INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Engenharia Civil

Integrais

Engenharia Civil

Ementa

INTEGRAL INDEFINIDA

- ~~Conceito e propriedades da integral indefinida;~~
- ~~Técnicas de integração: substituição~~ **e partes;**
- ~~Integração por substituição trigonométrica;~~
- ~~Integração de funções racionais por frações parciais;~~

Engenharia Civil

Ementa

INTEGRAL DEFINIDA

- **Conceito e propriedades da integral definida;**
- **Teorema fundamental do cálculo;**
- Cálculo de áreas, comprimento de arcos, volumes e volumes de revolução;
- Integrais impróprias;
- Integrais múltiplas;

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO: INTEGRAL DEFINIDA

Integral definida

Teorema fundamental do cálculo: Seja f contínua em [a, b] tal que existe uma função F(x) com F'(x) = f(x)dx, então:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Exemplo: $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

Historicamente, foi da necessidade de calcular áreas de figuras planas cujos contornos não são segmentos de reta que surgiu a noção de integral.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

O processo para determinar a área de uma região sob um gráfico da função f: [a, b], consiste em dividirmos o intervalo [a, b] em subintervalos suficientemente pequenos que neles f(x) possa ser considerada constante e com isso formar "n" retângulos nos quais serão calculados em cada um a sua área e a soma das áreas dos "n" retângulos será aproximadamente a área procurada.

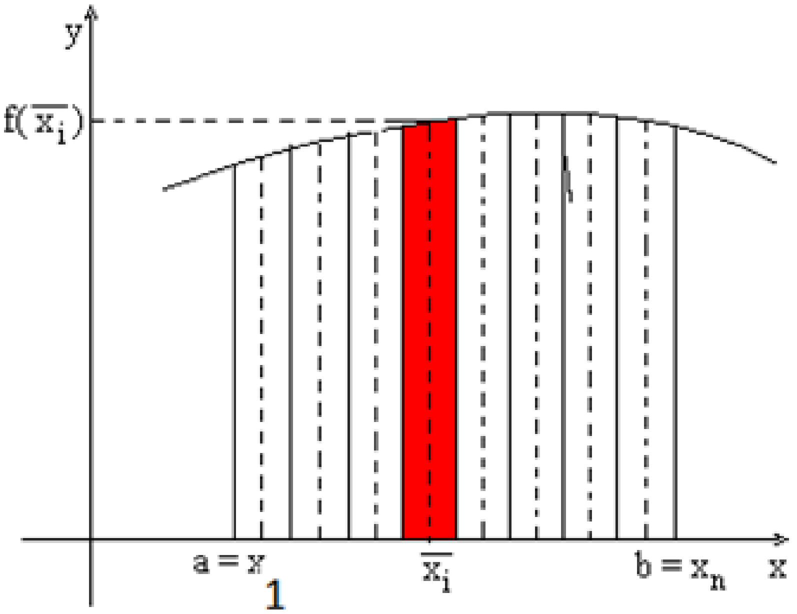
INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

$$A_1 = \Delta x \cdot f(\bar{x}_1)$$

$$A_2 = \Delta x \cdot f(\bar{x}_2)$$

$$\dots$$

$$A \cong \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(\bar{x}_i)$$



INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

De um modo geral, se f é uma função contínua em [a, b], o nº do qual a soma $\boxed{A \cong \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(\bar{x}_i)}$ se aproxima a medida em que os Δx se tornam simultaneamente pequenos é chamado integral de f em [a, b] e é representado por

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x}$$ que é chamado soma de Riemann

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

Exemplo:

Faça uma estimativa da área A sob o gráfico de $f(x) = 250 - \frac{x^2}{10}$, $0 \leq x \leq 50$, dividindo o intervalo para x [0, 50] em subintervalos de comprimento 10.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

