INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

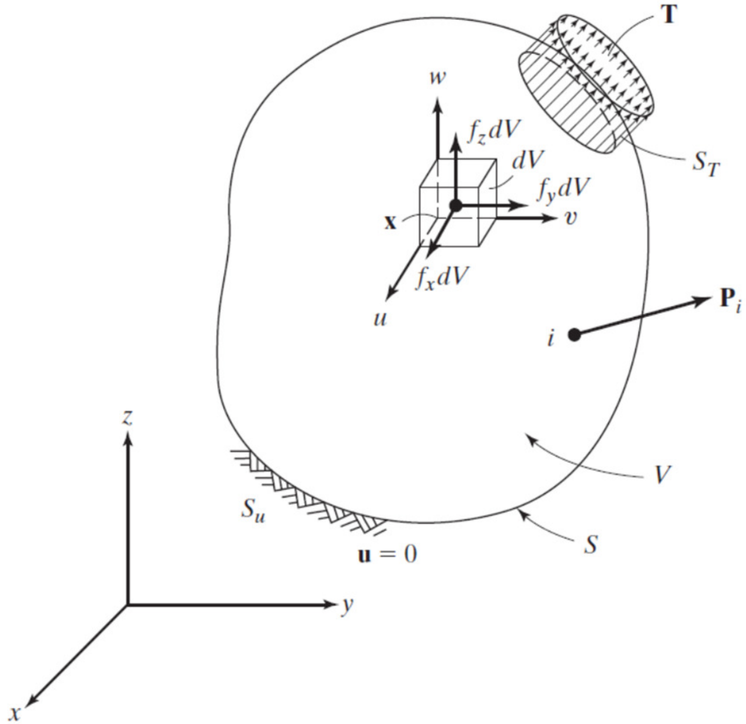
EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

Introdução ao MEF

02 – Fundamentos

TENSÕES E EQUILÍBRIO

- Um corpo tridimensional ocupa um volume V e tem uma superfície S;
- Os pontos no corpo estão localizados pelas coordenadas x, y, z;
- O limite é restringido em alguma região, onde o deslocamento é especificado;
- É aplicada uma força distribuída por unidade de área T e o corpo se deforma;
- A deformação de um ponto x, y, z é dada pelas três componentes do seu deslocamento (u,v,w).



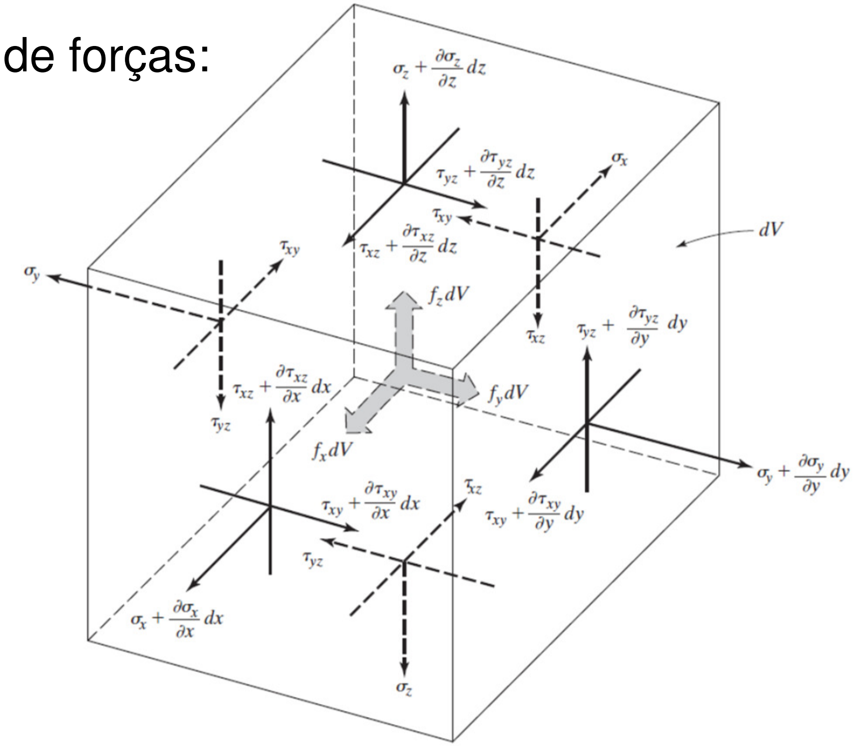
TENSÕES E EQUILÍBRIO

- As tensões que atuam no volume elementar dV são:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]^{\mathrm{T}}$$

- As forças nas faces são obtidas multiplicando as tensões pelas áreas correspondentes;

- Equações de equilíbrio de forças:

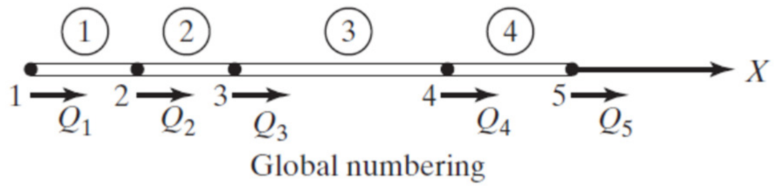


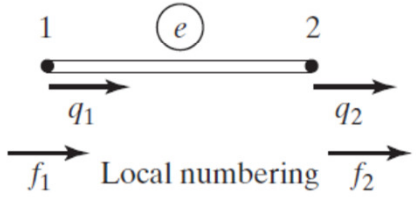
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0$$

ESQUEMA DE NUMERAÇÃO





Elements	Nodes		
e	1	2	Local numbers
1	1	2	Global numbers
2	2	3	
3	3	4	
4	4	5	

MÉTODOS DE SOLUÇÃO

- Na mecânica dos sólidos, nosso problema é determinar o deslocamento u do corpo;
- As tensões estão relacionadas às deformações, que por sua vez estão relacionadas aos deslocamentos.
- A solução é geralmente exata para geometrias e condições de carregamento simples;
- Para problemas de geometrias complexas e condições gerais de contorno e carregamento, obter tais soluções é uma tarefa quase impossível;
- Os métodos de solução aproximada geralmente empregam energia potencial ou métodos variacionais, que impõem condições menos rigorosas às funções.

Vídeo: Entendendo o Método dos Elementos Finitos
https://www.youtube.com/watch?v=GHjopp47vvQ&t=907s

ENERGIA POTENCIAL - Π

A energia potencial total Π de um corpo elástico é definida como a soma da energia de deformação total (U) e a energia potencial das forças externas (WP):

$$\Pi = \underset{(U)}{\text{Strain energy}} + \underset{(\text{WP})}{\text{Work potential}}$$

Para materiais elásticos lineares, a energia de deformação (U) por unidade de volume é:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\epsilon}\, dV$$

A energia potencial das forças externas (WP) é dada por:

$$\text{WP} = -\int_V \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\, dV - \int_S \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\, dS - \sum_i \mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_i$$

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

A energia potencial total para um corpo elástico é:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\epsilon}\, dV - \int_V \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\, dV - \int_S \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\, dS - \sum_i \mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_i$$

PRINCÍPIO DA ENERGIA POTENCIAL MÍNIMA

Para sistemas conservativos, de todos os campos de deslocamento cinematicamente admissíveis, aqueles correspondentes ao equilíbrio tornam a energia potencial total um extremo. Se a condição extrema for mínima, o estado de equilíbrio é estável.

Em MEF:

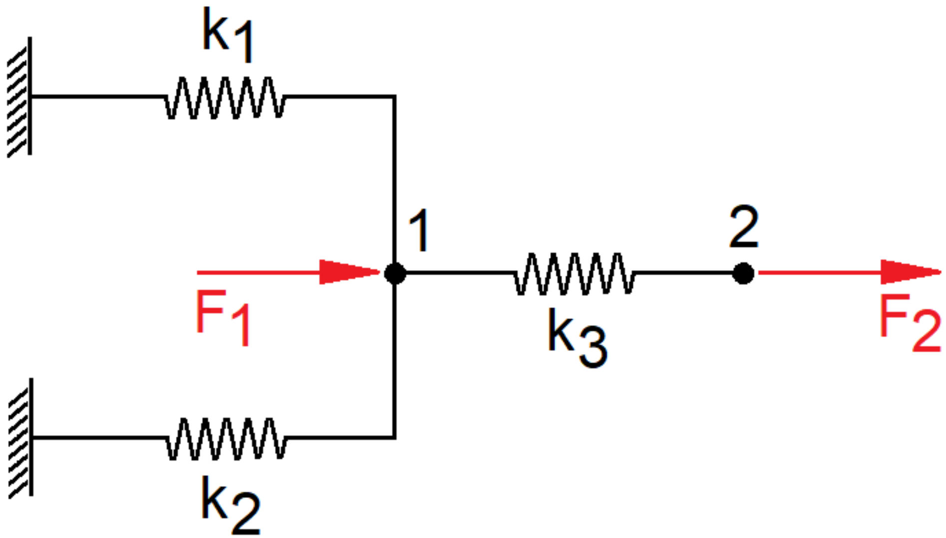
$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0$; $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2} > 0$: Equilíbrio - Mínima energia Potencial

