Funções

INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Objetivos

Ciência da Computação

Conceituar e testar se uma função é injetora, sobrejetora ou bijetora

Definir e representar graficamente uma função

Gerar funções compostas

Determinar o domínio, contradomínio e a imagem de uma função

Decidir se uma função tem inversa e, caso tenha, encontrá-la

INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

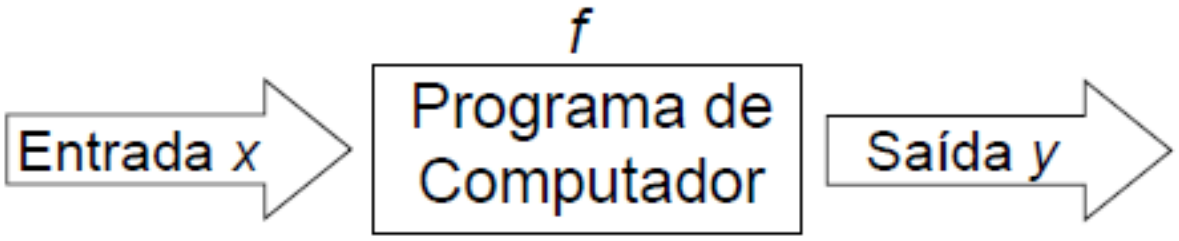
Funções

Ciência da Computação

O conceito de funções é um dos mais importantes na matemática e envolve muitos conteúdos visto na informática:

Algoritmos são funções; Compiladores são funções; Funções de Criptografia; Funções de Compressão; Funções de Geração de Chave de Armazenamento; etc.

Leibniz (1673) utilizou o termo **"função"** para indicar a dependência de uma quantidade em relação a uma outra.



INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Funções

Ciência da Computação

O conceito básico de função é o seguinte: toda vez que temos dois conjuntos e algum tipo de associação entre eles, que faça corresponder **a todo** elemento do primeiro conjunto **um único** elemento do segundo, ocorre uma função.

Definição: Dados dois conjuntos A e B, e uma relação entre eles, dizemos que essa relação é uma função de A em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ de modo que x se relacione com y.

Ou seja: $$f : A \to B \Leftrightarrow \left(\forall x \in A, \exists! y \in B / \left(x, y\right) \in f\right)$$

Notação: (lê-se "*f é uma* função de *A* em *B*").

Funções

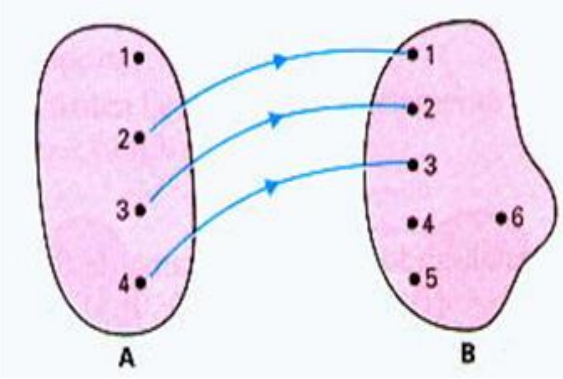
Essa relação é dada através de uma lei de associação expressa na forma y = f(x).
Escrevemos:

$$f : A \rightarrow B$$
$$x \rightarrow y = f(x)$$

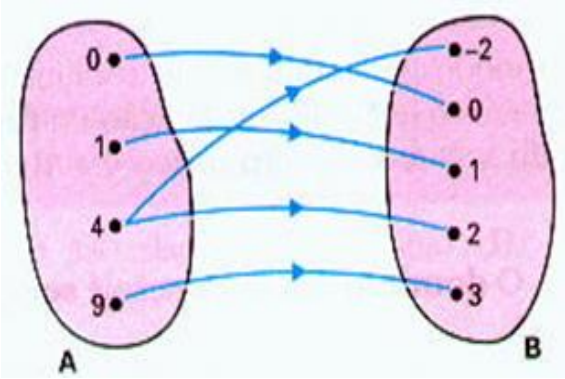
Temos:
x é a variável *independente*
y é a variável *dependente*
y é a *imagem* de *x* (indica-se y = f(x) e lê-se “y é igual a f de x”)
f(x) é o *valor da função f* no ponto x ou a imagem de x por *f.*