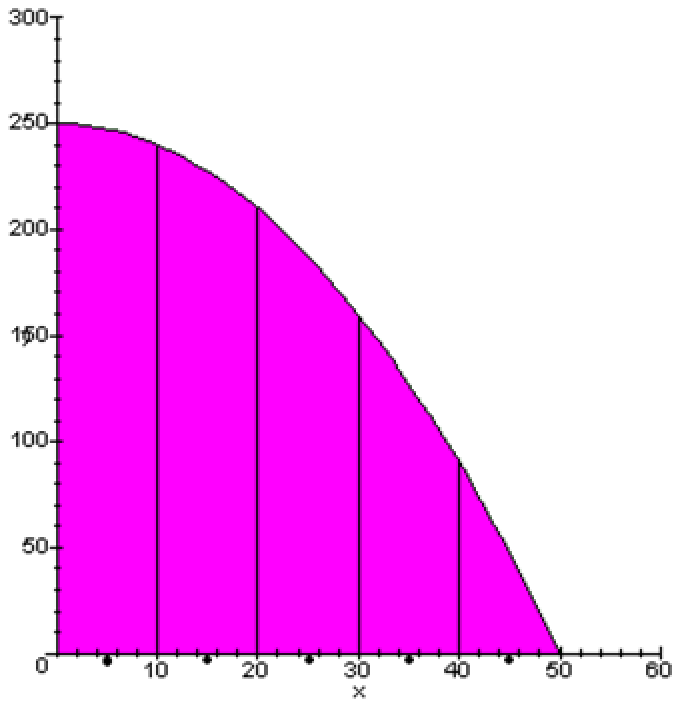
$$A1 = 10\left(250-\frac{5^2}{10}\right)=2475 \qquad A2 = 10\left(250-\frac{15^2}{10}\right)=2275 \qquad A3 = 10\left(250-\frac{25^2}{10}\right)=1875$$

$$A4 = 10\left(250-\frac{35^2}{10}\right)=1275 \qquad A5 = 10\left(250-\frac{45^2}{10}\right)=475$$

Somando todas as áreas A1 + A2 + ... + A5 obtemos a área total que pode ser expressa por:

$$A \cong \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(\bar{x}_i) \cong 8375$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL



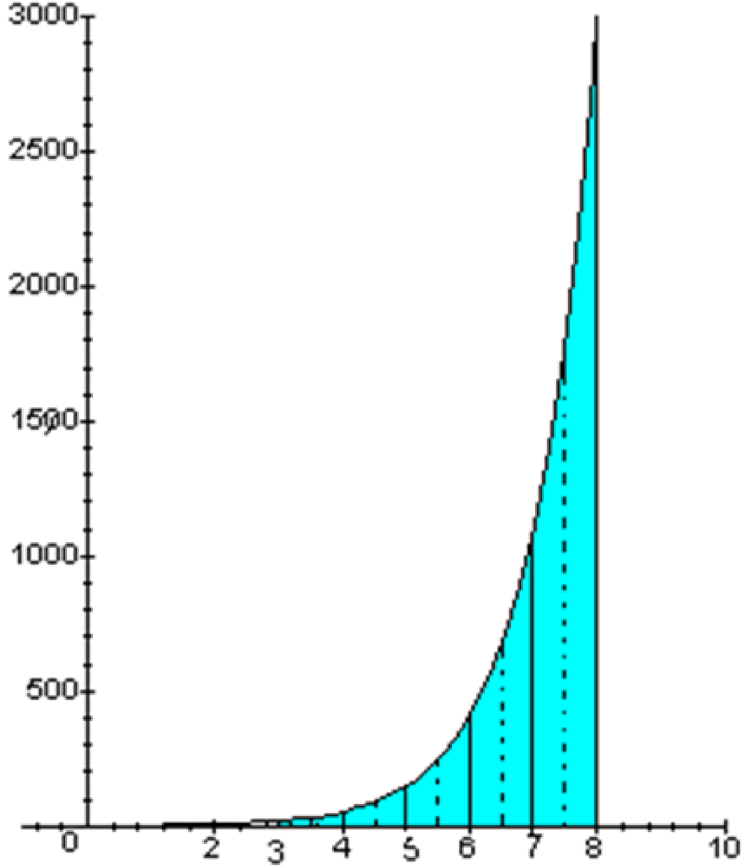
xi	f(xi)	P=f(xi).delta
5	247,5	2475
15	227,5	2275
25	187,5	1875
35	127,5	1275
45	47,5	475
		8375

