



INSTITUTO FEDERAL SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Curso: Ensino Médio Integrado

Disciplina: Matemática (aprofundamento)

Professor: Gustavo de Oliveira Rosa

Discente:

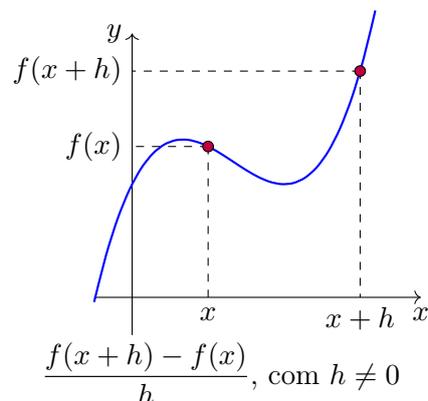
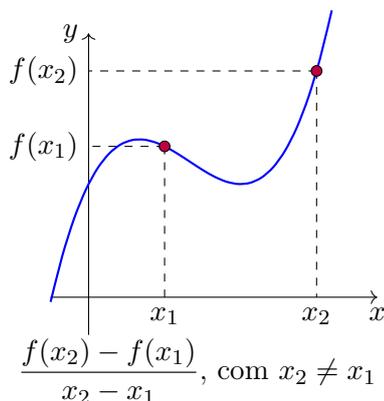
Lista 1: Conjuntos, funções e função afim

1. A e B são locadoras de automóveis. A primeira cobra 1 real por quilômetro rodado mais uma taxa de 100 reais fixa. A segunda cobra 80 centavos por quilômetro mais uma taxa fixa de 200 reais. Discuta a vantagem de A sobre B ou de B sobre A em função do número de quilômetros a serem rodados.
2. A escala N de temperaturas foi feita com base nas temperaturas máxima e mínima em Nova Iguaçu. A correspondência com a escala Celsius é uma função afim e sabemos o seguinte:

$^{\circ}N$	$^{\circ}C$
0	18
100	43

Em que temperatura ferve a água na escala N ?

3. Uma caixa d'água de 1000 litros tem um furo no fundo por onde escoava água a uma vazão constante. Ao meio-dia de certo dia ela foi enchida, e às 6 da tarde desse dia restavam nela 850 litros. Quando a caixa ficará pela metade?
4. Pessoas apressadas podem diminuir o tempo gasto em uma escada rolante subindo alguns degraus da escada no percurso. Para uma certa escada, observa-se que uma pessoa gasta 30 segundos na escada quando sobe 5 degraus e 20 segundos quando sobe 10 degraus. Quantos são os degraus da escada e qual o tempo normalmente gasto no percurso?
5. Podemos definir a *taxa de variação* de uma função f como o quociente $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, sendo x_1 e x_2 pontos distintos no domínio de f . Mostre que se $f(x) = ax + b$, então a taxa de variação de f é constante e igual a a .
6. Também podemos definir a taxa de variação da função como o quociente $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, com $h \neq 0$. Use essa definição para mostrar que a taxa de variação de $f(x) = ax + b$ é constante e igual a a .



7. Dados dois conjuntos não vazios X e Y , uma forma de provar que $n(X) > n(Y)$ é mostrar que não existe uma função $f : X \rightarrow Y$ que seja sobrejetiva.

Sejam A um conjunto e $P(A)$ o conjunto das partes de A . Se A é finito e tem n elementos, é trivial que $n(P(A)) > n(A)$, afinal $n(P(A)) = 2^n$.

Para o caso de A ser infinito, prove o teorema de Cantor: não existe uma função $f : A \rightarrow P(A)$ que seja sobrejetiva. (*Sugestão:* Suponha que exista tal função f e considere o conjunto $B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$)

Respostas

Questão 1: Para x quilômetros, os preços cobrados por A e B são, respectivamente, $A(x) = 100 + x$ e $B(x) = 200 + 0,8x$. Ambas se equivalem para 500 km. Para menos de 500 km, A é vantajosa. Para mais de 500 km, B é vantajosa.

Questão 2: Temos $N = 4C - 72$, daí a água ferve em $N = 328$.

Questão 3: Às 8 h da manhã do dia seguinte.

Questão 4: Sejam d o total de degraus e t o tempo por degrau caso a pessoa fique parada. Pelos dados do problema, temos $(d - 5)t = 30 \Rightarrow t = \frac{30}{d - 5}$ e $(d - 10)t = 20 \Rightarrow t = \frac{20}{d - 10}$. Comparando as equações, vem $d = 20$, logo a escada tem 20 degraus. Substituindo esse resultado nas equações originais, vem $t = 2$, então a escada leva 2 segundo para subir cada degrau. Assim, o tempo total que a escada leva para subir é de 40 segundos.

Questão 5: Como $f(x_2) = ax_2 + b$ e $f(x_1) = ax_1 + b$, temos

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{distribuindo o sinal de menos} \\ &= \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{cancelando } +b \text{ e } -b \\ &= \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{fatorando o numerador} \\ &= a && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{como } x_2 \text{ e } x_1 \text{ são diferentes podemos simplificar} \end{aligned}$$

Questão 6: De modo análogo à questão anterior, de $f(x) = ax + b$ e $f(x + h) = a(x + h) + b$ temos

$$\begin{aligned} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \frac{a(x + h) + b - (ax + b)}{h} \\ &= \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{pela propriedade distributiva} \\ &= \frac{ah}{h} && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{cancelando os termos simétricos} \\ &= a && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{como } h \neq 0 \text{ podemos simplificar} \end{aligned}$$

Questão 7: Dada uma função qualquer $f : A \rightarrow P(A)$ e o conjunto $B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$. Temos $B \subset A$, logo $B \in P(A)$. A função f não pode ser sobrejetiva, pois não existe $k \in A$ tal que $f(k) = B$. Note que ou $k \in B$ ou $k \notin B$. Analisemos ambos os casos:

- $k \in B \Rightarrow k \in f(k) \Rightarrow k \notin B$ (absurdo);
- $k \notin B \Rightarrow k \notin f(k) \Rightarrow k \in B$ (absurdo).