Funções

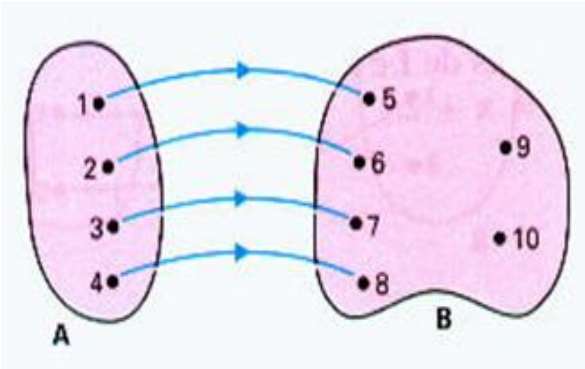
Observe, por exemplo, o diagrama das relações abaixo:



A relação acima **não** é uma função, pois existe o elemento **1** no conjunto A, que não está associado a nenhum elemento do conjunto B.



A relação acima **não** é uma função, pois existe o elemento **4** no conjunto A, que está associado a mais de um elemento do conjunto B.



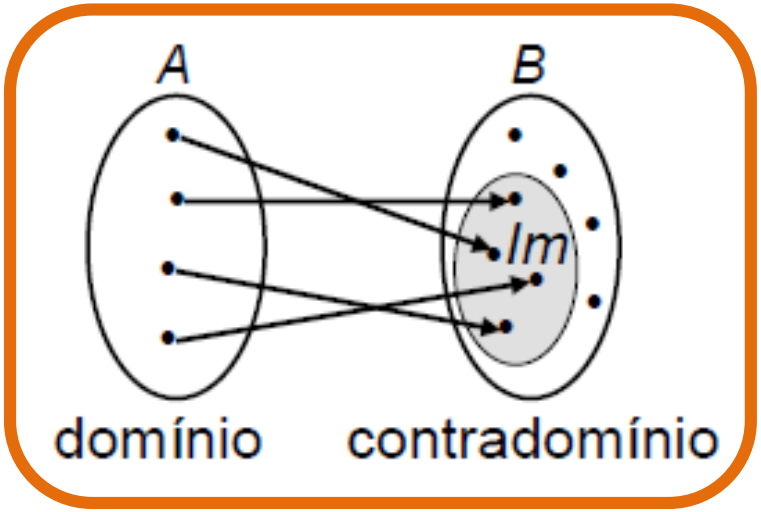
A relação acima **é** uma função, pois todo elemento do conjunto **A**, está associado **a somente um** elemento do conjunto **B**.

Domínio e Imagem

❖ **Domínio:** É o conjunto de partida, indicado por Dom(f) = A.

❖ **Contradomínio:** É o conjunto de chegada, indicado por Cd(f) = B.

❖ **Imagem:** É o conjunto de todos os valores assumidos pela função *f*, indicado por Im(*f*) = {y ∈ B / y = *f*(x) para algum x ∈ A}. Note que Im(f) ⊆ Cd(f).



Domínio e Imagem

Obs: quando uma função for dada por uma lei de formação sem indicar o domínio e o contradomínio, tomaremos como domínio o maior subconjunto de números reais no qual a lei de formação pode ser aplicada e para contradomínio, o conjunto dos números reais.

Exemplo:
Determinar o domínio e a imagem das funções abaixo.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $g(x) = \frac{1}{x-2}$

c) $h(x) = |x|$

d) $f(x) = \sqrt{x}$

e) $g(x) = -\sqrt{x-1}$

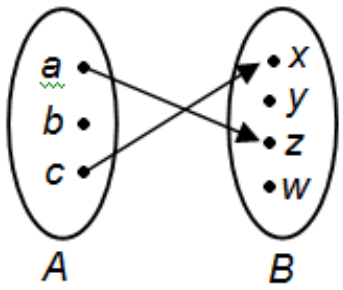
INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Exercícios

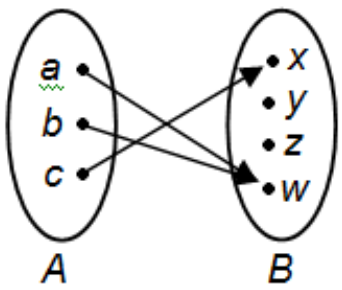
Ciência da Computação

1) Diga qual das relações abaixo representam uma função de A={a,b,c} em B = {x,y,z,w}

