

Estrutura de concreto armado

UNIDADE III – Solicitações normais: presso-flexão

3.2 Compressão centrada

3.3 Presso-flexão reta e oblíqua

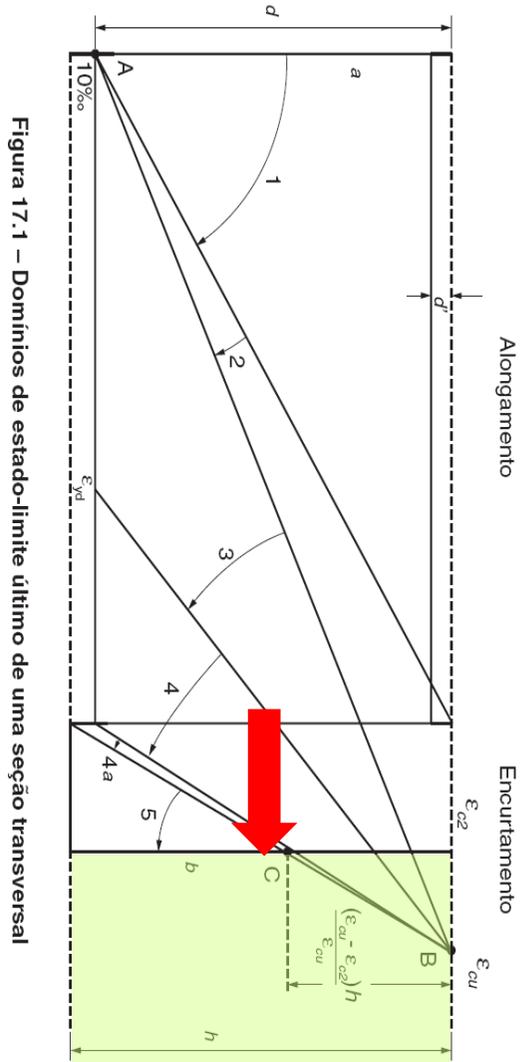
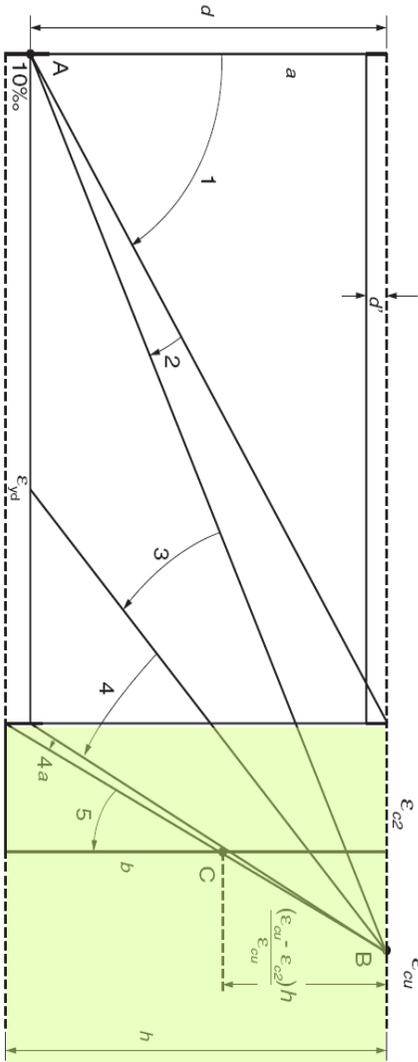
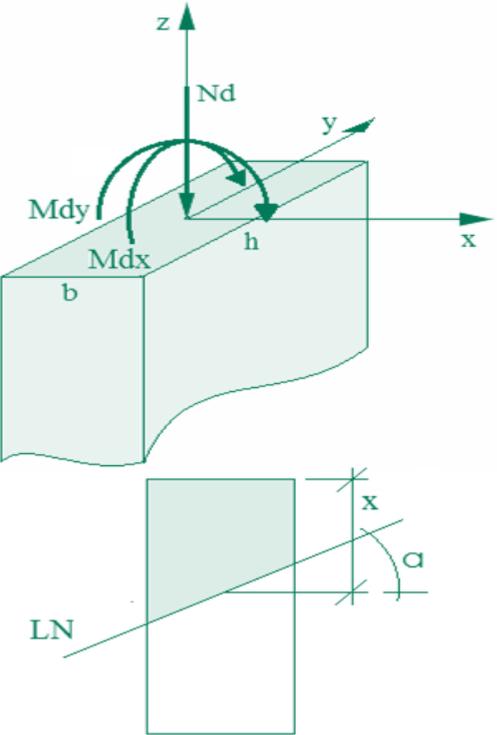
PILARES CURTOS



