Espaços Vetoriais

Neste item iremos estender o conceito de vetor extraindo as propriedades mais importantes dos vetores usuais e transformando-as em axiomas. Assim, quando um conjunto de objetos satisfizer estes axiomas, estes objetos automaticamente têm as mais importantes propriedades dos vetores usuais, o que torna razoável considerar estes novos objetos como novos tipos de vetores.

Espaços Vetoriais

Sabe-se que o conjunto: $R^2 = \{(x, y)/x, y \in R\}$ é interpretado geometricamente como sendo o plano cartesiano. Um par (x,y) pode ser expresso como um ponto e, neste caso, x e y são as coordenadas deste ponto, ou pode ser expresso como um vetor e, neste caso, x e y são as componentes (ou coordenadas) deste vetor.

Espaços Vetoriais

Esta mesma ideia, em relação ao plano, estende-se para o espaço tridimensional que é a interpretação geométrica do conjunto R^3. Embora se perca a visão geométrica com dimensão acima de 3, é possível estender esta idéia a espaços como $R^4, R^5, \ldots, R^n$. Assim, quádruplas de números (x_1, x_2, x_3, x_4) podem ser vistas como pontos ou vetores no espaço R^4, de quarta dimensão.

Espaços Vetoriais

A quíntupla (2,-1,3,5,4) será interpretada como um ponto ou um vetor no espaço R^5, de dimensão cinco. Portanto, o espaço de dimensão *n* (ou espaço n-dimensional) será constituído pelo conjunto de todas as n-úplas ordenadas e representado por R^n, isto é:

$$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in R\}$$

Espaços Vetoriais

A maneira de se trabalhar nestes espaços, de dimensão superior a três, é idêntica àquela vista em R^2 e em R^3. Por exemplo, se: $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ são vetores no R^n e α um escalar, define-se:

Espaços Vetoriais

a) **Igualdade:** $u = v$ se, e somente se, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \dots$, $x_n = y_n$

b) **Adição:** $u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

c) **Multiplicação por um Escalar:** $\alpha u = (\alpha x_1,\ \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

d) **Produto Escalar:** $u.v = (x_1.y_1 + x_2.y_2 + \dots, + x_n.y_n)$

e) **Módulo:** $|u| = \sqrt{u.u} = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}$

Espaços Vetoriais

Definição: (*Definição de Espaço Vetorial*) Seja um conjunto **V** não vazio qualquer de objetos, no qual estão definidas as operações de adição e multiplicação por um escalar, isto é:

$$\text{i) } \forall\, u \text{ e } v \in V;\ u + v \in V;$$

$$\text{ii) } \forall\, \alpha \in R,\ \forall\, u \in V;\ \alpha u \in V$$

Espaços Vetoriais

O conjunto **V** com essas duas operações é chamado ***ESPAÇO VETORIAL REAL*** e seus objetos são denominados vetores, se forem verificados os seguintes axiomas:

A) Em relação à adição:

$A_1)\ (u + v) + w = u + (v + w)\ \ \forall\ u, v \text{ e } w \in V$	Associativa
$A_2)\ u + v = v + u\ \ \forall\ u, v \in V$	Comutativa
$A_3)\ \exists\ 0 \in V;\ \forall\ u \in V\ \ u + 0 = u$	Existência do elemento neutro na adição
$A_4)\ \forall\ u \in V\ \ \exists\ -u \in V;\ \ u + (-u) = 0$	Existência do elemento inverso

Espaços Vetoriais

M) Em relação à multiplicação por escalar:

$M_1)$ $a(u+v) = au + av$	distribuição da multiplicação em relação a adição
$M_2)$ $(a+b)v = av + bv$	distribuição da adição em relação a multiplicação
$M_3)$ $(a.b).v = a(b.v)$,	associativa
$M_4)$ $1.v = v$, $v \in V$	elemento neutro da multiplicação

para $\forall\, u, v \in V$ e $\forall\, a, b \in R$

Espaços Vetoriais

Observações:

(i) Os elementos do espaço vetorial **V** são chamados vetores, independente de sua natureza. Pode parecer estranho, e à primeira vista não deixa de ser, o fato de se chamar de vetores os *polinômios* (quando V for constituído de polinômios), as *matrizes* (quando V for constituído de matrizes), os *números* (quando V for um conjunto numérico), e assim por diante.

Espaços Vetoriais

A justificativa está no fato de as operações de *adição* e *multiplicação por escalar* realizadas com estes elementos de natureza tão *distinta* se comportarem de *forma idêntica*, como se estivéssemos trabalhando com os próprios *vetores em R^2 e R^3*. Assim a familiaridade que temos com os vetores do R^2 e R^3 terá *continuidade nestes conjuntos*, *chamando seus elementos também de vetores*.

Espaços Vetoriais

(ii) Se na definição anterior tivéssemos tomado para escalares o conjunto **C** dos números *complexos*, **V** seria um *espaço vetorial complexo*. Daqui por diante, serão considerados somente espaços vetoriais reais.

Espaços Vetoriais

Exemplos de Espaços Vetoriais:

Os seguintes exemplos ilustram a variedade de espaços vetoriais possíveis. Em cada exemplo, nós vamos especificar um conjunto não vazio **V** e duas operações: a *adição e a multiplicação por um escalar*; em seguida vamos *verificar que os 8 axiomas de espaço vetorial* estão satisfeitos, com isto habilitando **V**, com as operações dadas, a ser chamado de **espaço vetorial**.

Espaços Vetoriais

Exemplos de Espaços Vetoriais:

✓ O conjunto dos números reais em relação às operações usuais de adição e multiplicação por um escalar é um espaço vetorial.