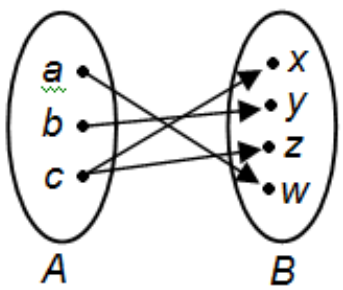
a)



b)



c)



2) Dados os conjuntos A = {0,1,2,3} e B = {-1,0,1,2,3}. Avalie se as relações binárias de A em B a seguir são ou não funções:

a) $R = \{(x,y) \in A \times B / y = (x-1)^2 - 1\}$

b) $S = \{(x,y) \in A \times B / y = x + 1\}$

c) $T = \{(x,y) \in A \times B / y = 2\}$

Exercícios

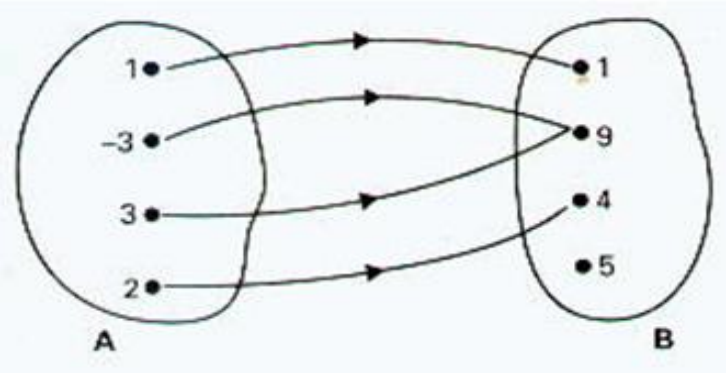
3) Considere a função f: A → B representada pelo diagrama a seguir e determine:

a) O domínio de f.

b) f(1), f(-3), f(3) e f(2).

c) o conjunto imagem de f.

d) a lei de associação.



4) Dada a função f: IR → IR definida por $f(x) = x^2 - 5x + 6$, calcule:

a) f(-4).

b) y, quando x = 0.

c) o valor de x cuja imagem vale 2.

d) x, quando f(x) = 0.

Representação

Uma função pode ser representada de diferentes maneiras:

- ***verbalmente***: descrevendo-a em palavras;
- ***numericamente***: por meio de tabelas;
- ***algebricamente***: utilizando uma fórmula matemática; ou
- ***visualmente***: através de um gráfico.

Ex:
O valor a ser pago para encher o tanque de um carro depende do número de litros de gasolina utilizados. Suponha que o litro de gasolina custa R$ 4,10 e represente esta função numericamente, algebricamente e visualmente.

Gráfico de Funções

Definição: O gráfico de uma função f : A → B é o conjunto de todos os pontos (x, y) de um plano coordenado tais que y= f(x) e x ∈ A.
Simbolicamente:

$$G(f) = \{(x,y) \in AxB \,/\, y = f(x)\}$$

Exemplos:
a) $f(x) = x + 2$

b) $f(x) = x^2 - 4$

Nota: Perceba que a representação gráfica de uma função depende essencialmente de dois fatores: o tipo da função em questão e o seu respectivo domínio.

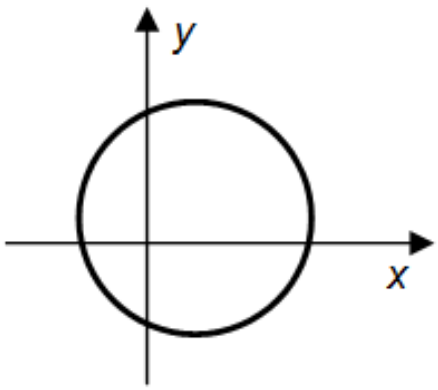
Gráfico de Funções

Reconhecendo Gráficos de Funções

Uma curva no plano xOy é o gráfico de uma função se, e somente se, nenhuma reta vertical cortar a curva mais de uma vez.

