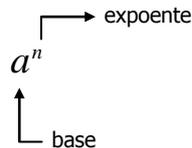


POTENCIAÇÃO [ou Exponenciação]**# Potência com Expoente Natural:**

Definição: Dado um número inteiro positivo " n ", a expressão a^n é dita potência do número real " a " e representa a multiplicação do número real em questão " n " vezes.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Sendo que:



A potenciação é uma multiplicação de fatores iguais!

Veja alguns exemplos:

a) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

b) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

c) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

d) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

e) $-2^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -(16) = -16$

Fique esperto!

-2^4 é o mesmo que $-(2^4)$

Particularidades:

• $14^1 = 14$

• $(-7)^1 = -7$

• $1^1 = 1$

• $(\sqrt{5})^1 = \sqrt{5}$

• $\left(\frac{7}{13}\right)^1 = \frac{7}{13}$

• $0^1 = 0$

∴

$a^1 = a$

♦ $14^0 = 1$

♦ $(-3)^0 = 1$

♦ $1^0 = 1$

♦ $(\sqrt{31})^0 = 1$

♦ $\left(\frac{7}{13}\right)^0 = 1$

♦ $0^0 \rightarrow$ indeterminação!

∴

$a^0 = 1$ com $a \neq 0$

Fique esperto!

$-14^0 = -(14^0) = -(1) = -1$

Para refletir:

A receita para a ignorância perpétua é permanecer satisfeito com suas opiniões e contente com seus conhecimentos. [Elbert Hubbard]

Potência com Expoente Inteiro [Negativo]:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \quad \text{para } a \neq 0. \quad \text{Em particular, quando a base é fracionária: } \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Veja alguns exemplos:

$$\text{a) } \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{25}{16}$$

$$\text{b) } 7^{-4} = \left(\frac{1}{7}\right)^4 = \left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1^4}{7^4} = \frac{1}{7^4} = \frac{1}{2401}$$

$$\text{c) } 14^{-1} = \left(\frac{1}{14}\right)^1 = \frac{1}{14}$$

$$\text{d) } (-3)^{-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^1 = -\frac{1}{3}$$

$$\text{e) } (-2)^{-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{f) } -2^{-2} = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$$

$$\text{g) } \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} = \left(\frac{6}{1}\right)^1 = 6$$

$$\text{h) } \left(-\frac{1}{7}\right)^{-3} = \left(-\frac{7}{1}\right)^3 = (-7)^3 = -343$$

$$\text{i) } \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}$$

$$\text{j) } \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

Atenção!

$$\text{k) } \frac{3^{-1}}{4} = \frac{(3^{-1})}{4} = \frac{\frac{1}{3}}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\text{Perceba que: } \frac{3^{-1}}{4} \neq \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$$

$$\text{Pois: } \frac{1}{12} \neq \frac{4}{3}$$

Note que [exemplo (a)]:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5^2}{4^2}$$

Note que [exemplos (c), (d), (g) e (k)]:

$$\text{Em particular, temos: } a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Lembre-se que [exemplo (d)]:

$$-\frac{1}{3} = \frac{-1}{3} = \frac{1}{-3}$$

Sendo a última forma, a menos usual!

Observações:

$$\bullet 1^7 = 1.1.1.1.1.1.1 = 1$$

$$\bullet 1^0 = 1 \quad [\text{pela definição, já vista}]$$

$$\bullet 1^{-3} = (1)^3 = 1$$

$$\text{Daí, temos que: } 1^n = 1$$

Entretanto...

$$\bullet (-1)^1 = -1$$

$$\bullet (-1)^{-1} = -1$$

$$\bullet (-1)^{-2} = (-1)^2 = 1$$

$$\bullet -1^{-2} = -(1)^{-2} = -(1) = -1$$

$$\bullet (-1)^{-3} = (-1)^3 = -1$$

Observação:

Depois de resolver alguns exercícios [e com um pouco mais de prática], você perceberá mais facilmente a aplicação da(s) definição(ões) e/ou propriedade(s) e assim poderá resolver mais rapidamente [e de forma direta] muitos dos exemplos apresentados neste material.

Potência com Expoente Racional [Fracionário]:

Para valores de $n \in \mathbb{N}$, tais que $n \geq 2$, temos: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Veja alguns exemplos:

a) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2}$

b) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{16^1} = \sqrt{16} = 4$

c) $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{25^1} = \sqrt{25} = 5$

d) $9^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9^2} = \sqrt[3]{81}$

e) $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-8)^1} = \sqrt[3]{-8} = -2$

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\left(\frac{1}{2}\right)^1} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{racionalizando o denominador}} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $13^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{13}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{13}\right)^1} = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{13}} = \frac{1}{\sqrt[4]{13}} \xrightarrow{\text{racionalizando o denominador}} \frac{1}{\sqrt[4]{13}} \cdot \frac{\sqrt[4]{13^3}}{\sqrt[4]{13^3}} = \frac{\sqrt[4]{13^3}}{\sqrt[4]{13^4}} = \frac{\sqrt[4]{13^3}}{13}$

h) $\sqrt[5]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2 = 4$

i) $\sqrt[2]{3^6} = 3^{\frac{6}{2}} = 3^3 = 27$

Nota Técnica:

Matematicamente, o radical $\sqrt[n]{a^m}$ é definido para $n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2$.