✓Os conjuntos $R^2, R^3, R^4, R^5, \dots, R^n$, com as operações usuais de adição e multiplicação por um escalar é um espaço vetorial.

Espaços Vetoriais

Exemplos de Espaços Vetoriais:

✓ Conjunto M(m,n) das matrizes m x n com as operações de adição e multiplicação por um escalar é um espaço vetorial

✓ O conjunto $P_n = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,\ a_i \in R\}$ dos polinômios com coeficientes reais de grau ≤ n, mais o polinômio nulo, em relação às operações usuais de adição de polinômios e multiplicação por um escalar é um espaço vetorial.

Espaços Vetoriais

Exemplos:

1) Verifique se o conjunto $V = \{(x,y) / \; x,y \; \in R\}$ é um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por um escalar usuais.

2) Verifique se o conjunto $V = \{(x, x+3) / \; x \; \in R\}$ é um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por um escalar usuais.

Subespaços Vetoriais

Definição: Um *subconjunto* **S** de um *espaço vetorial* **V** é chamado um subespaço vetorial de **V** se **S** é um espaço vetorial em relação às operações de adição e multiplicação por um escalar definidas em **V**.

Subespaços Vetoriais

Em geral, nós devemos verificar os oito axiomas do espaço vetorial para mostrar que um conjunto **S** forma um espaço vetorial com uma adição e uma multiplicação por um escalar. No entanto, se **S** é parte de um conjunto maior **V** que já é sabido ser um espaço vetorial, então alguns axiomas não precisam ser conferidos para **S**, pois eles são "herdados" de **V**.

Subespaços Vetoriais

Por exemplo: Não há necessidade de conferir que u + v = v + u (Axioma A2) para **S**, pois se isto vale para todos os vetores de **V** que valem também para todos os vetores de **S**. Outros axiomas herdados por **S** de **V** são o A_1, M_1, M_2, M_3 e M_4. Assim, para mostrar que um conjunto **S** é um **subespaço vetorial** de **V**, nós somente precisamos *verificar os dois axiomas principais* (i) e (ii) apresentados no teorema descrito a seguir e *os axiomas* A_3 (elemento neutro) e A_4 (elemento inverso).

Subespaços Vetoriais

Teorema :

Um subconjunto **S**, não-vazio, de um espaço vetorial **V**, é um subespaço de **V** se estiverem satisfeitas as condições:

(i) Para quaisquer u, v $\in$ **S**, tem-se: u + v $\in$ **S**

(ii) Para quaisquer a $\in$ R, u $\in$ **S**, tem-se: a.u $\in$ **S**

Subespaços Vetoriais

Sendo estas *duas condições* válidas em **S**, os oito axiomas do espaço vetorial também *se verificam em* **S**, ou seja, considere u e v vetores quaisquer de **S** observe que A_1, A_2, M_1, M_2, M_3, M_4, *são verificados* em **S** pelo fato de **S** ser um *subconjunto não vazio* de **V**.

Subespaços Vetoriais

A partir do ***teorema*** também é possível verificar os axiomas A_3 e A_4. Observe que se a condição (ii), $a.u \in$ **S**, é *válida para todo* $a \in R$, fazendo $a = 0$, temos que $0.u \in$ **S** , ou seja $0 \in$ **S**, (axioma A_3); fazendo $a = -1$, segue $(-1).u = -u \in$ **S** (axioma A_4).

Subespaços Vetoriais

Observações:

Todo espaço vetorial de **V** admite *pelo menos dois subespaços*: o conjunto {0}, chamado de *subespaço zero* ou *subespaço nulo*, e o *próprio espaço vetorial* **V**. Estes dois são os *subespaços triviais* de **V**. Os *demais subespaços* são denominados subespaços próprios de **V**.

Subespaços Vetoriais

Por exemplo:

Os *subespaços triviais de R^3* são {(0, 0, 0)} e o próprio R^3. Os *subespaços próprios de R^3* são as retas e os planos que passam pela origem.

Para $V = R^2$, os *subespaços triviais* são: {(0, 0)} e R^2, enquanto os *subespaços próprios* são as retas que passam pela origem.

Subespaços Vetoriais

Exemplo:

Verificar se **S** é um subespaço vetorial de **V**:

a) $V = R^2 \;\; e \;\; S = \{(x, y) \in R^2 / y = 2x\}$

b) $V = R^2 \;\; e \;\; S = \{(x, 4 - 2x); x \in R\}$

c) $V = R^2 \;\; e \;\; S = \{(x, |x|); x \in R\}$

Combinação Linear

Uma das características mais importantes de um espaço vetorial V é a obtenção de outros vetores a partir de vetores dados.

Combinação Linear

Definição: Sejam os vetores $v_1, v_2, \dots , v_n$ do espaço vetorial V e os escalares $a_1, a_2, \dots , a_n$. Então, qualquer vetor $v \in V$ da forma

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

é uma *combinação linear* dos vetores $v_1, v_2, \dots , v_n$.

Combinação Linear

Exemplo: Para as seguintes situações, consideremos, no R^3, os seguintes vetores: $v_1 = (1,-3,2)$ e $v_2 = (2,4,-1)$.

a) Escrever o vetor $v = (-4,-18,7)$ como combinação linear de v_1 e v_2.
b) Mostrar que o vetor $v = (4,3,-6)$ não é combinação linear dos vetores v_1 e v_2.
c) Determinar o valor de k para que o vetor $u = (-1,k,-7)$ seja combinação linear de v_1 e v_2.