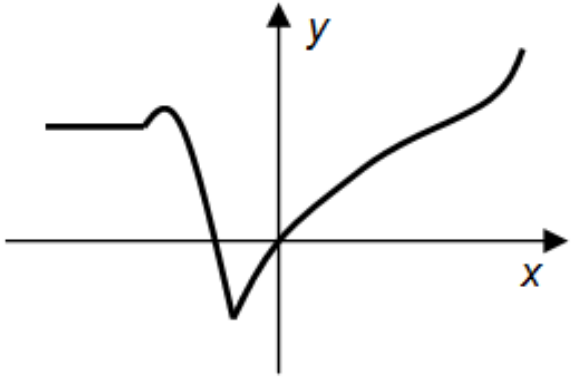
Exemplo: Quais dos gráficos a seguir são gráficos de funções de *x* e quais não são? Justifique sua resposta.

a)



Não é função

b)



É função

Gráfico de funções

Analisando graficamente o domínio e imagem de funções

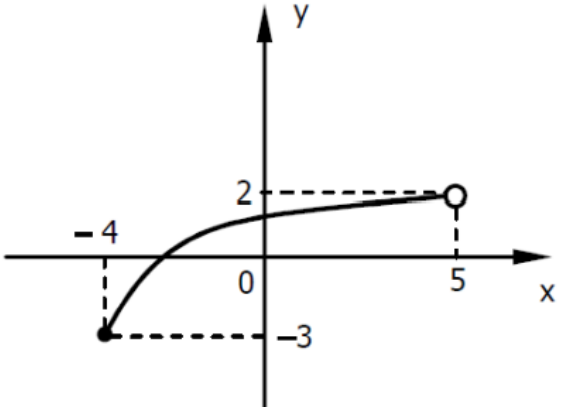
Graficamente, consideramos:

Domínio → projeção ortogonal do gráfico sobre o eixo x.

Imagem → projeção ortogonal do gráfico sobre o eixo y.

Exemplos:

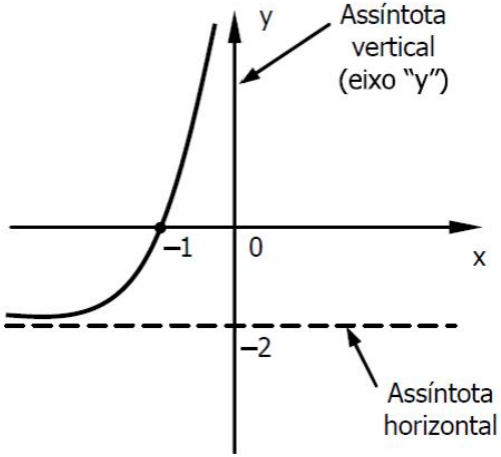
a)



$D = \{ x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < 5 \}$

$Im = \{ y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y < 2 \}$

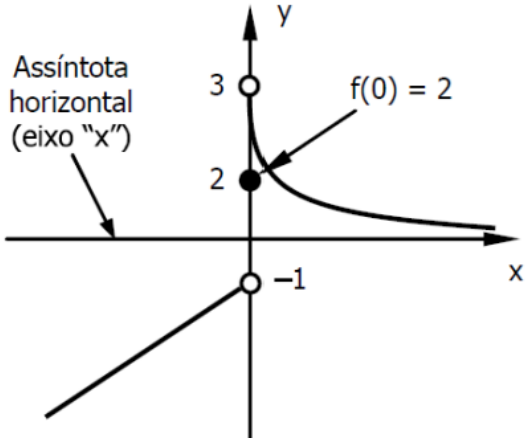
b)



$D = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \}$

$Im = \{ y \in \mathbb{R} \mid y > -2 \}$

c)



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{ y \in \mathbb{R} \mid y < -1 \text{ ou } 0 < y < 3 \}$

Funções Especiais

Função Constante

É toda função do tipo

$$f(x) = k$$

que associa a qualquer número real *x* um número real *k*.

Função do Primeiro Grau

É toda função da forma

$$f(x) = ax + b, \qquad a \neq 0$$

Função Quadrática

Toda função definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

é chamada função do segundo grau ou quadrática.

INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Funções Especiais

Ciência da Computação

Função Exponencial

Chamamos de função exponencial de base *a* a função

$$f(x) = a^x$$

que associa cada o número real *x* um número a^x.

Função Logarítmica

Chamamos de função logarítmica de base *a* a função

$$f(x) = \log_a x$$

que associa cada o número real x um número $\log_a x$.