Entretanto, algumas calculadoras científicas mais modernas “aceitam” no cálculo da radiciação índices reais, desta maneira: $\sqrt[n]{a^m}$ existe para $n \in \mathbb{R}^*$.

Uma justificativa razoável para isso, talvez seja o fato de que quando transformarmos o radical em potência de expoente fracionário, ou seja, $\sqrt[n]{a^m} \rightarrow a^{m/n}$, esta última “forma” permite que $n \in \mathbb{R}^*$ e é possível que o sistema de calcular das máquinas tire proveito dessa possibilidade.

Propriedades das Potências:

• Se $a > 0$ e $b > 0$, as propriedades abaixo são verdadeiras para quaisquer m e n reais.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Exemplos [Produto de potências de mesma base]: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

a) $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$
 $(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^7$

b) $7^{-2} \cdot 7^8 = 7^{-2+8} = 7^6$

c) $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1+2}{3}} = 5^{\frac{3}{3}} = 5^1 = 5$

d) $x \cdot x^3 = x^{1+3} = x^4$

e) $m^5 \cdot m^{-5} = m^{5+(-5)} = m^0 = 1$

Exemplos [Quociente de potências de mesma base]: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

a) $6^7 : 6^2 = \frac{6^7}{6^2} = 6^{7-2} = 6^5 = 7776$

b) $3^{\frac{1}{4}} \div 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3-4}{12}} = 3^{-\frac{1}{12}} = 5^{-\frac{1}{12}}$

c) $14^3 : 14^{-2} = \frac{14^3}{14^{-2}} = 14^{3-(-2)} = 14^{3+2} = 14^5$

Exemplos [Potência de potência]: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

a) $(7^2)^3 = 7^{2 \cdot 3} = 7^6$

b) $(x^2)^{-5} = x^{2 \cdot (-5)} = x^{-10}$

c) $(5^{\frac{1}{2}})^{\frac{8}{3}} = 5^{\frac{1 \cdot 8}{2 \cdot 3}} = 5^{\frac{8}{6}} = 5^{\frac{4}{3}}$

d) $(14^{-6})^{\frac{1}{2}} = 14^{(-6) \cdot \frac{1}{2}} = 14^{-\frac{6}{2}} = 14^{-3}$

Importante: $(a^m)^n = (a^n)^m \neq a^{m^n}$

Veja: $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$ e $2^{2^3} = 2^{[2^3]} = 2^8 = 256$

Considere que:

$(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$

Quando temos uma **potência de potência** [como acima], observe que podemos “trocar” a posição dos expoentes e isso não mudará o resultado final. Assim:

[a] $(2^2)^3 = (4)^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

[b] $(2^3)^2 = (8)^2 = 8 \cdot 8 = 64$

Note que nos dois cálculos [a] e [b] NÃO foi aplicada a propriedade da potência de potência.

Exemplos [Potência de um produto]: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

a) $(x \cdot y)^4 = x^4 \cdot y^4$

b) $(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$

c) $(10a^2)^3 = (10)^3 \cdot (a^2)^3 = 1000a^{2 \cdot 3} = 1000a^6$

d) $(2^3 \cdot 7^5)^4 = (2^3)^4 \cdot (7^5)^4 = 2^{3 \cdot 4} \cdot 7^{5 \cdot 4} = 2^{12} \cdot 7^{20}$

e) $(4m^3n)^2 = (4)^2 \cdot (m^3)^2 \cdot (n)^2 = 16 \cdot m^{3 \cdot 2} \cdot n^2 = 16m^6n^2$

Exemplos [Potência de um quociente]: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

a) $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$ [De certa forma, já vimos isso anteriormente!]

b) $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{-3}{2}\right)^3 = \frac{(-3)^3}{2^3} = \frac{-27}{8} = -\frac{27}{8}$

c) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{(-3)^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

d) $\left(\frac{2^3}{7}\right)^2 = \frac{(2^3)^2}{7^2} = \frac{2^6}{49} = \frac{64}{49}$

Fique esperto!

