos correspondentes das equações, temos $(ad)(cf) = (bc)(de)$. Cancelando $c \neq 0$ e $d \neq 0$ em ambos os lados da equação, temos $af = be$ e, portanto, $(a, b) \approx (e, f)$. Assim, $\approx$ é transitiva. Consequentemente, $\approx$ é uma relação de equivalência.

10) (a) R é reflexiva, pois $a = a^1$.

(b) Suponha que aRb e bRa, ou seja, $b = a^r$ e $a = b^s$. Logo, $a = (a^r)^s = a^{rs}$. Há três possibilidades: (i) $rs = 1$, (ii) $a = 1$, e (iii) $a = -1$. Se $rs = 1$, então $r = 1$ e $s = 1$ e, assim, $a = b$. Se $a = 1$, então $b = 1^r = 1 = a$ e, analogamente, se $b = 1$, então $a = 1$. Por último, se $a = -1$, então $b = -1$ (uma vez que $b \neq 1$) e $a = b$. Em todos os casos $a = b$. Portanto, R é antissimétrica.

(c) Suponha que aRb e bRc, ou seja, $b = a^r$ e $c = b^s$. Então $c = (a^r)^s = a^{rs}$ e, portanto, aRc. Logo, R é transitiva.

Consequentemente, R é uma ordem parcial sobre **Z**.