Função Trigonométricas

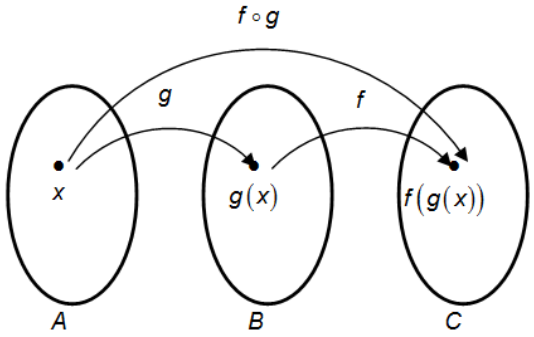
$$f(x) = sen(x), \quad f(x) = \cos(x), \quad f(x) = tg(x)$$
$$f(x) = cotg(x), \quad f(x) = \sec(x), \quad f(x) = cossec(x)$$

INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Composição de Funções

Ciência da Computação

Definição: Sejam $g : A \to B$ e $f : B \to C$. A função composta $f \circ g$ é a função de A em C definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.



➢ Por definição, o domínio da $f \circ g$ consiste em todo o x no domínio de *g* para o qual *g*(x) está no domínio de *f*.

Exemplo: Seja $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Determine:

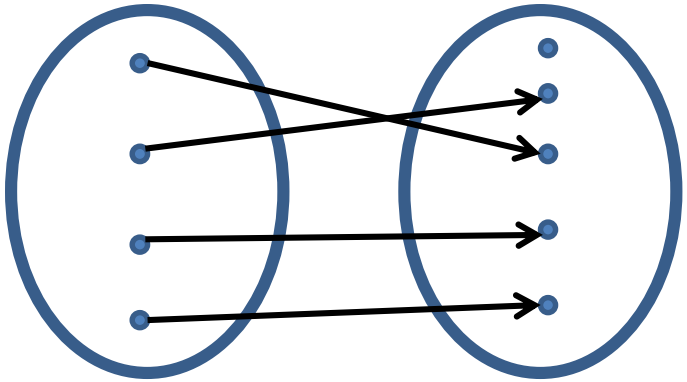
a) $(f \circ g)(x)$ c) $(g \circ g)(x)$ e) $(g \circ f)(4)$

b) $(g \circ f)(x)$ d) $(f \circ f)(x)$ f) $(f \circ g)(7)$

Propriedades de uma Função

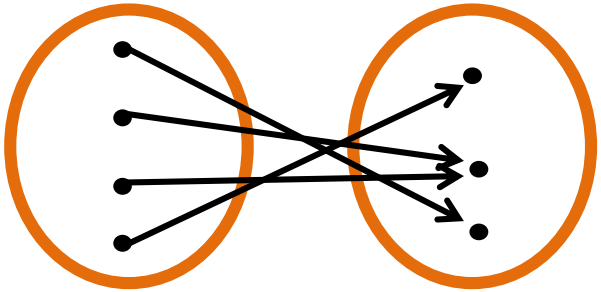
Função injetora: A função $f : A \rightarrow B$ é **injetora** se elementos distintos do domínio tiverem imagens distintas, ou seja, dois elementos não podem ter a mesma imagem.

$$\forall x_1 \in A, \forall x_2 \in A, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



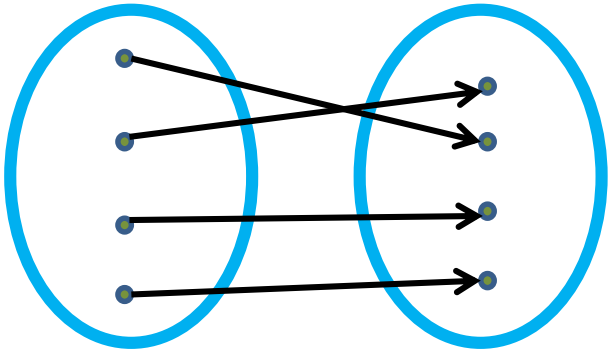
Propriedades de uma Função

Função sobrejetora: Uma função $f : A \rightarrow B$ é **sobrejetora** se, e somente se, o conjunto imagem for igual ao contradomínio.



$$\forall y \in B, \quad \exists x \in A / (x, y) \in f$$

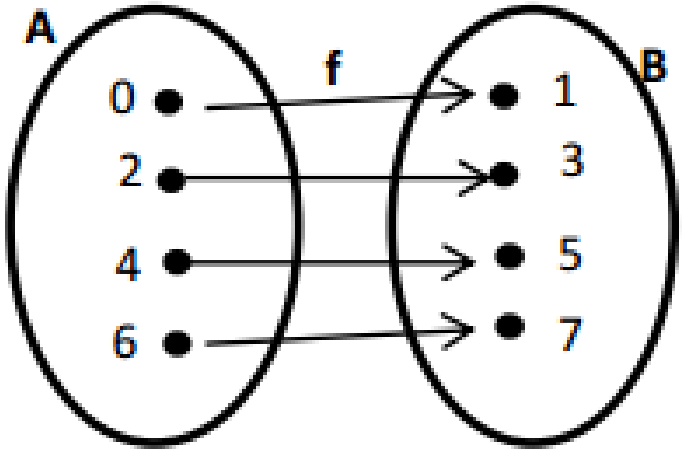
Função bijetora: Uma função $f : A \rightarrow B$ é **bijetora** quando ela é simultaneamente sobrejetora e injetora.



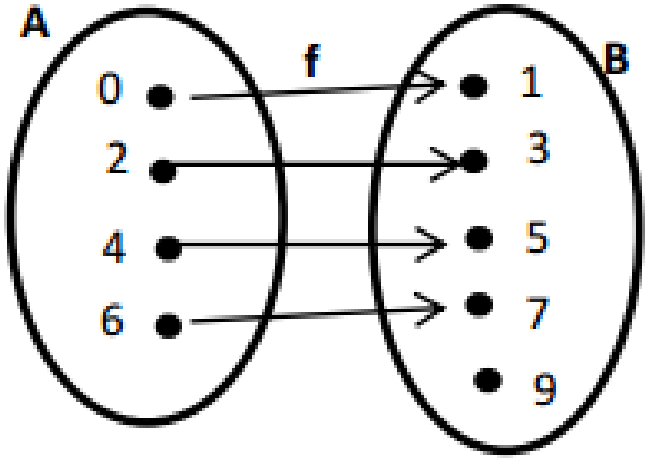
Propriedades de uma Função

Exemplo: Verifique se as funções são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras:

a) f: A → B



b) f: A → B



c) f: R → R_+ definida por $f(x) = x^2$

d) f: R → R definida por $f(x) = x + 2$

e) f:{0;1;2;3;4} → N definida por $f(x) = 2x$

INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Propriedades de uma Função

Ciência da Computação

Exercício: Determine quais das seguintes funções são injetoras, sobrejetoras e bijetoras.

a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x^3$

b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = x^2$

c) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $h(x) = x^2$

d) $r : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ tal que $r(x) = \begin{cases} 0, & \text{se x for ímpar} \\ 1, & \text{se x for par} \end{cases}$

e) $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $p(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Função Inversa

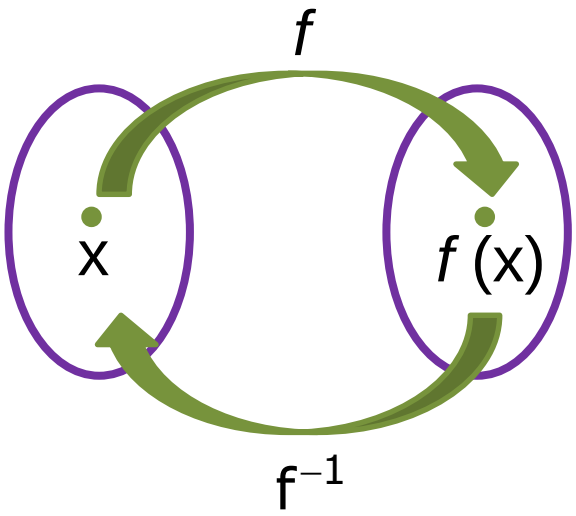
No dia-a-dia, o termo "*inverter*" tem a conotação de virar em sentido contrário. Em Matemática, o termo inverter descreve uma função que desfaz o efeito da outra.

Em um esquema de criptografia, um transmissor deseja que uma mensagem chegue com segurança a seu receptor. A criptografia é a transformação de um domínio de mensagem não cifradas para um domínio de mensagem criptografada aplicando uma **função bijetora**, de modo que se possa calcular sua inversa.

Função Inversa

Definição: Uma função $f : A \rightarrow B$ é inversível quando a relação inversa da f também é uma função. Neste caso, diz-se que a função inversa de f é

$$f^{-1} : B \rightarrow A$$

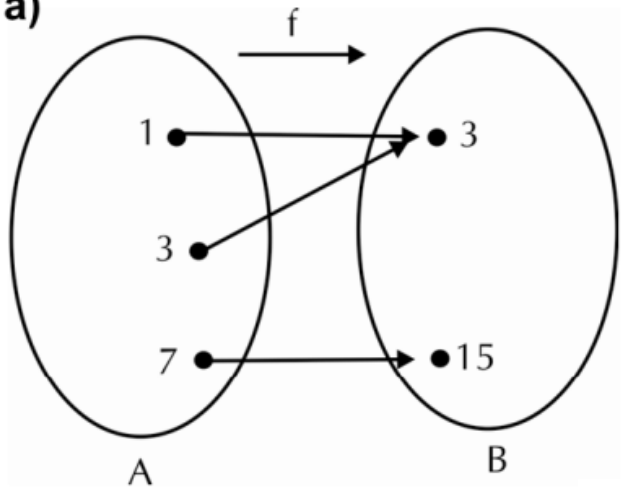


$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

Função Inversa

Exemplo: Verifique quais das funções é inversível.

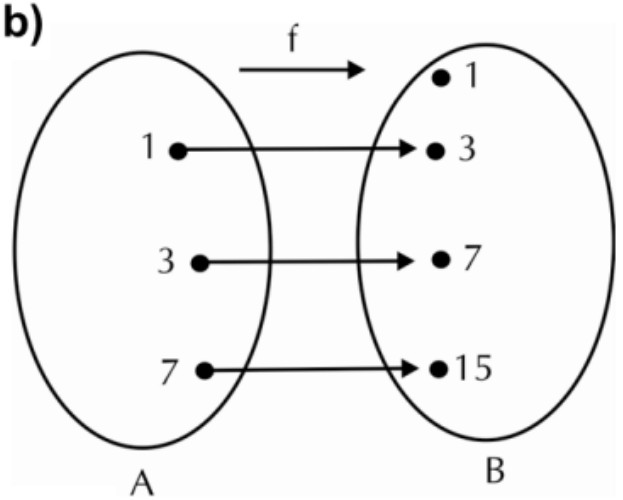
a)



Não é injetora.
É sobrejetora

Não é inversível

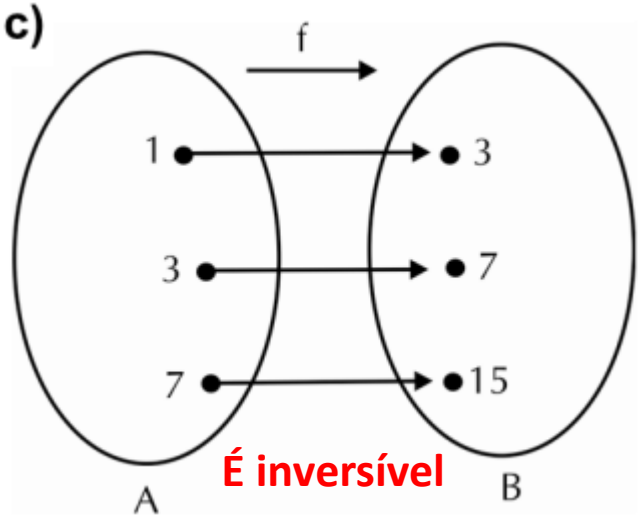
b)



É injetora.
Não é sobrejetora

Não é inversível

c)



É inversível

É injetora
É sobrejetora
∴ **É bijetora**

INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Função Inversa

Ciência da Computação

Observações:

- *f* tem inversa se, e somente se, *f* for uma função bijetora.
- Dom(f^{-1}) = Im(f).
- Im(f^{-1}) = Dom(f).
- As funções f: A → B e g: B → A são inversas uma da outra se, e somente se,

$$g(f(x)) = x \text{ para todo } x \text{ em } A$$
$$f(g(x)) = x \text{ para todo } x \text{ em } B.$$

INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Função Inversa

Ciência da Computação

Observações:

- Dada f: A → B, sabemos que y = f(x). Para encontrar, se existir, f^{-1}: B → A, devemos expressar x em função de y, obtendo assim x = f^{-1}(y).

- Frequentemente utilizamos a mesma variável independente para *f* e f^{-1}, isto é, *f* (x) e f^{-1}(x).

- O gráfico de uma função *f* e o da sua inversa f^{-1}, são simétricos em relação à reta y = x.

Exemplo: Determine, se existir, a inversa de f: IR→IR definida por y = 2x + 1. Esboce o gráfico de *f* e f^{-1} no mesmo sistema de coordenadas cartesianas.