$(3x)^2 \neq (3+x)^2$

Pois:

$9x^2 \neq 9+6x+x^2$

Exemplos Diversos**[Simplificando e/ou escrevendo uma potência em outro formato]:**

a) $169^{0,5} = 169^{1/2} = \sqrt[2]{169^1} = \sqrt{169} = 13$

b) $27^{0,333\dots} = 27^{1/3} = \sqrt[3]{27^1} = 3$

b) $0,4^{0,5} = \left(\frac{4}{10}\right)^{1/2} = \sqrt[2]{\left(\frac{4}{10}\right)^1} = \sqrt{\left(\frac{4}{10}\right)} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} \xrightarrow{\text{racionaliz. o denom.}} \frac{2}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

[Escrevendo uma expressão em uma única potência]:

a) $3^3 \cdot 9^7 \rightarrow 3^3 \cdot (3^2)^7 = 3^3 \cdot 3^{14} = 3^{3+14} = 3^{17}$

b) $\frac{8 \cdot (2^3)^{-5} \cdot 4^8 \cdot 1}{2^3 \cdot \frac{1}{16} \cdot 2^{-4}} \rightarrow \frac{2^3 \cdot 2^{-15} \cdot (2^2)^8 \cdot 2^0}{2^3 \cdot 16^{-1} \cdot 2^{-4}} = \frac{2^3 \cdot 2^{-15} \cdot 2^{16} \cdot 2^0}{2^3 \cdot (2^4)^{-1} \cdot 2^{-4}} = \frac{2^{3-15+16+0}}{2^3 \cdot 2^{-4} \cdot 2^{-4}} = \frac{2^4}{2^{3-4-4}} = \frac{2^4}{2^{-5}} = 2^{4-(-5)} = 2^9$

Observe que, em alguns casos, um número pode ser escrito ou calculado de diferentes formas. Veja:

$16^{1/2} = \sqrt{16} = 4 \quad \text{ou} \quad 16^{1/2} = (4^2)^{\frac{1}{2}} = (4)^{\frac{2}{2}} = 4^1 = 4 \quad \text{ou} \quad 16^{1/2} = (2^4)^{\frac{1}{2}} = (2)^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4$

Para refletir: Podemos escolher o que semear, mas somos obrigados a colher aquilo que plantamos. [Provérbio chinês]**EXERCÍCIOS – Potenciação [ou Exponenciação]****1)** Indique o número correto em cada uma das lacunas [?] nas expressões dadas a seguir.

a) $10^{[?]} = 1000$ c) $4^4 = [?]$ e) $\left(\frac{23}{4}\right)^{[?]} = \frac{23}{4}$ g) $3^{[?]} = 1$

b) $[?]^{14} = 1$ d) $[?]^{14} = 3,14$ f) $2^{[?]} = \frac{1}{32}$ h) $5^{[?]} = \sqrt[3]{5}$

2) O valor da expressão $\frac{(-5)^2 - 4^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^0}{3^{-2} + \pi^0}$ é:

a) -4 b) $\frac{1}{9}$ c) 1 d) $\frac{5}{4}$ e) 9

3) O valor de $\frac{2^{-1} - (-2)^2 + (-2)^{-1}}{2^2 + 2^{-2}}$ é dado por:

a) $-\frac{15}{17}$ b) $-\frac{16}{17}$ c) $-\frac{15}{16}$ d) $-\frac{17}{16}$ e) nenhuma das anteriores

4) Escreva cada uma das potências dadas na forma de fração com numerador 1. Veja o exemplo:

Exemplo: $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

a) 2^{-4}

c) 3^{-2}

e) 4^{-5}

b) 5^{-2}

d) 10^{-3}

f) 6^{-3}

5) Escreva cada uma das potências dadas na forma de radical. Veja o exemplo:

Exemplo: $\left(-\frac{1}{7}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{7}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{49}} = \frac{1}{\sqrt[3]{49}}$

a) $6^{\frac{2}{3}}$

c) $(-7)^{\frac{2}{3}}$

e) $(-0,1)^{-\frac{1}{3}}$

b) $5^{-\frac{3}{4}}$

d) $(-5)^{-\frac{3}{5}}$

f) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{5}}$

6) Simplifique cada uma das potências a seguir. Veja o exemplo:

Exemplo: $27^{-\frac{2}{3}} = (3^3)^{-\frac{2}{3}} = (3)^{-\frac{6}{3}} = 3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}$

a) $8^{\frac{2}{3}}$

c) $121^{-\frac{1}{2}}$

e) $(-125)^{-\frac{2}{3}}$

b) $625^{-\frac{3}{4}}$

d) $16^{-\frac{3}{4}}$

f) $(0,04)^{-\frac{1}{2}}$

7) Efetue, aplicando as propriedades [escreva a resposta em uma única potência]:

a) $3^5 \cdot 3^{-1}$

c) $6^{0,8} : 6^{0,5}$

e) $\frac{11^3 \cdot (11^4)^2 \cdot 11}{11^{10}}$

b) $5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}}$

d) $4^{\pi} : 2^{\pi}$

f) $\frac{9 \cdot 9^{-5} \cdot (9^2)^{-3}}{(9^{-4})^3}$

8) A expressão $(2^{10} : 2^8) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} + (0,05)^{-2} \cdot (0,8)^{-2}$ é equivalente ao número:

a) 64

b) 256

c) 625

d) 68

e) 689

9) O valor de $\frac{2}{3} \cdot 8^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} \cdot 8^{-\frac{2}{3}}$ é igual a:

a) 1

b) -1

c) 2,5

d) -2,5

e) 4

10) Quando se multiplica um número inteiro N , estritamente positivo, por $(0,02)^2$, esse número N fica:

- a) dividido por quatro milésimos.
- b) multiplicado por quatro milésimos.
- c) diminuído de 2500 unidades
- d) multiplicado por 2500.
- e) dividido por 2500.

11) Escreva, para cada caso, o valor pedido na forma de uma única potência.

- a) Determine o triplo de 3^{10} .
- b) Calcule a metade de 2^{30} .
- c) Qual o quadrado de 5^{20} ?

12) Simplifique a expressão $\left[\frac{x^{2^3} : (x^2)^3}{x^{2^4} \cdot x^{-16}} \right]^{-2}$, com $x \neq 0$.

13) Sendo $a^2 = 99^6$, $b^3 = 99^6$ e $c^4 = 99^8$, então $(abc)^{12}$ é igual a:

- a) 99^{12}
- b) $99^{21/2}$
- c) 99^{28}
- d) 99^{84}
- e) 99^{99}



14) Escreva a expressão $2^7 \cdot 5^6$ no formato $2^a \cdot 10^b$ utilizando as propriedades de potência.



15) Escreva a expressão $4^{20} + 2^{41}$ no formato $a \cdot 2^b$ utilizando as propriedades de potência.



16) [FUVEST] O valor de $\sqrt[3]{\frac{2^{28} + 2^{30}}{10}}$ é igual a:

- a) $\frac{2^8}{3}$
- b) $\frac{2^9}{4}$
- c) 2^8
- d) 2^9
- e) $\left(\frac{2^{58}}{10}\right)^{\frac{1}{3}}$

RESUMO DAS DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES:

• Para qualquer valor de $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{R}$, são válidas as **definições**: $a^1 = a$ $a^0 = 1$ $1^n = 1$

$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$ Em particular, para $n = 1$: $a^{-1} = \frac{1}{a}$ Em particular, quando a base é fracionária: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Uma regra muito útil, mas que valerá com algumas restrições, entre elas, para $n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2$ é: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

• Se $a > 0$ e $b > 0$, as **propriedades** abaixo são verdadeiras para quaisquer m e n reais.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS

1a) 3 1b) 1 1c) 256 1d) 3,14 1e) 1 1f) -5 1g) 0 1h) 1/3

2) [e]

3) [b]

4a) $\frac{1}{16}$ 4b) $\frac{1}{25}$ 4c) $\frac{1}{9}$ 4d) $\frac{1}{1000}$ 4e) $\frac{1}{1024}$ 4f) $\frac{1}{216}$

5a) $\sqrt[3]{36}$ 5b) $\frac{1}{\sqrt[4]{125}}$ 5c) $\sqrt[3]{49}$ 5d) $\frac{1}{\sqrt[5]{-125}}$ 5e) $\sqrt[3]{-10}$ 5f) $\sqrt[5]{-8}$

6a) 4 6b) $\frac{1}{125}$ 6c) $\frac{1}{11}$ 6d) $\frac{1}{8}$ 6e) $\frac{1}{25}$ 6f) 5

7a) 3^4 7b) $5^{1/6}$ 7c) $6^{3/10}$ 7d) 2^π 7e) 11^2 7f) 9^2

8) [e]

9) [c]

10) [e]

11a) 3^{11} 11b) 2^{29} 11c) 5^{40}

12) $\frac{1}{x^4}$

13) [d]

14) $2 \cdot 10^6$

15) $3 \cdot 2^{40}$

16) [d]

Sugestões para estudo:

• Além de rever toda a teoria e resolver todos os exercícios deste material, você pode melhorar seus conhecimentos consultando outros livros de Matemática de Ensino Fundamental e Médio, ou ainda procurando por sites na internet e vídeos no youtube que tenham a teoria e/ou exercícios sobre o assunto.

• Você pode também montar grupos de estudo [de 2, 3 ou 4 alunos] em horários oportunos para resolverem exercícios e discutirem o assunto. Este procedimento normalmente dá bons resultados.

Para refletir: Quem pouco pensa, muito erra. [Leonardo da Vinci]

Espaço para anotações: