

Lista de Exercícios – Funções

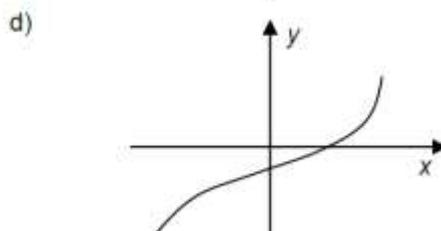
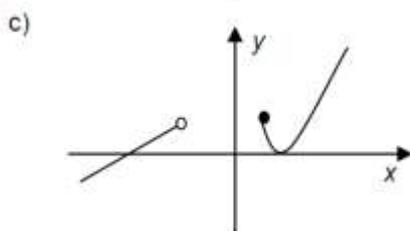
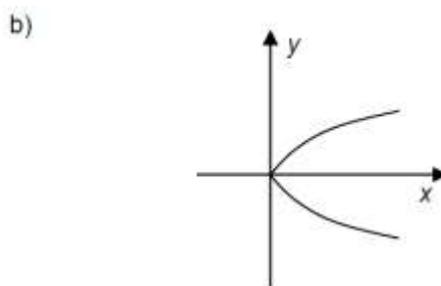
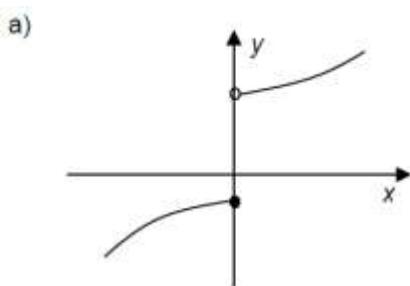
- 1) São dados $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 6, 8\}$ e uma correspondência entre A e B expressa por $y = 2^x$, com $x \in A$ e $y \in B$. Faça um diagrama e diga se essa correspondência é uma função de A em B. Em caso afirmativo, determine:

- a) $Dom(f)$ b) $Cd(f)$ c) $Im(f)$ d) $f(-1)$
 e) y , quando $x = 3$ f) x , quando $y = 1$ g) x , quando $f(x) = 4$ h) $f(x)$, quando $x = 1$

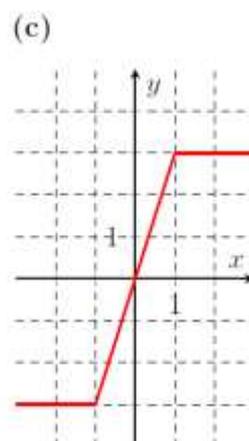
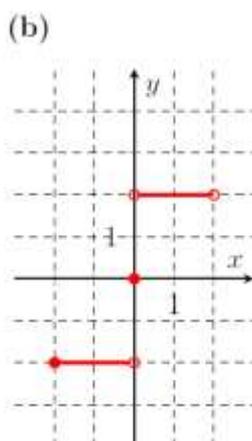
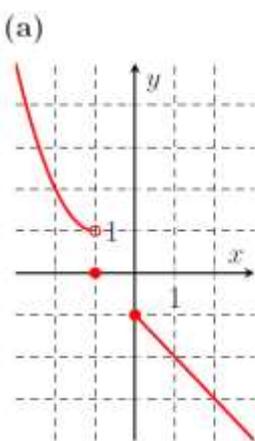
- 2) As representações abaixo não caracterizam uma função. Explique o motivo pelo qual isto acontece.

- a) $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{Z}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$

- 3) Os gráficos a seguir ilustram diversas relações binárias de \mathbb{R} em \mathbb{R} . Quais delas são funções?



- 4) Os gráficos abaixo representam funções. Determine o domínio e a imagem de cada uma delas.



- 5) Em cada um dos exemplos abaixo, escreva matematicamente a função representada pelo texto, conforme exemplo no item (a). Em todos os itens, utilize \mathbb{R} como contradomínio.

- (a) A função que a cada número real associa o seu quadrado.

Solução. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.

- (b) A função que a cada número inteiro associa o seu módulo mais 3.

- (c) A função que, a cada número real, adiciona 3 e, em seguida, eleva ao quadrado.

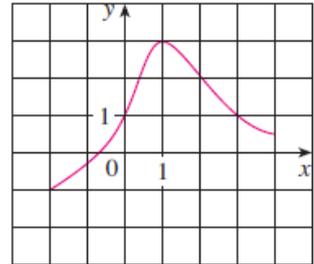
- (d) A função que, a cada número real não negativo, extrai a raiz quadrada, adiciona 8 e multiplica por $1/3$.