a ↳ deslocamentos nodais

INSTITUTO FEDERAL Sul-rio-grandense Câmpus Passo Fundo

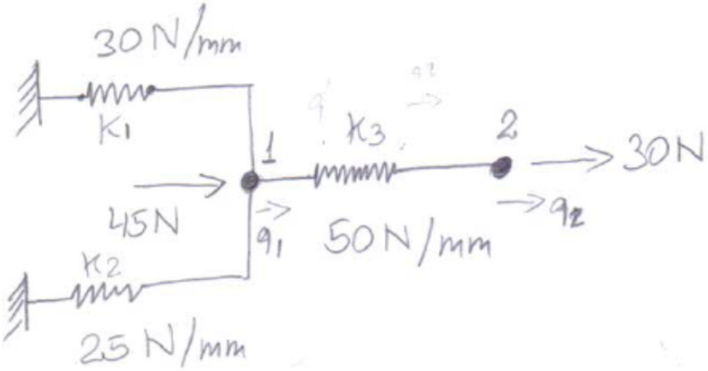
<u>Exemplo 01</u> – Aplicando o método da Energia Potencial Mínima, determine os valores dos deslocamentos dos nós 1 e 2 (q1 e q2) do sistema estrutural de molas abaixo.

<u>Dados:</u>
k1= 30 N/mm;
k2= 25 N/mm;
k3= 50 N/mm;
F1= 45 N;
F2= 30 N.



INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

EX 01



$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2} k_1 \delta_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \delta_2^2 + \frac{1}{2} k_3 \delta_3^2}_{U} - \underbrace{F_1 q_1 - F_2 q_2}_{W}$$

$\delta_1 = q_1$

$\delta_2 = q_1$

$\delta_3 = q_2 - q_1$

EX 01

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + \frac{1}{2} k_2 q_1^2 + \frac{1}{2} k_3 (q_2 - q_1)^2 - F_1 q_1 - F_2 q_2$$

Equilibrio : $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$; $\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = k_1 q_1 + k_2 q_1 + k_3 (q_2 - q_1)(-1) - F_1 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = k_3 (q_2 - q_1) - F_2 = 0$$

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus Passo Fundo

EX 01

$$q_1\left[K_1+K_2+K_3\right]+q_2\left[-K_3\right]=F_1$$

$$q_1\left[-K_3\right]+q_2\left[K_3\right]=F_2$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} K_1+K_2+K_3 & -K_3 \\ -K_3 & K_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

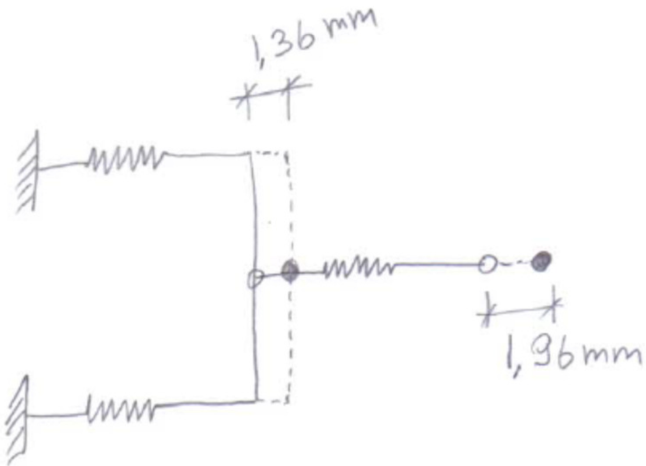
$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} (30+25+50) & -50 \\ -50 & 50 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 45 \\ 30 \end{Bmatrix}$$

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

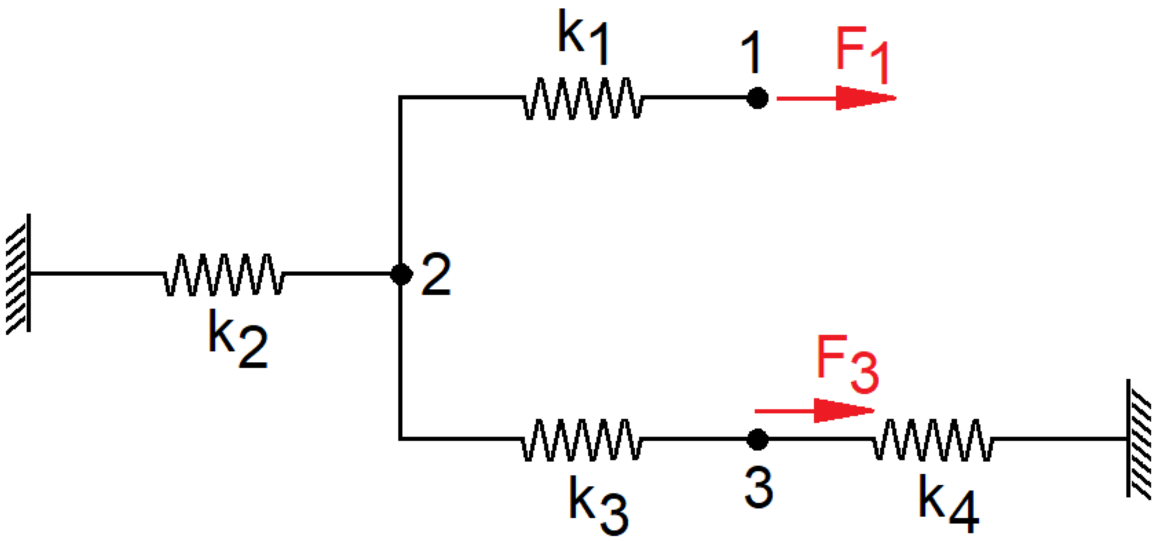
EX 01

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}01818182 & 0{,}01818182 \\ 0{,}01818182 & 0{,}03818182 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 45 \\ 30 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}364 \\ 1{,}964 \end{Bmatrix} \text{mm}$$



EXERCÍCIO PROPOSTO 01 – Aplicando o método da Energia Potencial Mínima, determine os valores dos deslocamentos dos nós 1, 2 e 3 (q1, q2 e q3) do sistema estrutural de molas abaixo.
[1,0 ponto]

Dados:
k1= (20 + #) N/mm;
k2= (30 - #) N/mm;
k3= (10 + #) N/mm;
k4= (15 + #) N/mm;
F1= (60 + #) N;
F3= (80 + #) N.



#	Matrícula	Nome
1	20211PF.ECV0023	Carlos Eduardo Argenta Bordin
2	20211PF.ECV0006	Eduardo Vidal
3	20211PF.ECV0007	Gabriela Santos de Almeida
4	20211PF.ECV0015	Luciana Lombardi Barnekow
5	20211PF.ECV0003	Tainara dos Santos Ribeiro
6	20211PF.ECV0002	Victor Berton dal Olmo

MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

Para meios contínuos, o método da energia potencial total Π pode ser usado para encontrar uma solução aproximada. O método Rayleigh-Ritz envolve a construção de um campo de deslocamento assumido, por exemplo,

$$\begin{aligned}
u &= \sum a_i \phi_i(x, y, z) && i = 1 \text{ to } \ell \\
v &= \sum a_j \phi_j(x, y, z) && j = \ell + 1 \text{ to } m \\
w &= \sum a_k \phi_k(x, y, z) && k = m + 1 \text{ to } n \\
& && n > m > \ell
\end{aligned}$$

As funções Φi são geralmente consideradas polinômios. Por exemplo:

$u = a_1 + a_2x + a_3x^2$

Os deslocamentos u, v, w devem ser cinematicamente admissíveis. Ou seja, u, v, w devem satisfazer condições de contorno específicas.

MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

Depois de introduzir as relações tensão-deformação e deformação-deslocamento e substituir o deslocamento aproximado u em Π, temos:

$$\Pi = \Pi(a_1, a_2, \ldots, a_r)$$

Aplicando o princípio da energia potencial mínima:

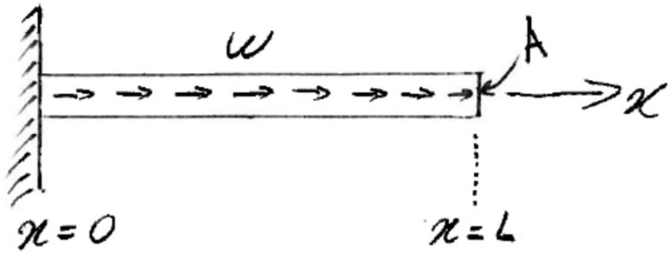
$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

Exemplo 02 - A barra está submetida a uma força distribuída constante ω, conforme mostra a figura.

(a) Use o método Rayleigh-Ritz com um campo de deslocamento $u = a_0 + a_1x + a_2x^2$ para determinar as expressões do deslocamento u e da tensão máxima;

(b) Compare os resultados obtidos com o valor analítico exato.



– Energia potencial (Π)

Força aplicada

Deslocamento

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^L EA\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx}_{U = \text{Energia}} - \underbrace{\int_0^L (\omega.x).\,u\,dx}_{W = \text{Trabalho}} \qquad (1)$$

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \qquad (2)$$

- Condições de contorno

$$u|_{x=0} = 0$$

$$u = a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$u = a_1 x + a_2 x^2 \quad (3)$$

$$\frac{du}{dx} = a_1 + 2a_2 x \quad (4)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} EA \int_0^L (a_1 + 2a_2 x)^2 dx - \int_0^L wx(a_1 x + a_2 x^2)\, dx$$

$$\Pi = \frac{1}{2} EA \int_0^L (a_1^2 + 2.a_1.2a_2 x + 4a_2^2 x^2) dx - \int_0^L (wa_1 x^2 + w a_2 x^3)\, dx$$

$$\Pi = \frac{1}{2} EA \left(a_1^2 L + \frac{4a_1 a_2 L^2}{2} + \frac{4a_2^2 L^3}{3}\right) - \left(\frac{wa_1 L^3}{3} + \frac{wa_2 L^4}{4}\right)$$

$$\Pi = \frac{a_1^2.L.EA}{2} + a_1.a_2 L^2.EA + \frac{2.a_2^2 L^3 EA}{3} - \frac{wa_1 L^3}{3} - \frac{wa_2 L^4}{4}$$

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

- Princípio da Mínima Energia Potencial

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 \qquad a_1 L . EA + a_2 L^2 . EA - \frac{wL^3}{3} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0 \qquad a_1 L^2 . EA + \frac{4 a_2 L^3 EA}{3} - \frac{w . L^4}{4} = 0$$

$$a_1 = \left(\frac{wL^3}{3} - a_2 L^2 AE\right) / LAE \quad ; a_1 = \left(\frac{wL^4}{4} - \frac{4 a_2 L^3 EA}{3}\right) / L^2 EA$$

$$\frac{\left(\frac{wL^3}{3} - a_2 L^2 AE\right)}{LAE} = \frac{\left(\frac{wL^4}{4} - \frac{4 a_2 L^3 EA}{3}\right)}{L^2 EA}$$

$$\frac{wL^3}{3LAE} - \frac{a_2 L^2 AE}{LAE} = \frac{wL^4}{4L^2 EA} - \frac{4 a_2 L^3 EA}{3L^2 EA}$$

$$\frac{wL^2}{3AE} - a_2 L = \frac{wL^2}{4AE} - \frac{4 a_2 L}{3}$$

$$-a_2L + \frac{4a_2L}{3} = \frac{wL^2}{4AE} - \frac{wL^2}{3AE}$$

$$\frac{-3a_2L + 4a_2L}{3} = \frac{3wL^2 - 4wL^2}{12AE}$$

$$\frac{a_2L}{3} = \frac{-wL^2}{12AE}$$

$$\boxed{a_2 = -\frac{wL}{4AE}}$$

$$a_1 = \left[\frac{wL^3}{3} - \left(\frac{-wL}{4AE}\right)L^2 . AE\right] \Big/ LAE$$

$$a_1 = \frac{wL^3}{3LAE} + \frac{wL^3AE}{4AE . AE . L}$$

$$a_1 = \frac{wL^2}{3AE} + \frac{wL^2}{4AE}$$

$$a_1 = \frac{4wL^2 + 3wL^2}{12AE} \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{7wL^2}{12AE}}$$

Pelo método Rayleigh-Ritz:

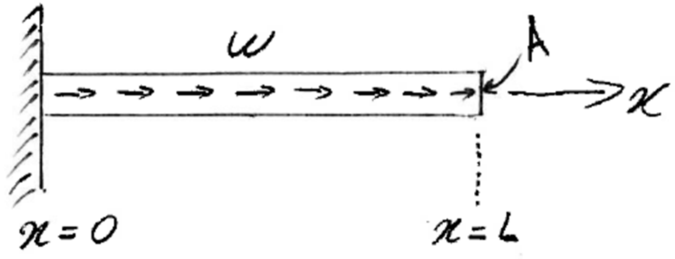
$$\boxed{u = \frac{7wL^2}{12AE} \cdot x - \frac{wLx^2}{4AE}} \qquad \boxed{u_{x=L} = \frac{wL^3}{3EA}}$$

$$\sigma = \frac{du}{dx} \cdot E$$

$$\boxed{\sigma = \frac{7wL^2}{12A} - \frac{wLx}{2A}} \qquad \boxed{\sigma_{x=0} = \frac{7wL^2}{12A}}$$

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

Pelo método analítico (solução exata):



- Para A constante:

$$EA\frac{d^2u}{dx^2} + wx = 0$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{wx}{EA}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{wx^2}{2EA} + C_1$$

$$u = -\frac{wx^3}{6EA} + C_1 x + C_2 \quad (1)$$

- Condições de contorno:

$x = 0 \Rightarrow u = 0 \quad (2)$

$x = L \Rightarrow \sigma = 0 \quad (3)$

- Substituindo (2) em (1):

$$\boxed{C_2 = 0}$$

$$\sigma = \frac{du}{dx} \cdot E \quad (\sigma = \varepsilon . E)$$

$$\sigma = -\frac{wx^2}{2EA} + C_1 \quad (4)$$

Pelo método analítico (solução exata):

- Substituindo 3 em 4

$$0 = -\frac{wx^2}{2EA} + C_1$$

$$C_1 = \frac{wx^2}{2EA} \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{wL^2}{2EA}}$$

$$\boxed{u = -\frac{wx^3}{6EA} + \frac{wL^2}{2EA}.x} \quad \boxed{u_{x=L} = \frac{wL^3}{3EA}}$$

$$\sigma = \frac{du}{dx}.E$$

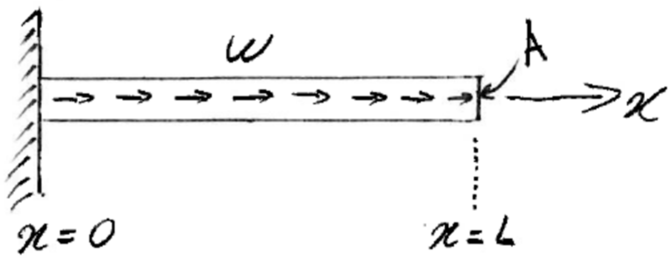
$$\sigma = \left(-\frac{3wx^2}{6EA} + \frac{wL^2}{2EA}\right).E$$

$$\boxed{\sigma = -\frac{wx^2}{2A} + \frac{wL^2}{2A}} \quad \boxed{\sigma_{x=0} = \frac{wL^2}{2A}}$$

INSTITUTO FEDERAL Sul-rio-grandense Câmpus Passo Fundo

<u>EXERCÍCIO PROPOSTO 02</u> – Aplicando o método Rayleigh-Ritz com um campo de deslocamento $u = a_0 + a_1x + a_2x^2$, determinar o valor do deslocamento máximo (u) e da tensão máxima. Compare seus resultados com o valor analítico a partir dos dados abaixo.
[1,0 ponto]

<u>Dados:</u>
ω = (4 + 1#) N/mm;
L = (500 - 10#) mm;
E = 200 GPa;
$A = 800\ mm^2$;



#	Matrícula	Nome
1	20211PF.ECV0023	Carlos Eduardo Argenta Bordin
2	20211PF.ECV0006	Eduardo Vidal
3	20211PF.ECV0007	Gabriela Santos de Almeida
4	20211PF.ECV0015	Luciana Lombardi Barnekow
5	20211PF.ECV0003	Tainara dos Santos Ribeiro
6	20211PF.ECV0002	Victor Berton dal Olmo

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

MUITO OBRIGADO

Prof. Rodrigo Bordignon
Engenheiro Civil, Dr.

www.ifsul.edu.br
rodrigobordignon@ifsul.edu.br