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

Exemplo:

Ache a área aproximada abaixo da curva $f(x) = e^x$ e acima do eixo x ou seja, acima do intervalo [3, 8], usando ponto médio com 5 intervalos.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL



xi	f(xi)	P=f(xi).delta
X1= 3,5	33,11545	33,115452
X2= 4,5	90,01713	90,0171313
X3= 5,5	244,6919	244,691932
X4= 6,5	665,1416	665,141633
X5= 7,5	1808,042	1808,04241
		2841,00856

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

Exemplo:

Seja a função $f(x) = x^2$ e considere a região R sob o gráfico de f no intervalo [0,1]. Para obter uma aproximação da área de R, construímos quatro retângulos, isto é, dividimos o intervalo [0,1] em quatro subintervalos.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

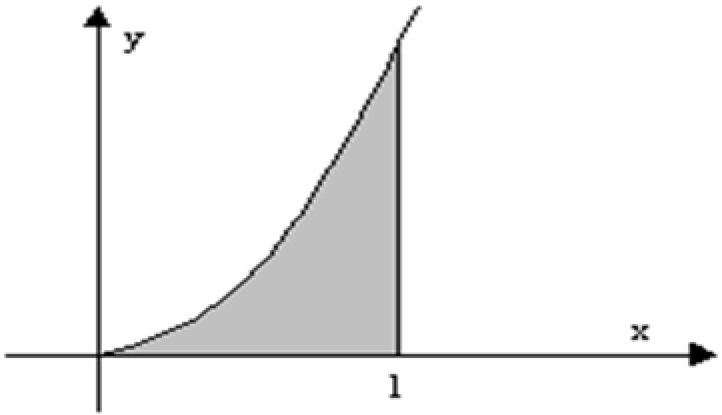


Tabela 1

Número de Retângulos n	4	8	16	32	64	100	200
Aproximação de A	0,328127	0,332031	0,333008	0,333252	0,333313	0,333325	0,333331

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

De um modo geral, se *f* é uma função contínua em [a, b], o nº do qual a soma $A \cong \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(\bar{x}_i)$ se aproxima na medida em que os Δx se tornam simultaneamente pequenos é chamado integral de *f* em [a, b] e é representado por

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \cong \lim_{\Delta x \to 0}\left[\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i).\Delta x\right]}$$

Engenharia Civil

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

Definindo Área: Os exemplos anteriores indicam como definir a área A sob o gráfico de uma função num intervalo [a, b]. Dividimos o intervalo [a, b] em *n* subintervalos de igual comprimento $\Delta x = \frac{(a-b)}{n}$.

Engenharia Civil

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA INTEGRAL

Em seguida, tomemos *n* pontos arbitrários $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$ chamados pontos representativos pertencentes ao primeiro, segundo e *n*-ésimo subintervalos, respectivamente. Então aproximando a área A da região R pelos *n* retângulos de larguras Δx e alturas $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, de modo que as áreas dos retângulos são $f(x_1)\Delta x,\ f(x_2)\Delta x, \ldots, f(x_n)\Delta x$, temos

$$\boxed{A \cong f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x}$$

Engenharia Civil

Integral Definida:

De um modo geral, se *f* é uma função contínua em [a, b], o número do qual a soma $A \cong \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \right] \Delta x$ se aproxima na medida em que os Δx se tornam simultaneamente pequenos é chamado integral de f em [a, b] e é representada por

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i).\Delta x \right]}$$

Integral Definida:

Exemplo:

Faça uma estimativa da área A sob o gráfico de

$f(x) = -x^2 + 4$, $0 \leq x \leq 2$, dividindo o intervalo [0, 2] em

subintervalos de comprimento 0,5.

Engenharia Civil

Aplicações de integrais

Área de uma região plana

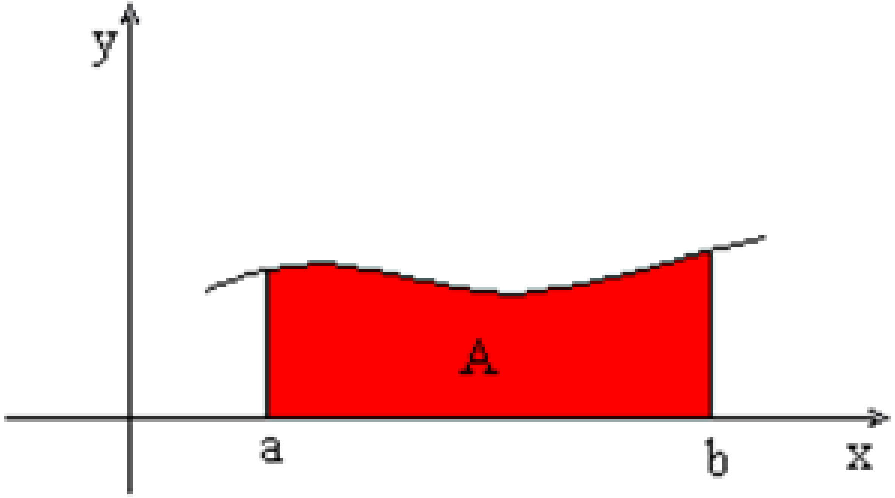
A) Se f é uma função contínua em um intervalo [a, b] e se

$f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a, b]$ então a área da região limitada pela curva

$y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$ é dada por:

Engenharia Civil

Aplicações de integrais



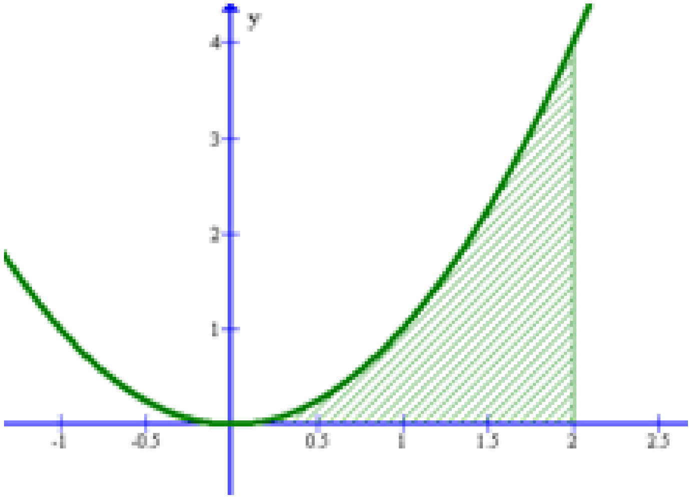
$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Engenharia Civil

Aplicações de integrais

Exemplo:

Calcular a área da região limitada pela curva $y = x^2$, o eixo x e as retas $x = 0$ e $x = 2$.



Aplicações de integrais

Área de uma região plana

B) Se f é uma função contínua em um intervalo [a, b] e se $f(x) \leq 0 \ \forall \ x \in [a, b]$ então a área da região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$ é dada por:

$$\boxed{A = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{ou} \quad A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \quad \text{Módulo}}$$

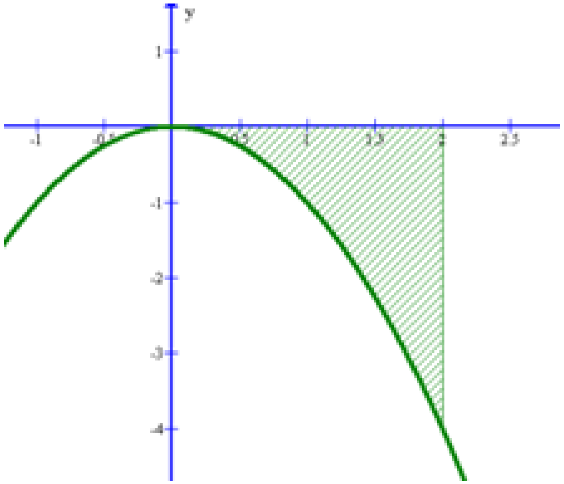
INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo

Engenharia Civil

Aplicações de integrais

Exemplo:

Calcular a área determinada pela função $y = -x^2$, eixo x, $x = 0$ e $x = 2$.



Engenharia Civil

Aplicações de integrais

Exemplo:

Determine a área formada pela função $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, o eixo x, $x \in [-2,3]$.