- 6) Exprimir como função de x :
- O perímetro de um triângulo equilátero de lado x .
 - A área da superfície de um cubo de aresta x .

- 7) Uma caixa sem tampa será feita com um pedaço retangular de papelão medindo 14 x 22 polegadas. Em cada canto, serão cortados quadrados iguais de lado x e, depois, as laterais serão levantadas. Exprese o volume V em função de x .

- 8) O gráfico de uma função f é dado ao lado:

- Diga o valor de $f(1)$.
- Estime o valor de $f(-1)$.
- Para quais valores de x é $f(x) = 1$?
- Estime a solução da equação $f(x) = 0$.
- Diga qual é o domínio e a imagem de f .
- Qual o valor máximo assumido pela função f ?



- 9) Seja a função $f(x) = 4x - 3$, calcular:

a) $f(-2)$ b) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

- 10) Seja a função $g(x) = 5x^2 - 4x$, calcular:

a) $g(-1)$ b) $g\left(\frac{1}{4}\right)$ c) $g(-3)$

- 11) Seja a função $f(x) = \begin{cases} 2x+5, & \text{se } x < -1 \\ x^2-1, & \text{se } |x| \leq 1 \\ 5x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$. Determinar $f(0)$, $f(\sqrt{2})$, $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ e $f(-1)$.

- 12) Seja f a função de \mathbb{Q} em \mathbb{Q} definida por $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x+1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, calcule:

a) $f(3)$ b) $f\left(-\frac{3}{7}\right)$ c) $f(\sqrt{2})$ d) $f(0,75)$ e) $f(\sqrt{4})$ f) $f(\sqrt{3}-1)$

- 13) Encontre o domínio das funções abaixo:

a) $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$

h) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+2}}{x-9}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{\sqrt{x+4}}$

f) $h(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$

i) $f(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{x^2-5x+4}$

c) $f(x) = \sqrt{1-3x}$

g) $m(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x \geq -3 \\ -2, & \text{se } x < 3 \end{cases}$

j) $f(x) = \sqrt[8]{7-x}$

d) $u(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+5}$

14) Sejam $S = \{0, 2, 4, 6\}$ e $T = \{1, 3, 5, 7\}$. Determine se cada um dos conjuntos de pares ordenados a seguir é uma função com domínio em S e contradomínio T . Se esse for o caso, a função é injetora? É sobrejetora? Para as bijeções, escreva a função inversa.

a) $\{(0, 1), (2, 3), (4, 5), (6, 7), (6, 1)\}$

b) $\{(6, 3), (2, 1), (0, 3), (4, 5)\}$

c) $\{(2, 3), (4, 7), (0, 1), (6, 5)\}$

d) $\{(2, 1), (6, 3), (4, 5)\}$

15) Verifique quais das relações a seguir são funções de x . Para as que forem função diga se são injetoras, sobrejetoras e/ou bijetoras.

a) $R : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid y = 2x$

d) $V : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \mid y = x$

b) $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid y = x/2$

e) $W : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \mid y^2 = x$

c) $W : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \mid y = x^2$

f) $U : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \mid y = |x|$

16) Dadas as funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 2x - 1$:

a) Determine o domínio e o conjunto imagem de $f(x)$;

b) Determine o domínio e o conjunto imagem de $g(x)$;

c) Calcule $f + g$, $f - g$, $g \cdot f$, f / g , $f \circ g$ e $g \circ f$;

d) Determine o domínio das funções calculadas no item (c).

17) Seja h definida por $h(x) = 2x - 7$. Calcule $h \circ h$, h^2 e $h + h$.

18) Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^3 + 1$. Determine:

a) $f(g(2))$

b) $g(f(4))$

c) $f(f(16))$

d) $g(g(0))$

19) Expresse as funções abaixo como $f \circ g$, conforme exemplo no item (a).

(a) $F(x) = (x - 9)^5$.

Solução. Defina $f(x) = x^5$ e $g(x) = x - 9$. Assim,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 9) = (x - 9)^5 = F(x),$$

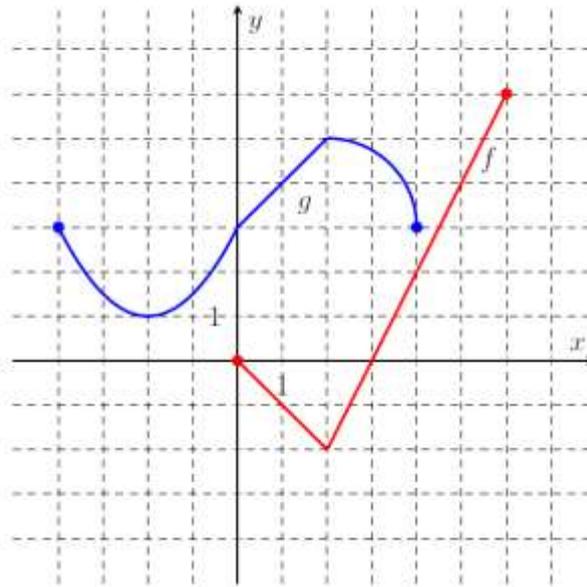
isto é, $F = f \circ g$.

(b) $F(x) = \sqrt{x + 1}$.

(c) $F(x) = |x^3 - x + 3|$.

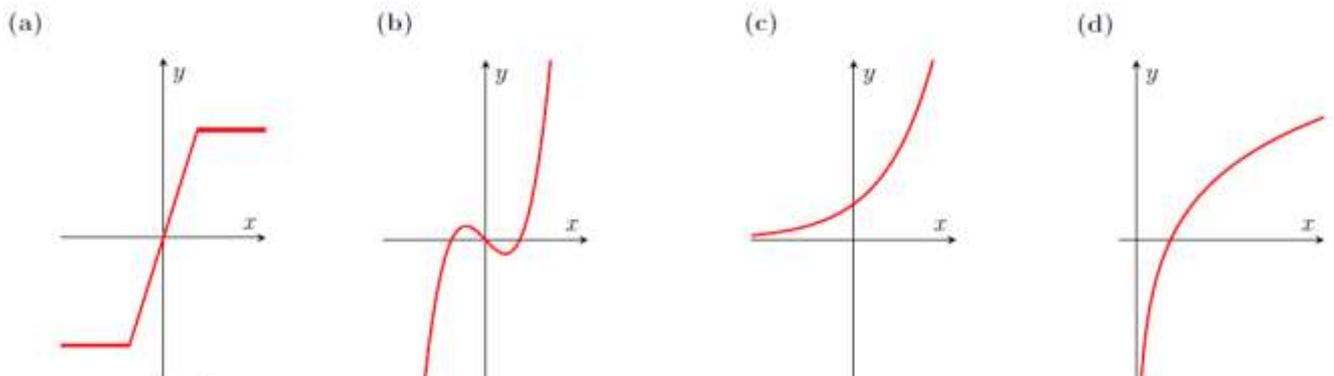
(d) $F(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$.

- 20) Considere as funções f e g cujos gráficos estão representados abaixo. Calcule o que se pede (se fizer sentido):



- (a) $f(g(2))$; (b) $g(f(0))$; (c) $g(f(4))$; (d) $f(g(0))$;
 (e) $g(g(-2))$; (f) $f(f(4))$; (g) $g(f(-1))$; (h) $g(f(6))$.

- 21) Diga quais das funções abaixo são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras, considerando \mathbb{R} como contradomínio para todas elas.



- 22) Verifique se cada função f abaixo é bijetora. Em caso afirmativo, determine f^{-1} . Caso f não seja bijetora, faça restrições no domínio e/ou contradomínio da função para que f se torne bijetora e determine a inversa de f nesta situação.

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow [-5, +\infty)$
 $f(x) = x^2 - 3$

b) $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = \sqrt{x}$

- 23) Encontre a lei de formação da função inversa das funções dadas a seguir:

a) $f(x) = 7x - 6$

b) $f(x) = 3x^3 - 5$

c) $f(x) = \sqrt[5]{4x+2}$

d) $f(x) = \frac{5}{x^2+1}, x \geq 0$

e) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

24) Mostre que a função $f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$ coincide com a sua inversa.

25) Suponha que f é uma função injetora.

a) Se $f(6) = 17$, o que é $f^{-1}(17)$?

b) Se $f^{-1}(3) = 2$, o que é $f(2)$?

26) Se $g(x) = 3 + x + e^x$, encontre $g^{-1}(4)$ e $g(g^{-1}(2))$?

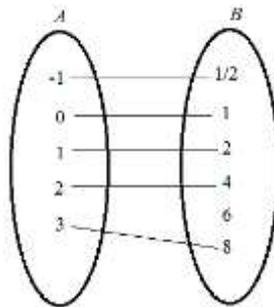
27) Suponha que você receba uma oferta para trabalhar por apenas um mês. Qual das seguintes formas de pagamento você prefere?

I) Um milhão de reais no fim do mês.

II) Um centavo de reais no primeiro dia do mês, dois centavos no segundo dia, quatro centavos no terceiro dia, e, em geral, 2^{n-1} centavos de reais no n -ésimo dia.

Respostas

1)



É uma função de A em B .

a) A b) B c) $\{1/2, 1, 2, 4, 8\}$ d) $f(-1) = 1/2$ e) 8 f) 0 g) 2 h) 2

2) a) Existem elementos no domínio que não estão associados a algum elemento do contradomínio.
b) O domínio não está bem definido.

3) a) É função. b) Não é função. c) Não é função. d) É função.

4) (a) $D(f) = (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$, $\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup 0 \cup (1, \infty)$.

(b) $D(f) = [-2, 2)$, $\text{Im}(f) = \{-2, 0, 2\}$.

(c) $D(f) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(f) = [-3, 3]$.

5) (b) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x| + 3$.

(c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x + 3)^2$.

(d) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\sqrt{x+8}}{3}$.

6) a) $P: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $P(x) = 3x$ b) $A: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $A(x) = 6x^2$

7) $V: (0, 7) \rightarrow \mathbb{R}$, $V(x) = 4x^3 - 72x^2 + 308x$

8) a) 3 b) -0,2 c) 0 e 3 d) -0,8 e) $[-2, 4]; [-1, 3]$ f) 3

- 9) a) -11 b) -1
-
- 10) a) 9 b) $-\frac{11}{16}$ c) 57
-
- 11) $f(0) = -1$, $f(\sqrt{2}) = 5\sqrt{2}$, $f\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\pi$ e $f(-1) = 0$.
-
- 12) a) 1 b) 1 c) $\sqrt{2} + 1$ d) 1 e) 1 f) $\sqrt{3}$
-
- 13) a) $\mathbb{R} - \{-1\}$ e) $[-1, +\infty) - \{1\}$ i) $[\frac{3}{2}, +\infty) - \{1, 4\}$
b) $(-4, +\infty) - \{-2, 2\}$ f) $[1, 3]$ j) $(-\infty, 7]$
c) $(-\infty, \frac{1}{3}]$ g) \mathbb{R}
d) $\mathbb{R} - \{0, -5\}$ h) $\mathbb{R} - \{9\}$
-
- 14) a) Não é função.
b) É função.
c) É função bijetora. A inversa é $\{(3,2), (7,4), (1,0), (5,6)\}$.
d) Não é função.
-
- 15) a) injetora
b) não é função
c) é função
d) injetora, sobrejetora e bijetora
e) não é função de x
f) sobrejetora
-
- 16) a) $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [-1, +\infty)$ b) $Dom(f) = Im(f) = \mathbb{R}$
c) $x^2 + 2x - 2$; $x^2 - 2x$; $2x^3 - x^2 - 2x + 1$; $(x^2 - 1)/(2x - 1)$; $4x^2 - 4x$; $2x^2 - 3$
d) $Dom(f + g) = Dom(f - g) = Dom(g \cdot f) = Dom(f \circ g) = Dom(g \circ f) = \mathbb{R}$; $Dom(f / g) = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$
-
- 17) $4x - 21$; $4x^2 - 28x + 49$; $4x - 14$
-
- 18) a) 3 b) 9 c) 2 d) 2
-
- 19) (b) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x + 1$
(c) $f(x) = |x|$ e $g(x) = x^3 - x + 3$
(d) $f(x) = \sqrt{1+x}$ e $g(x) = \sqrt{x}$.
-
- 20) (a) $f(g(2)) = 4$; (b) 3 (c) $g(f(4)) = 5$; (d) $f(g(0)) = 0$;
(e) 4 (f) $f(f(4)) = -2$; (g) Não existe. (h) Não existe.
-
- 21) (a) Nada.
(b) Sobrejetora.
(c) Injetora.
(d) Injetora, sobrejetora e, portanto, bijetora.
-
- 22) a) f não é bijetora; $Dom(f) = [0, +\infty)$, $Cd(f) = [-3, +\infty)$; $f^{-1}: [-3, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}$
b) f não é bijetora; $Cd(f) = [0, +\infty)$; $f^{-1}: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f^{-1}(x) = x^2$
-
- 23) a) $f^{-1}(x) = \frac{x+6}{7}$ b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+5}{3}}$ c) $f^{-1}(x) = \frac{x^5 - 2}{4}$
d) $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{5}{x} - 1}$, $0 < x \leq 5$ e) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$
-
- 25) a) 6 b) 3
-
- 26) $g^{-1}(4) = 0$; $g(g^{-1}(2)) = 2$
-
- 27) Opção II. Pois no final de 30 dias, o valor será R\$5.368.709,12.