- Definem-se as pré-dimensões das seções transversais e o tipo de material
- Se realizam ajustes e correções com base na experiência e intuição do projetista, buscando a “melhor solução”, segura e econômica
- É um processo iterativo baseado em regras práticas.



Pré-dimensionamento





- Conceito de tensão:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

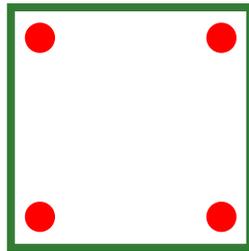
• Parcela do concreto: $F_c = \sigma_{cd} \cdot A_c = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot A_c$

• Parcela da armadura: $F_s = \sigma_s \cdot A_s$



Pilar

20 cm x 20 cm



4 x 10 mm

$f_{ck} = 25 \text{ MPa}$



Pré-dimensionamento Compressão centrada

- Conceito de tensão:

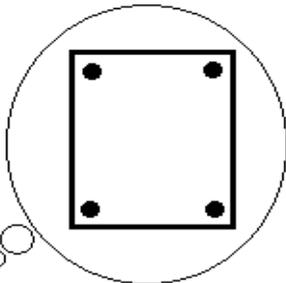
$$\sigma = \frac{F}{A}$$



- Parcela do concreto: $F_c = \sigma_{cd} \cdot A_c = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot A_c$



- Parcela da armadura: $F_s = \sigma_s \cdot A_s$

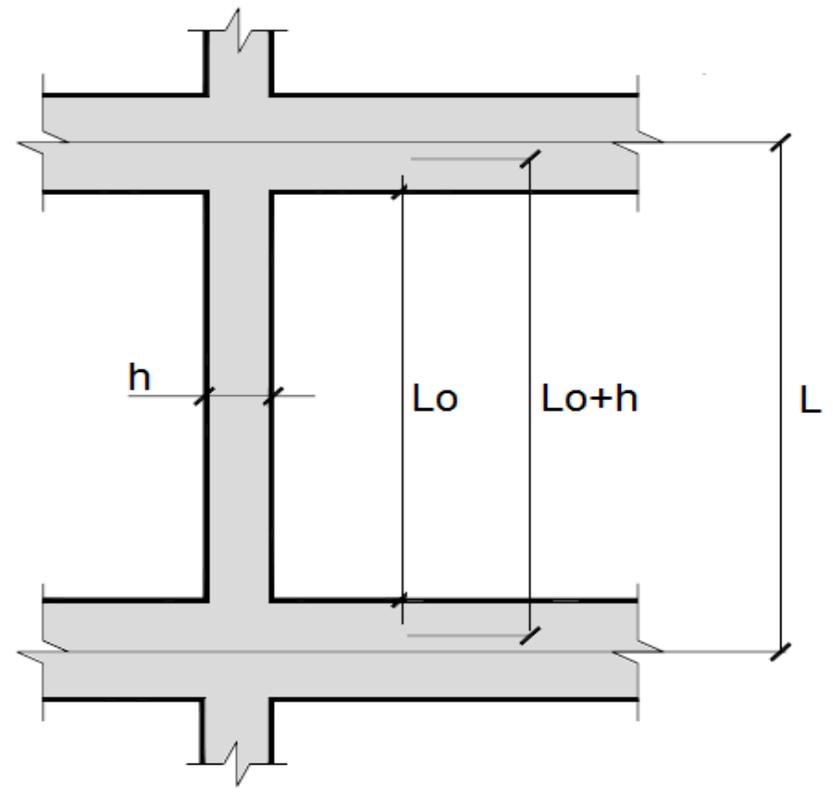
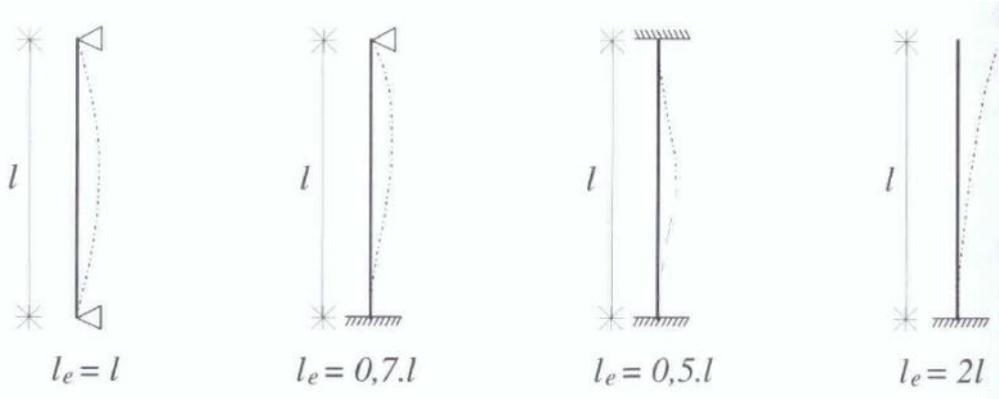


Pré-dimensionamento de seções de pilares									
Carga estimada para esforço normal para seção de concreto (kN)									
Fck (MPa)	b (cm)	h (cm)							
		20	25	30	40	50	60	70	80
...	20								
	25								
	...								
Carga estimada para esforço normal para seção de armadura (kN)									
Fyk (MPa)	ø (mm)	Número de barras							
		4	6	8	10	12	14	16	18
500	10,0								
	...								
	25,0								



- Comprimento equivalente ou de flambagem:

$$l_e \leq \begin{cases} l_o + h \\ l \end{cases}$$





• Índice de esbeltez: $\lambda = \frac{l_e}{i}$

• Raio de giração: $i = \left(\frac{I}{A}\right)^{1/2}$

• Pilares retangulares:

$$\lambda = \frac{l_e}{i} = \frac{l_e}{\sqrt{\frac{b \cdot h^3}{12} \cdot \frac{12}{b \cdot h}}} \rightarrow \lambda = \sqrt{12} \cdot \frac{l_e}{h}$$

• Pilares circulares:

$$\lambda = \frac{4 \cdot l_e}{D}$$



Tipo	Índice de Esbeltez	Análise
Pilares curtos	$\lambda \leq 35$	Efeitos locais de 2ª ordem desprezados
Pilares medianamente esbeltos	$35 < \lambda \leq 90$	Efeitos locais de 2ª ordem podem ou não ser desprezados
Pilares esbeltos	$90 < \lambda \leq 140$	Efeitos de 2ª ordem e fluência devem ser considerados Multiplicar os esforços solicitantes finais por: $\gamma_{n1} = 1 + [0,01(\lambda - 140)/1,4]$



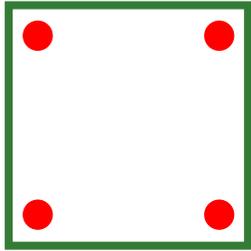
Tipo	Índice de Esbeltez	Análise
Pilares muito esbeltos	$140 < \lambda \leq 200$	Análise não-linear de 2ª ordem com discretização da barra Relação momento-curvatura real e não linearidade geométrica não aproximada
Limite	$\lambda > 200$	Permitido apenas para elementos pouco comprimidos $N < 0,10 \cdot f_{cd} \cdot A_c$



Classificação do pilar

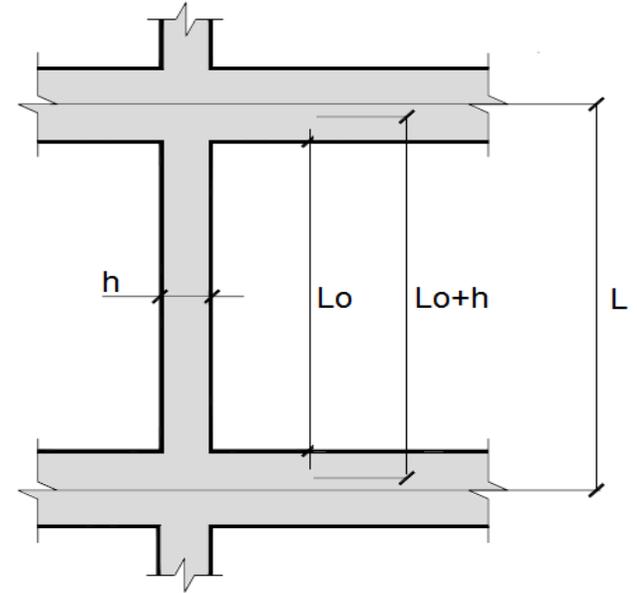
Pilar apoiado
nas bordas

20 cm x 20 cm



4 x 10 mm

$$\lambda = \sqrt{12} \cdot \frac{l_e}{h}$$



$$l_e = 280 \text{ cm}$$

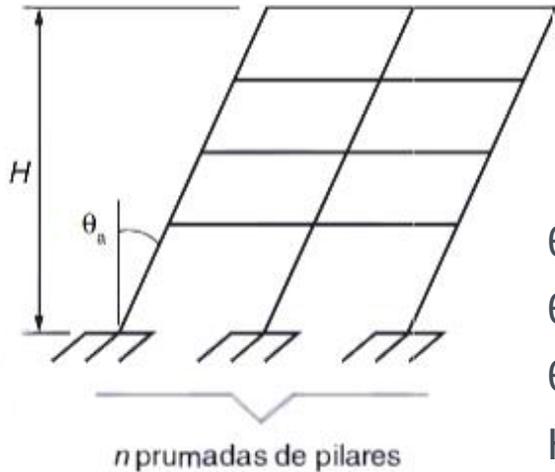
$$\lambda = \sqrt{12} \cdot \frac{280}{20} = 48$$

$$l_e = 550 \text{ cm}$$

$$\lambda = \sqrt{12} \cdot \frac{550}{20} = 95$$



- Excentricidades oriundas de imperfeições geométricas (e_a)
 - Imperfeições globais → Desaprumo (item 11.3.3.4.1)



$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{H}} \quad \theta_a = \theta_1 \sqrt{\frac{1 + 1/n}{2}}$$

$\theta_{1\min} = 1/300$ para estruturas reticuladas e imperfeições locais

$\theta_{1\max} = 1/200 \rightarrow$ Usar para pilares isolados em balanço

$\theta_a = \theta_1 \rightarrow$ Lajes lisas ou cogumelo

H é a altura total da edificação, expressa em metros

n é o número de pilares que contribuem para o efeito do desaprumo global e associados à altura H adotada

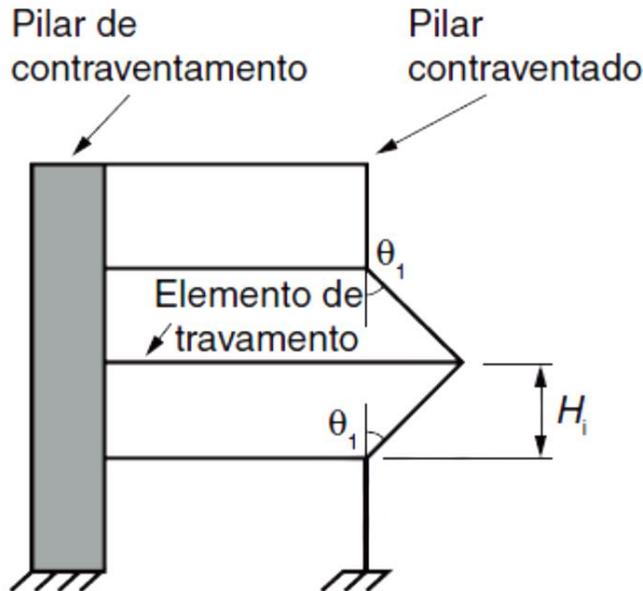
- 30% Ação do vento > Ação do desaprumo \rightarrow Considera somente o vento
- 30% Ação do desaprumo > Ação do vento \rightarrow Considera somente o desaprumo
- Demais casos: Ação do vento e desaprumo combinadas sem a necessidade de considerar o valor de $\theta_{1\min}$



