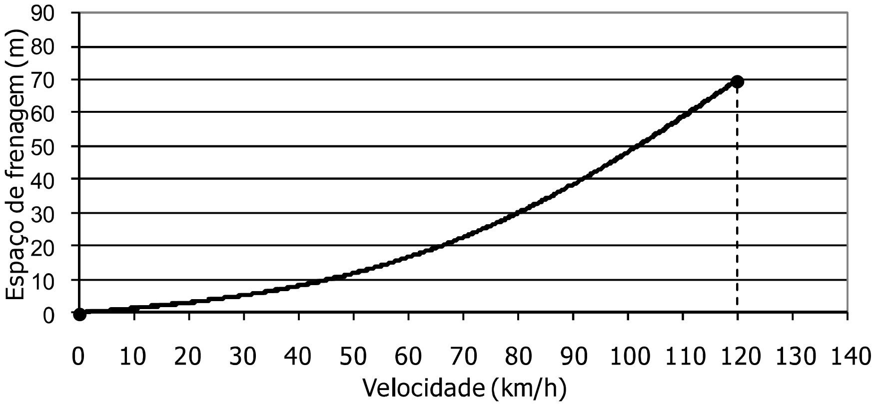
FUNÇÕES – INTRODUÇÃO

ANÁLISE GRÁFICA INTUITIVA

Abaixo está representada graficamente uma função. Analise a situação-problema e responda as perguntas.

[Exemplo] Ao acionar o freio de um automóvel, a distância para que ele pare é denominada "espaço de frenagem". Este depende de vários fatores, entre eles, a velocidade em que o carro se encontra quando o freio é acionado.



Através da análise do gráfico acima, determine:

a) Quais as variáveis envolvidas?

Velocidade [km/h] e Espaço de Frenagem [m].

b) Qual a variável independente?

Velocidade; que identificaremos por "x".

c) Qual a variável dependente?

Espaço de Frenagem; que identificaremos por "y" ou por f(x).

d) Qual o intervalo de variação da "velocidade" no experimento em questão?

Trata-se do Domínio da função, que é: $D = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 120 \}$.

e) Qual o intervalo de variação do "espaço de frenagem" no experimento em questão?

Trata-se do Conjunto Imagem da função, que é: $Im = \{ y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 70 \}$.

f) Quantos metros o automóvel ainda deverá percorrer quando freado a uma velocidade de 60 km/h?
E a 80 km/h? E a 100 km/h?

$x = 60$ km/h $\Rightarrow$ $y \cong 18$ m / $x = 80$ km/h $\Rightarrow$ $y = 30$ m / $x = 100$ km/h $\Rightarrow$ $y \cong 49$ m

g) A que velocidade deve estar o veículo para que o espaço de frenagem seja de 40 m?

Se o espaço de frenagem é $y = 40$ m então a velocidade é de $x \cong 92$ km/h.

h) Quando aumentamos a velocidade de 80 para 120 km/h, em quantos metros aumentará o espaço de frenagem?

Para tal situação, o espaço de frenagem aumentará em 40 m.

i) O "espaço de frenagem" aumenta ou diminui quando aumentamos gradativamente a velocidade?

O espaço de frenagem [y] aumenta. Para tal comportamento, dizemos que a função é crescente.

j) É possível, através do gráfico acima, relacionar os valores de velocidade e frenagem com precisão decimal?
O que [ou como] seria necessário para se conseguir tal precisão nas informações?

Não é possível. Se tivermos a fórmula matemática [lei de associação] que descreve o fenômeno em questão, poderemos então relacionar os valores de "velocidade" e "frenagem" com a precisão desejada.

NOÇÃO DE FUNÇÃO

O conceito de função é um dos mais importantes da Matemática e ocupa lugar de destaque em vários eixos temáticos dela, bem como de outras áreas do conhecimento.

Relação entre grandezas variáveis:

A função é um modo especial de relacionar grandezas físicas (variáveis). A função pode aparecer em forma de **tabela** ou **gráfico**, através de **diagramas** e também como **equação matemática** (fórmula ou lei de associação).

Analisemos a situação abaixo:

Um indivíduo pretende abastecer o seu carro com gasolina. O tanque de combustível do seu veículo possui capacidade máxima de (aproximadamente) 50 litros. Considerando que o litro de gasolina custa R$ 2,30 em um determinado posto, pode-se montar a seguinte tabela (veja ao lado):

Gasolina (litros)	Preço a pagar (R$)
1	2,30
2	4,60
3	6,90
4	9,20
:	:
50	115,00

Observando a tabela ao lado, pode-se responder:

a) Quais as variáveis envolvidas no problema?

R.: "Quantidade de Gasolina" e "Preço a pagar"

b) O que varia em função do quê?

R.: O "Preço a pagar" varia em função (de acordo com) da "Quantidade de Gasolina".

c) Qual é a variável independente?

R.: "Quantidade de Gasolina" (dada em litros). Representaremos esta grandeza por "x".

d) Qual é a variável dependente?

R.: "Preço a pagar" (dado em reais). Representaremos esta grandeza por "y".

e) Neste caso, qual é a lei de associação?

R.: A lei de associação ou fórmula matemática é: $\mathbf{y = 2{,}30x}$ ou ainda: $\mathbf{f(x) = 2{,}30x}$

f) Quanto pagará para abastecer 35 litros de gasolina?

Dado: $x = 35$ Pergunta-se: $y = ?$

Substituindo os valores na fórmula, temos:

$y = 2{,}30x$
$y = 2{,}30(35)$
$y = 80{,}50$

R.: Pagará R$ 80,50 para abastecer 35 litros de gasolina.

g) Quantos litros abastecerá, pagando R$ 59,80?

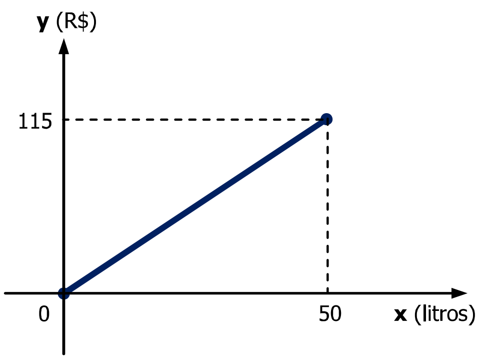
Dado: $y = 59{,}80$ Pergunta-se: $x = ?$

Substituindo os valores na fórmula, temos:

$y = 2{,}30x$
$59{,}80 = 2{,}30x$
$X = 59{,}80 / 2{,}30$

R.: Poderá abastecer 26 litros pagando R$ 59,80.

Fazendo uma representação gráfica da situação (no plano cartesiano), temos:



Observação:

Podemos destacar que a função em questão é uma função polinomial do 1º grau, que estudaremos mais detalhadamente a seguir. Observa-se ainda que a função em questão pode ser qualificada como uma **função crescente**, pois, a medida que se aumenta a quantidade de litros "x", também aumenta o preço a pagar "y".

Agora, considerando que:

• O Domínio (D) de uma função é o conjunto de todos os valores que podem ser assumidos pela variável independente (x), e que;

• Imagem (Im) é o conjunto de todos os valores correspondentes da variável dependente (y), responda:

h) Qual o Domínio da função em questão? **Resposta:** $D = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 50 \}$

i) Qual a Imagem da função em questão? **Resposta:** $Im = \{ y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 115 \}$

Comentário: Pode-se observar mais claramente o domínio e o conjunto imagem de uma função em sua representação gráfica (veja gráfico apresentado anteriormente).

Então, em uma função:

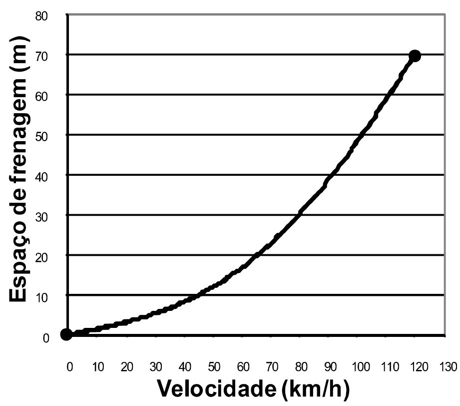
• Todos os possíveis valores de "x" (variável independente) estão associados, através da lei de associação, a valores de "y" (variável dependente).

• Para um dado valor de "x" (variável independente), está associado um único valor de "y" (variável dependente).

DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

No gráfico ao lado, pode-se observar que **o espaço de frenagem** representa uma grandeza variável: ele pode ser de 10 metros ou de 30 metros (citando apenas dois exemplos).

A **velocidade** também é outra grandeza variável, já que o automóvel pode andar em diversas velocidades. Portanto, o espaço de frenagem e a velocidade são variáveis, mas seus valores não são independentes entre si. O espaço de frenagem depende da velocidade do veículo ou, em outras palavras, para cada velocidade há um único espaço de frenagem.



Assim, pode-se considerar as duas variáveis em questão, uma assumindo valores num conjunto A (Domínio) e a outra num conjunto B (Contradomínio), de modo que o gráfico retrate uma situação tal que cada elemento do conjunto A corresponda a um único elemento do conjunto B.

Matematicamente, a função pode ser definida como um tipo **especial** de **relação** entre grandezas:

Sejam A e B dois conjuntos não vazios e " **f** " uma relação de A em B. Essa relação " **f** " é uma função de A em B quando a cada elemento **"x"** do conjunto **A** está associado um, e apenas um, elemento **"y"** do conjunto **B**.

• O conjunto **A** de valores que podem ser atribuídos a "x" é chamado **domínio** da função e indica-se por **D** ou $\mathbf{D_f}$ (sendo que a variável "x" é chamada variável independente).

• O valor de "y", correspondente a determinado valor atribuído a "x", é chamado imagem de x pela função e é representado por f(x). A variável "y" é chamada variável dependente.

• O conjunto **Im**, formado pelos valores que "y" assume em correspondência aos valores de "x", é chamado conjunto imagem da função. **Obs.:** podemos representar $y = f(x)$.

Notação:

Para indicar que uma função " **f** " tem domínio em A e contradomínio em B, usa-se: $\mathbf{f : A \to B}$. (lê-se: f de A em B).

Observações:

• O "**Domínio**" também é conhecido como "**Campo de Definição**" ou ainda como "**Campo de Existência**".

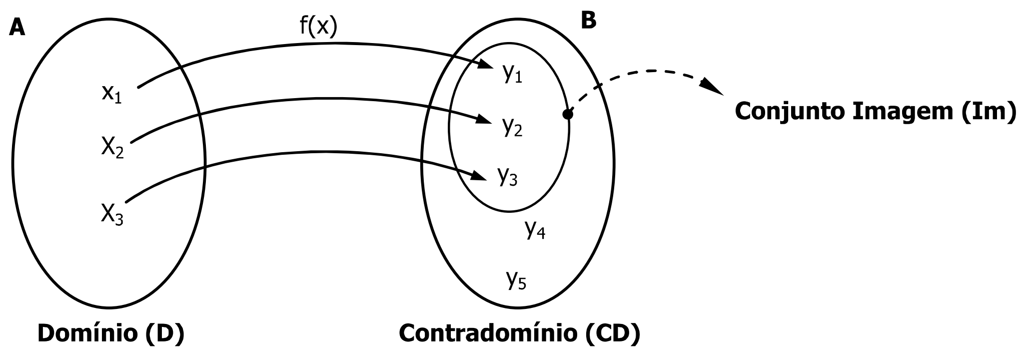
• No exemplo apresentado acima, temos que:

- Variáveis envolvidas: $\begin{cases} \text{independente (x)} \to \text{velocidade (km/h)} \\ \text{dependente (y)} \to \text{espaço de frenagem (m)} \end{cases}$

- Domínio da função: $D = [\,0\,,\,120\,]$ ou $D = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 120 \}$

- Imagem da função: $Im = [\,0\,,\,70\,]$ ou $Im = \{ y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 70 \}$

Representação de uma função por diagramas:



Lei da Função (fórmula matemática):

As leis que descrevem os fenômenos, relacionando matematicamente as variáveis envolvidas, são de fundamental importância. É o estudo de funções em que o valor de "y" pode ser calculado a partir de um determinado valor de "x", através de uma fórmula matemática (ou regra, ou lei de associação).

Analisemos alguns casos:

Caso 1: A lei de correspondência que associa cada número real "x" ao número real "y", sendo **"y" o dobro de "x"**, é uma função definida pela fórmula **y = 2x**, ou **f(x) = 2x**.

Assim:

- Para $x = 4$, temos que $y = 2 . 4 = 8$. Dizemos então que: $f(4) = 8$
- A imagem de $x = -2$ é: $f(-2) = 2.(-2) = -4$. Logo: $f(-2) = -4$
- $x = 12$ corresponde a $y = 2.12 = 24$
- $y = 6$ é a imagem de $x = 3$
- O domínio e o conjunto imagem desta função são todos os números reais, ou seja, $D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}$

Caso 2: A lei $y = \dfrac{x-1}{x-2}$ associa a cada "x" real e diferente de 2 a um "y" real.

Assim:

- Para $x = 3$ vem $y = 2$
- A imagem de $x = -4$ é $y = \dfrac{5}{6}$. Podemos escrever $f(x) = \dfrac{5}{6}$, ou ainda, $f(-4) = \dfrac{5}{6}$
- $y = 6$ é a imagem de $x = \dfrac{11}{5}$
- Trata-se de uma função cujo domínio é: $\mathbb{R} - \{ 2 \}$, e o conjunto imagem é: $\mathbb{R} - \{ 1 \}$, isto por que jamais poderíamos ter $\dfrac{x-1}{x-2} = 1$, pois sempre $x - 1 \neq x - 2$

Caso 3: Uma panela com água à temperatura de 15°C é levada ao fogo e observa-se que, a cada 1 minuto, a temperatura sobe 2°C. De acordo com os dados, forneça a lei (fórmula) que representa o aumento de temperatura em função do tempo.

Assim:

Tempo inicial (t_o): 0 min Temperatura inicial (T_o): 15° C

Tempo (min)	Temperatura (°C)	
0	**15**	[15 = 15 + 2.0]
1	**17**	[17 = 15 + 2.1]
2	**19**	[19 = 15 + 2.2]
3	**21**	[21 = 15 + 2.3]

Cada temperatura é a temperatura inicial mais um acréscimo de 2°C por minuto.
Logo, a lei que relaciona o aumento de temperatura em função do tempo é:

$\boxed{\mathbf{T(t) = 15 + 2t}}$, sendo esta, a solução do problema em questão.

Finalizando e Relembrando...

- Utilizando uma linguagem um pouco diferenciada, temos que uma função é uma regra que associa uma única saída a cada entrada. Se a entrada for "x" então a saída será denotada por f(x) ou y.
- Assim, o Domínio é o conjunto de todas as entradas possíveis e Imagem é o conjunto das saídas (valores de "y") que resultam quando se variam os valores deste Domínio. O Contradomínio é o conjunto onde se encontram todos os valores do conjunto Imagem.

Exemplos:

1) Dada a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 7$, calcule:

a) o valor de "y" de modo que x = 3, ou seja, calcular o valor de f(3).
b) o valor de "x" de modo que y = 10.

Resolução (a):

$f(x) = 2x - 7$ ou $y = 2x - 7$
$f(3) = 2(3) - 7$ $y_3 = 2(3) - 7$
$f(3) = 6 - 7$ $y_3 = 6 - 7$
$f(3) = -1$ $y_3 = -1$

Escrevemos f(3) = – 1, para dizer que quando x = 3, teremos pela função f(x), y = –1.

Resposta (a): f(3) = –1.

Resolução (b):

A função $f(x) = 2x - 7$ também poder ser escrita na forma:

$y = 2x - 7$. Então: $10 = 2x - 7$

$10 + 7 = 2x$

$17 = 2x \therefore x = 17/2$

Resposta (b): Quando y = 10, teremos x = 17/2.

2) Dados os conjuntos A = {–3, –1, 0, 2} e B = {–1, 0, 1, 2, 3, 4}, determine o conjunto Imagem da função $f : A \rightarrow B$ definida por $\mathbf{f(x) = x + 2}$.

Resolução:

Substituindo os valores de "x" do Domínio A na função f(x), teremos:

$f(x) = x + 2$
$f(-3) = -3 + 2$
$\mathbf{f(-3) = -1}$

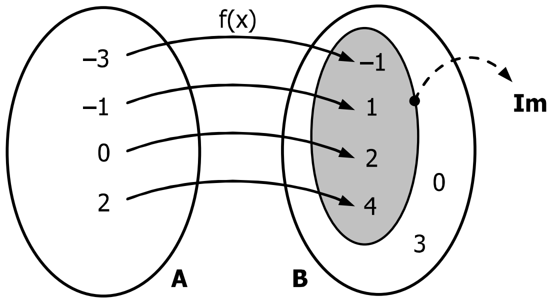
$f(x) = x + 2$
$f(0) = 0 + 2$
$\mathbf{f(0) = 2}$

$f(x) = x + 2$
$f(-1) = -1 + 2$
$\mathbf{f(-1) = 1}$

$f(x) = x + 2$
$f(2) = 2 + 2$
$\mathbf{f(2) = 4}$

Logo, o conjunto Imagem da função é **Im = {–1, 1, 2, 4}**.

Apenas para ilustração, temos os diagramas:



3) Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{f(x) = x^2 - 10x + 8}$. Determine:

a) f(1);
b) os valores reais de "x" para que se tenha f(x) = –1;
c) o domínio da função dada.

Resolução (a):

Substituindo x = 1, teremos:

$f(x) = x^2 - 10x + 8$
$f(1) = (1)^2 - 10(1) + 8$
$f(1) = 1 - 10 + 8$
$f(1) = -1$

Resposta (a): f(1) = –1

Resolução (b):

Substituindo f(x) = –1 na função $f(x) = x^2 - 10x + 8$, teremos:

$-1 = x^2 - 10x + 8$. Então: $x^2 - 10x + 9 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau acima, teremos:

$\Delta = 64$ e conseqüentemente: $x' = 9$ e $x'' = 1$

Resposta (b): Os valores de "x" para que se tenha y = –1 são **x = 9** ou **x = 1**.

Resolução (c):

O Domínio da função f(x) em questão pode ser observado na notação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sendo o primeiro conjunto apresentado (antes da flecha) o Domínio e o segundo conjunto apresentado (após a flecha) o Contradomínio.

Resposta (c): Logo, o Domínio da função dada é $D = \mathbb{R}$.

Para refletir...
A vida é um eco. Se você não está gostando do que está recebendo, observe o que está emitindo. [Lair Ribeiro]

4) Dada a função $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{g(x) = x^2}$, determine o seu Domínio e o seu conjunto Imagem:

Resolução:

• Neste caso, para determinarmos o Domínio, precisamos identificar todos os possíveis valores de "x" que, quando inseridos na função em questão, seguramente apontarão para um valor único de "y".

Sabendo disso, podemos dizer que "x" poderá assumir qualquer valor REAL, pois qualquer número real quando elevado ao quadrado, define um único número real. Logo: $D = \mathbb{R}$.

• Agora vamos avaliar os possíveis valores que "y" poderá assumir. Sabemos que todo número real [x] elevado ao quadrado resulta em um número não negativo. Logo: $Im = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \}$.

Resumidamente, temos: $D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}_+$

Construção de Gráficos de Funções através da Lei de Associação

Alguns Exemplos com Funções Elementares [de 1º e de 2º grau]

O gráfico, ou a representação gráfica de uma função, é uma maneira de apresentarmos o comportamento de um fenômeno numa forma visual (geométrica), o que em muitos casos, facilita a compreensão do fenômeno, possibilitando perceber o seu comportamento de uma forma mais ampla. Para tanto, utilizaremos o sistema cartesiano ortogonal, indicando os valores de "x" e "y" nos seus eixos correspondentes.

Veja a seguir, as etapas para a construção de um gráfico de uma função "elementar" conhecendo o respectivo domínio:

1) Montar uma tabela, atribuindo valores para "x" [conforme o domínio da função dada] e calcular os correspondentes valores de "f(x)";

2) Marcar no plano cartesiano os pontos gerados pelos pares ordenados (x , y) encontrados na tabela;

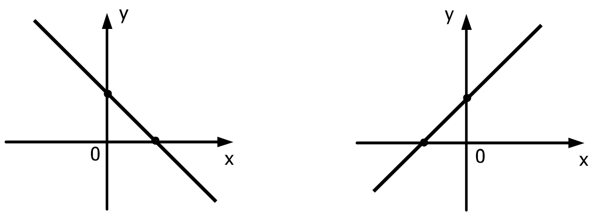
3) Ligar (ou não) os pontos marcados no plano cartesiano por meio de uma "curva" [de acordo com o tipo de função e seu respectivo domínio].

Observação:

Com o objetivo de otimizar o processo de ensino-aprendizagem, iremos desenvolver um estudo de construção de gráficos utilizando apenas dois tipos de funções [neste momento]. São elas:

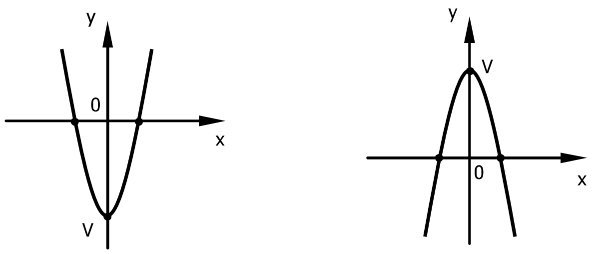
• **Função do 1º grau** **[$f(x) = ax + b$]**

Para domínio REAL, o gráfico é uma reta oblíqua aos eixos coordenados.



• **Função do 2º grau** **[$f(x) = ax^2 + bx + c$]**

Para domínio REAL, o gráfico é uma parábola com concavidade na direção vertical [para cima ou para baixo].



Teremos a oportunidade de estudar essas e outros tipos de funções [e suas representações gráficas] mais adiante.

Vejamos alguns exemplos:

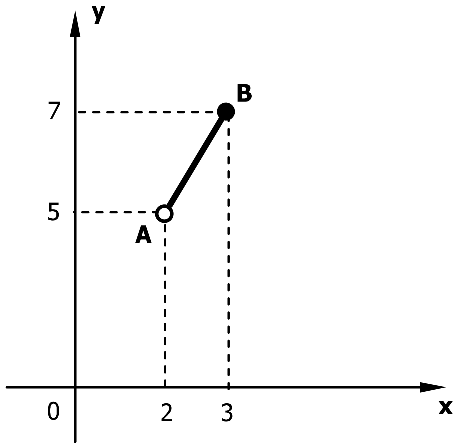
1) Construa o gráfico da função $f : D \to \mathbb{R}$ definida por **$f(x) = 2x + 1$**, considerando que $D = \{ x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 3 \}$.

Resolução:

tabela

	x	f(x)	**f(x) = 2x + 1**
○	2	5	$\to f(2) = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$
	⋮	⋮	
●	3	7	$\to f(3) = 2(3) + 1 = 6 + 1 = 7$

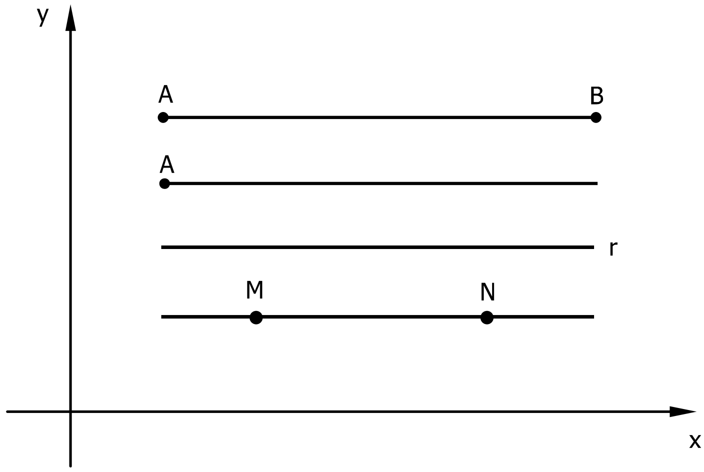
Observe que: $Im = \{ y \in \mathbb{R} \mid 5 < y \leq 7 \}$



Algumas Considerações:

Para a construção do gráfico do exemplo dado, foram utilizados **apenas dois** pontos [A e B], pois **$f(x) = 2x + 1$** é uma função polinomial do 1º grau e por isso tem sua representação gráfica como sendo uma linha reta (neste caso, um segmento de reta AB). Note ainda que os valores atribuídos para "x" são os "limitantes" do domínio (2 e 3) que são apenas valores de referência do domínio $D = \{ x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 3 \}$ que possui infinitos valores a partir de 2 até 3, que neste caso, estão sendo representados pelos infinitos pontos que compõem a linha contínua AB.

NOTA: Quanto à representação gráfica de uma "linha reta", formalmente, temos:



$\to$ Segmento de reta AB. Notação: $\overline{AB}$

$\to$ Semi-reta (partindo de A ou chegando em A)

$\to$ Reta "r" (elemento infinito)

$\to$ Reta que passa por M e N. Notação: $\overleftrightarrow{MN}$

Para descontrair!

Créditos: Mauricio de Sousa Produções Ltda.

2) Construa o gráfico da função f **:** ℝ → ℝ definida por **f(x) = 2x + 1**.

Resolução:

tabela

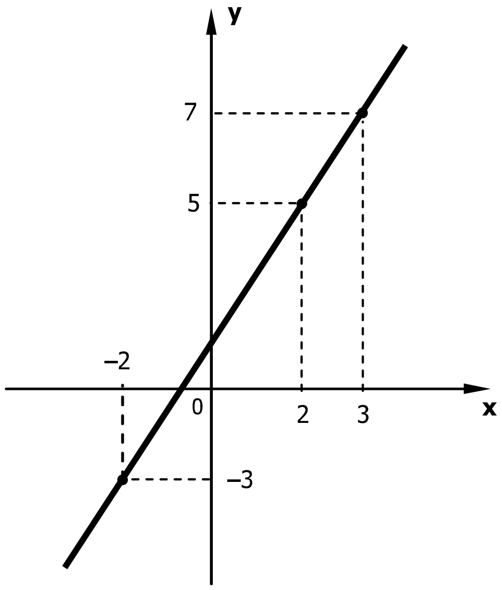
x	f(x)
⋮	⋮
–2	–3
⋮	⋮
2	5
⋮	⋮
3	7
⋮	⋮

f(x) = 2x + 1

→ f(–2) = 2(–2) + 1 = – 4 + 1 = –3

→ f(2) = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5

→ f(3) = 2(3) + 1 = 6 + 1 = 7



Observe atentamente que: Im = ℝ

Nota: Como D = ℝ , podemos "escolher" qualquer valor real para "x" para construir o gráfico. Neste exemplo, escolhemos três valores de referência: –2, 2 e 3; entretanto, apenas dois valores para "x" seriam suficientes para a construção da reta.

3) Construa o gráfico da função h **:** D → ℝ definida por **h(x) = – x² + 5**, sendo que D = { –2, –1, 0, 1, 2 }.

Resolução:

tabela

x	h(x)
–2	1
–1	4
0	5
1	4
2	1

h(x) = – x² + 5

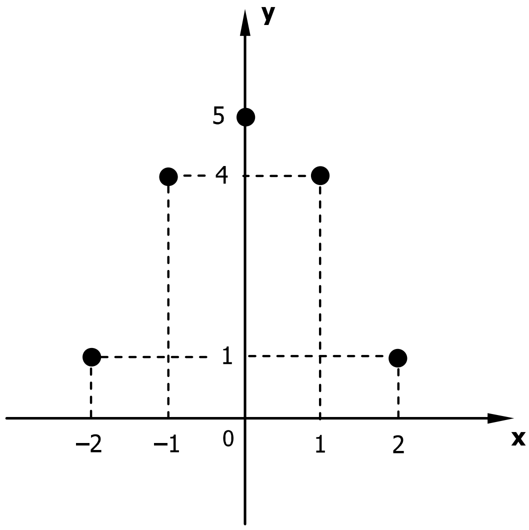
→ $h(-2) = -(-2)^2 + 5 = -(4) + 5 = 1$

→ $h(-1) = -(-1)^2 + 5 = -(1) + 5 = 4$

→ $h(0) = -(0)^2 + 5 = -(0) + 5 = 5$

→ $h(1) = -(1)^2 + 5 = -(1) + 5 = 4$

→ $h(2) = -(2)^2 + 5 = -(4) + 5 = 1$



Observe que: Im = { 1 , 4 , 5 }

4) Construa o gráfico da função h **:** D → ℝ definida por **h(x) = – x² + 5**, sendo que D = { x ∈ ℝ | –2 < x < 2 }.

Resolução:

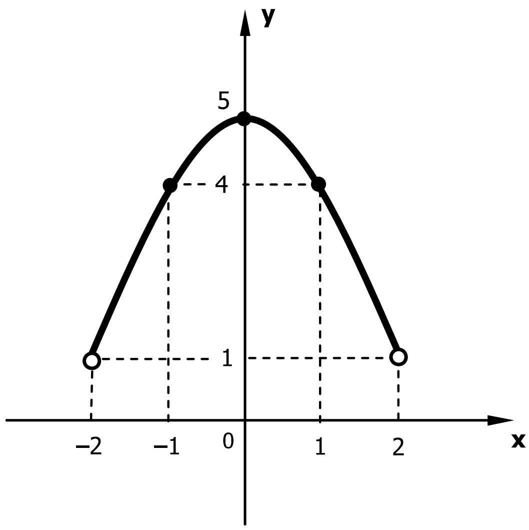
tabela

x	h(x)
–2	1
⋮	⋮
2	1

h(x) = – x² + 5

→ $h(-2) = -(-2)^2 + 5 = -(4) + 5 = 1$

→ $h(2) = -(2)^2 + 5 = -(4) + 5 = 1$

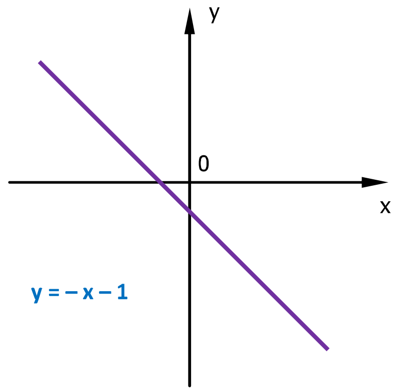


Observe que: Im = { y ∈ ℝ | 1 < y ≤ 5 }

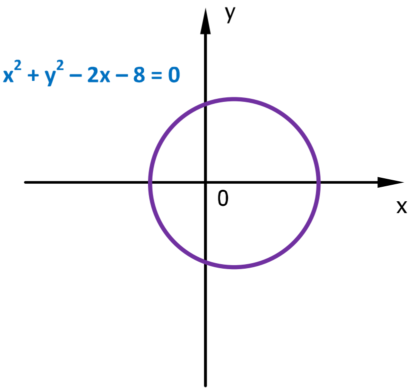
Para concluir: Você deve ter percebido que **a representação gráfica** de uma função depende essencialmente de dois fatores: o **tipo** da função em questão e o seu respectivo **domínio**.

Reconhecendo Gráficos de Funções

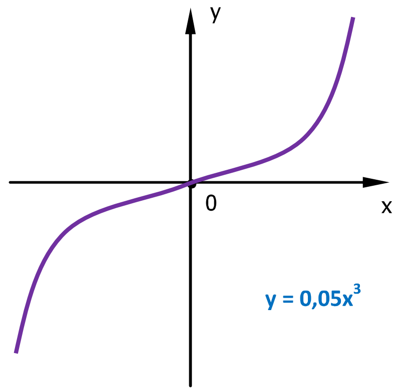
Os gráficos de funções têm características especiais. Quando temos gráficos que não possuem estas características, dizemos que esses foram gerados apenas por relações matemáticas, e não por funções. Observe os exemplos:



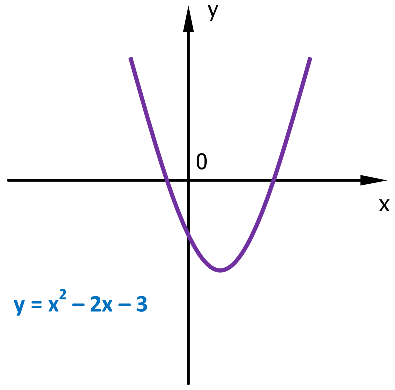
É função



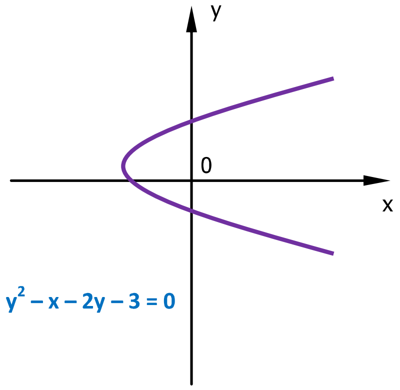
Não é função



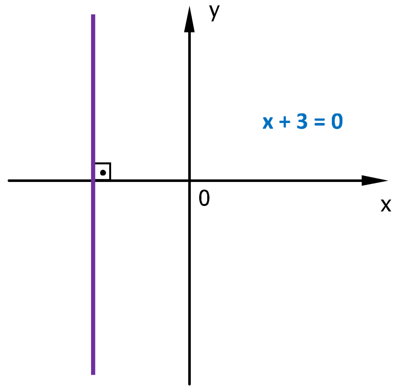
É função



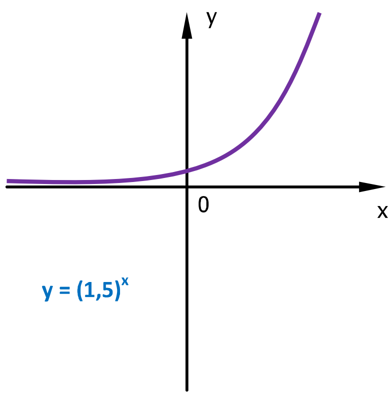
É função



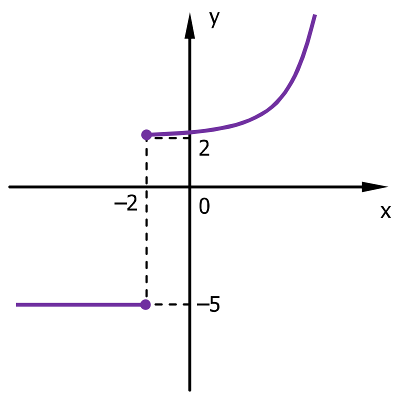
Não é função



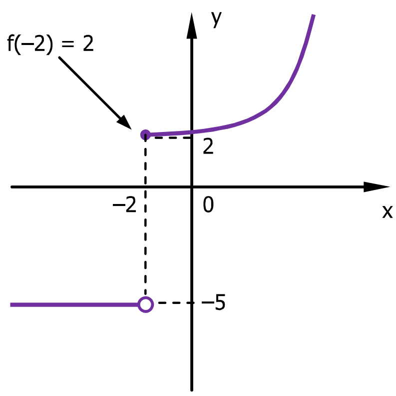
Não é função



É função



Não é função



É função

Lembre-se que em uma função, cada valor de "x" do domínio possui um, e somente um valor correspondente "y"**.** Isto pode ser muito bem observado mesmo quando se tem apenas a representação gráfica da função.

Uma dica para ajudar a verificar se um gráfico é de uma função ou não: trace linhas verticais pelo gráfico. Se existir pelo menos uma possibilidade desta linha vertical "cortar" o gráfico em mais de um ponto dele, então o referido gráfico não é de uma função, pois isto indicará que um valor do domínio tem mais de uma imagem.

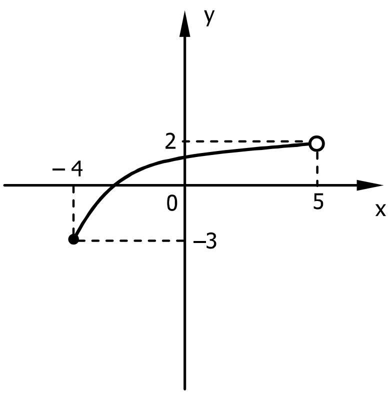
Reflita: Aprender sem pensar é tempo perdido. [Confúcio]

Analisando Graficamente o Domínio e Imagem de Funções

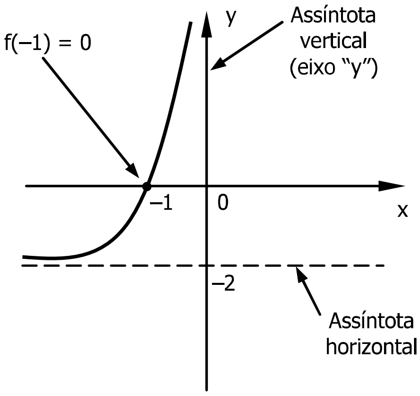
Graficamente, consideramos:

Domínio → projeção ortogonal do gráfico sobre o eixo das abscissas [x].
Imagem → projeção ortogonal do gráfico sobre o eixo das ordenadas [y].

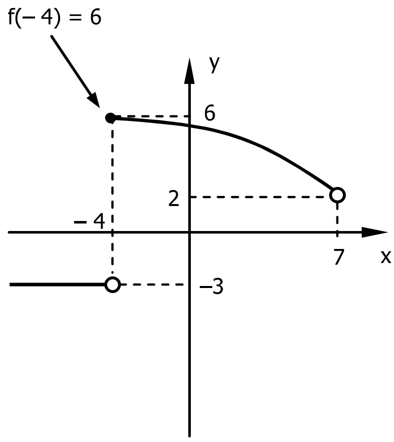
Vejamos alguns exemplos:



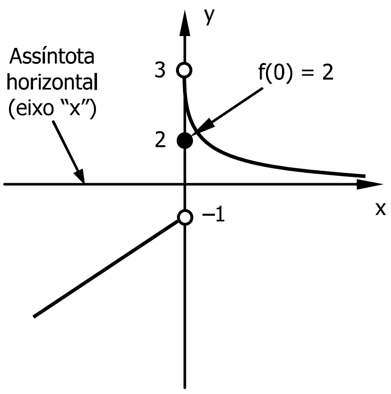
D = { x ∈ ℝ | – 4 ≤ x < 5 }
Im = { y ∈ ℝ | –3 ≤ y < 2 }



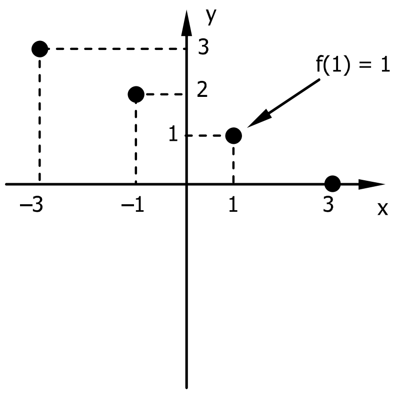
D = { x ∈ ℝ | x < 0 }
Im = { y ∈ ℝ | y > –2 }



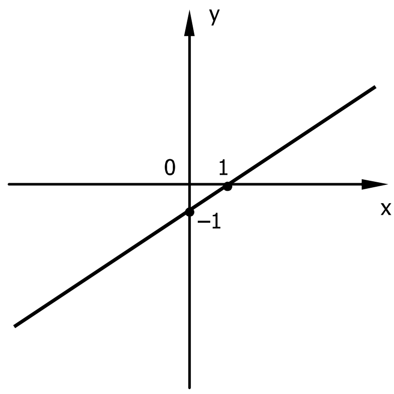
D = { x ∈ ℝ | x < 7 }
Im = { y ∈ ℝ | y = –3 ou 2 < y ≤ 6 }



D = ℝ
Im = { y ∈ ℝ | y < –1 ou 0 < y < 3 }



D = { –3, –1, 1, 3 }
Im = { 0, 1, 2, 3 }



D = ℝ
Im = ℝ

Um Breve Estudo sobre o Domínio de Funções

Existirão muitas situações em nosso estudo que precisaremos conhecer o domínio de uma função. Veja algumas delas:

[1] O Domínio pode aparecer indicado explicitamente no problema [veja os exemplos 2 e 3 da página 15 e da página 18].

[2] O Domínio pode ser determinado através do gráfico da função, caso você o tenha [como nos exemplos acima].

[3] O Domínio pode estar associado a um problema técnico/científico [Domínio Aplicado], como já vimos em alguns exemplos anteriores [página 12 e 13]. Veja o exemplo a seguir:

Exemplo: Uma empresa que fabrica aparelhos de som tem um custo fixo de R$ 6.600,00 por semana e um custo por aparelho de R$ 70,00. Essa empresa tem capacidade máxima de produção semanal de 400 aparelhos. Assim, o custo semanal para produzir "x" unidades é dado por: **C(x) = 6600 + 70x**.

O domínio da função C(x) neste caso [aplicado] é: D = { x ∈ ℤ | 0 ≤ x ≤ 400 }

[4] O Domínio pode ser determinado também através da própria lei de associação da função [fórmula matemática]. De certa forma podemos dizer que nesta situação o domínio é estritamente matemático e está **implícito** na função.

Veja os exemplos a seguir:

Exemplo 1: O Domínio da função $y = 6600 + 70x$ é D = ℝ

Exemplo 2: O Domínio da função $y = \dfrac{1}{x}$ é D = ℝ*

Exemplo 3: O Domínio da função $f(x) = \sqrt[4]{x}$ é D = $\mathbb{R}_+$

Exemplo 4: O Domínio da função $g(x) = \sqrt{5x-5}$ é D = { x ∈ ℝ | x ≥ 1 }

Pois devemos ter:

$$5x - 5 \geq 0$$
$$5x \geq 5$$
$$x \geq \frac{5}{5} \quad \Rightarrow \quad x \geq 1$$

Exemplo 5: O Domínio da função $h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-8}}{12}$ é D = ℝ

Exemplo 6: O Domínio da função $T(x) = \dfrac{x-3}{4x+6}$ é D = { x ∈ ℝ | x ≠ –3/2 }

Pois devemos ter:

$$4x + 6 \neq 0$$
$$4x \neq -6$$
$$x \neq \frac{-6}{4} \quad \Rightarrow \quad x \neq -\frac{3}{2}$$

Exemplo 7: O Domínio da função $F(x) = \dfrac{7x}{\sqrt{2-9x}}$ é D = { x ∈ ℝ | x < 2/9 }

Pois devemos ter:

$$2 - 9x > 0$$
$$-9x > -2 \quad .(-1)$$
$$9x < 2 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{2}{9}$$

Exemplo 8: O Domínio da função $y = \dfrac{14}{\sqrt[5]{6x}}$ é D = { x ∈ ℝ | x ≠ 0 }

Pois devemos ter:

$$6x \neq 0$$
$$x \neq \frac{0}{6} \quad \Rightarrow \quad x \neq 0$$

Exemplo 9: O Domínio da função $y = \sqrt{x^2 - 16}$ é D = { x ∈ ℝ | x ≤ – 4 ou x ≥ 4 } **[Faça uma análise!]**

Para refletir: É uma pena que mesmo a mentira tendo perna curta, a verdade muitas vezes só consiga rastejar. [Mr. Pi]

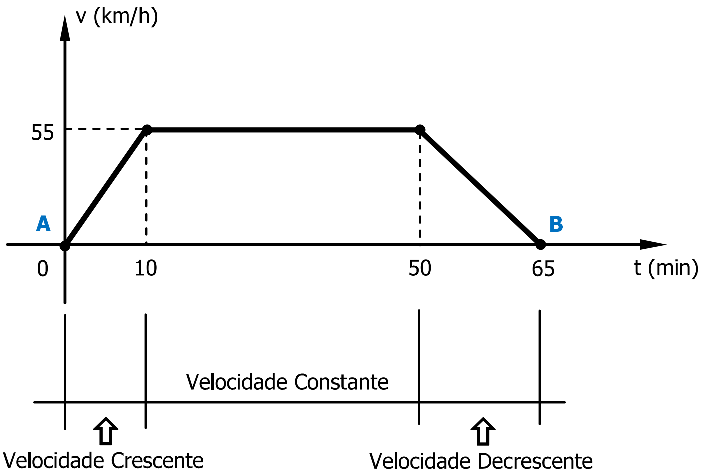
Crescimento e Decrescimento de uma Função

Podemos classificar uma função, ou um intervalo de uma função, em: crescente, decrescente ou constante. Tal classificação consiste em analisar a variação dos valores de "y" [ou f(x)] quando aumentamos os valores de "x".
Assim:

Uma função, ou um intervalo de uma função é:

- CRESCENTE, quando os valores de "y" **aumentam** [crescem] no momento em que aumentamos os valores de **x**.
- DECRESCENTE, quando os valores de "y" **diminuem** [decrescem] no momento em que aumentamos os valores de **x**.
- CONSTANTE, quando os valores de "y" **não variam** [são constantes] no momento em que aumentamos os valores de **x**.

[Exemplo] Vamos considerar que uma Litorina [Automotriz] fará uma pequena viagem partindo de uma estação A até uma estação B. Veja abaixo, a representação gráfica da velocidade pelo tempo de viagem.



No esquema ao lado, podemos trocar a palavra velocidade por função, e assim identificamos as três partes da função que compõem o gráfico:

Para: $0 \leq t < 10$ $\rightarrow$ a função é crescente
Para: $10 \leq t < 50$ $\rightarrow$ a função é constante
Para: $50 \leq t \leq 65$ $\rightarrow$ a função é decrescente

Apenas para complementar, no caso acima temos: $D = \{ t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 65 \}$ e $Im = \{ v \in \mathbb{R} \mid 0 \leq v \leq 55 \}$.

Observe:

Na Figura [A] podemos comparar o crescimento/decrescimento de uma função com o movimento de um carrinho em uma "montanha russa". Quando o carrinho **sobe**, a função é **crescente** e quando ele **desce**, a função é **decrescente**. Lembre-se que, para isso, você analisará o deslocamento do carrinho [sempre] da esquerda para a direita [$\rightarrow$].

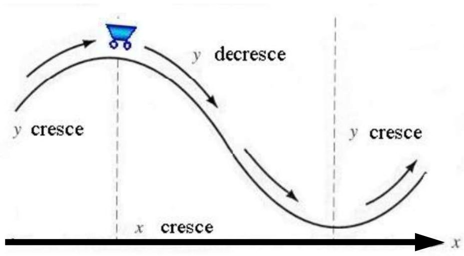


Figura [A]

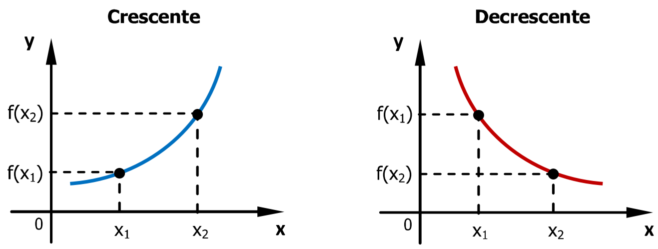


Figura [B]

Na Figura [B] apresentam-se duas funções: uma crescente e outra decrescente, cada qual, para todo o seu respectivo domínio real.

Note que na função CRESCENTE, aumentando os valores no eixo "**x**", de $\mathbf{x_1}$ para $\mathbf{x_2}$, temos o crescimento (aumento) dos valores correspondentes no eixo "y" , de $\mathbf{f(x_1)}$ para $\mathbf{f(x_2)}$.

E na função DECRESCENTE, aumentando os valores no eixo "**x**", de $\mathbf{x_1}$ para $\mathbf{x_2}$, temos o decrescimento (diminuição) dos valores correspondentes no eixo "y" , de $\mathbf{f(x_1)}$ para $\mathbf{f(x_2)}$.