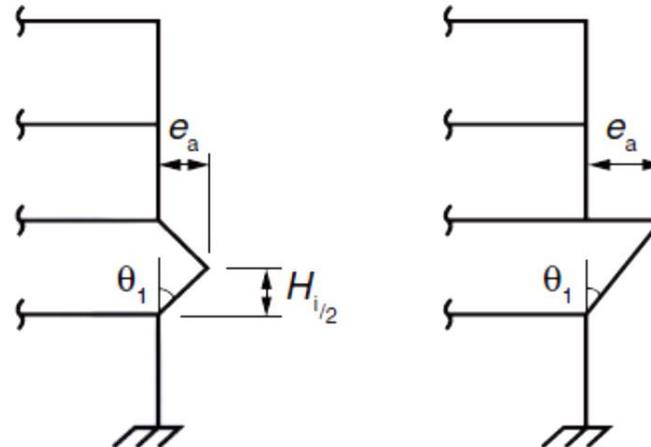
Excentricidades de 1ª ordem

- Excentricidades oriundas de imperfeições geométricas (e_a)
 - Imperfeições locais (item 11.3.3.4.2) → Dimensionamento de um lance de pilar

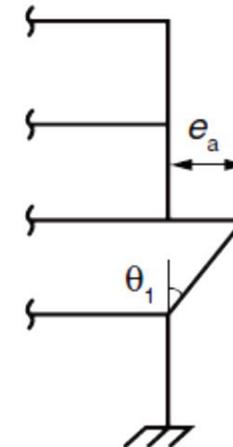
$$e_a = \frac{l_e}{400} \rightarrow l_e \text{ em metros}$$



a) Elementos de travamento
(tracionado ou comprimido)



b) Falta de retlineidade
no pilar



c) Desaprumo do pilar



- Momento mínimo de 1ª ordem:
 - Nas estruturas reticuladas usuais admite-se que o efeito das imperfeições locais esteja atendido se for respeitado esse valor de momento total mínimo.
 - A este momento devem ser acrescentados os momentos de 2ª ordem.
 - No caso de pilares submetidos à flexocompressão oblíqua, esse mínimo deve ser respeitado em cada uma das direções.
 - h em metros → altura total da seção transversal na direção considerada

$$M_{1d,min} = N_d \cdot e_{1,min}$$

$$e_{1,min} = 0,015m + 0,03 \cdot h \geq e_a$$

$$M_{1d,min} = N_d(0,015 + 0,03 \cdot h)$$



- Dimensionar um pilar de concreto armado:

Seção retangular 30 cm x 40 cm

Comprimento equivalente $l_e = 3,0$ m

$N_k = 1000$ kN

Momentos transmitidos por vigas:

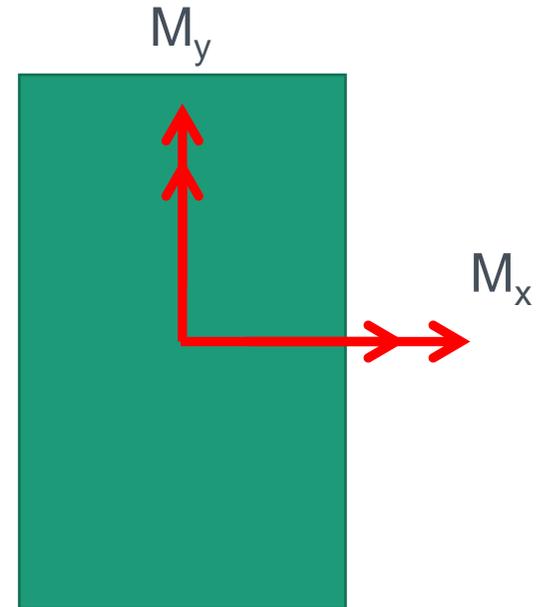
$$M_y = 30 \text{ kNm}$$

$$M_x = 15 \text{ kNm}$$

Concreto C-25

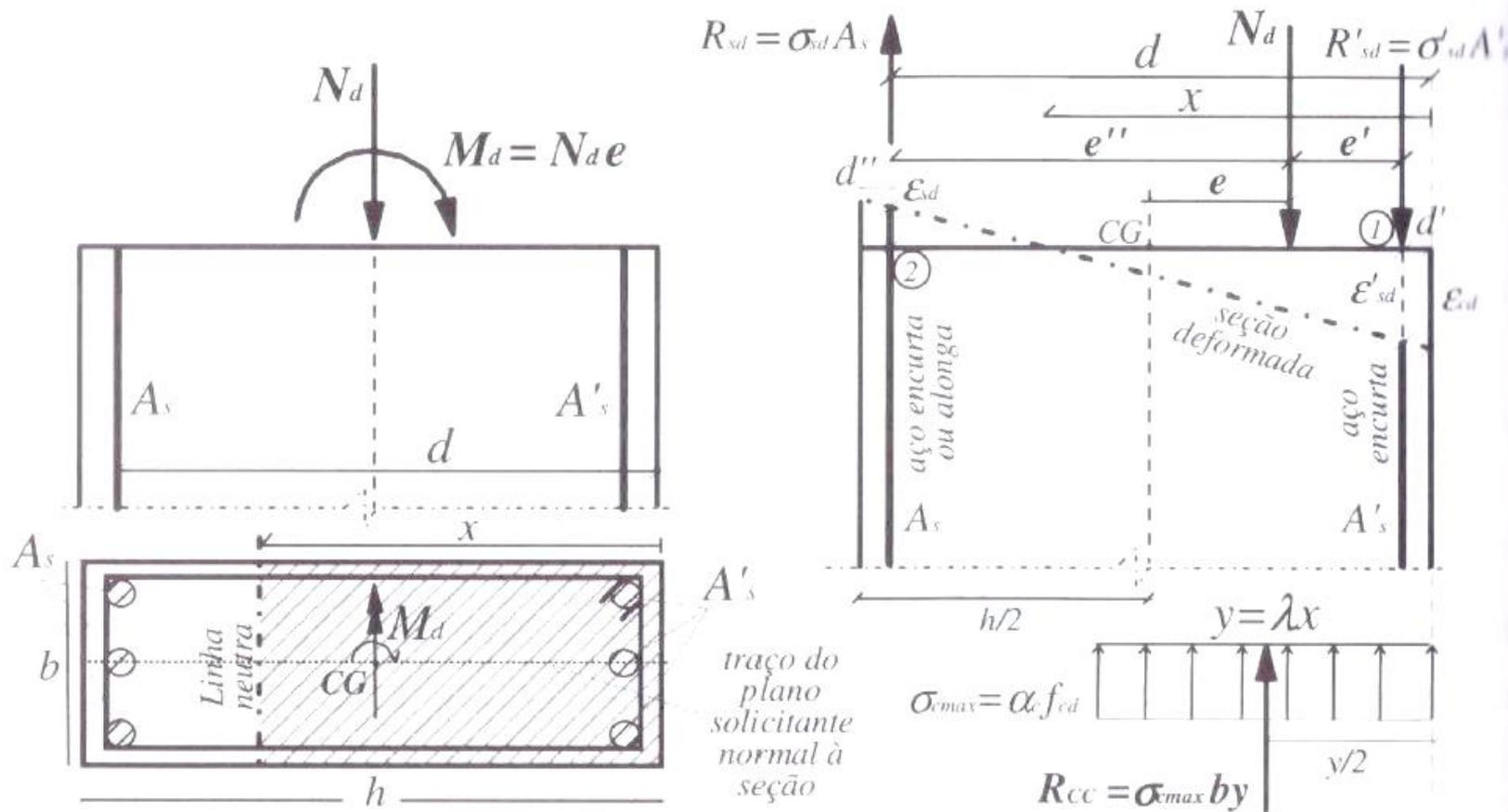
Aço CA-50

$d' = 0,05$ m



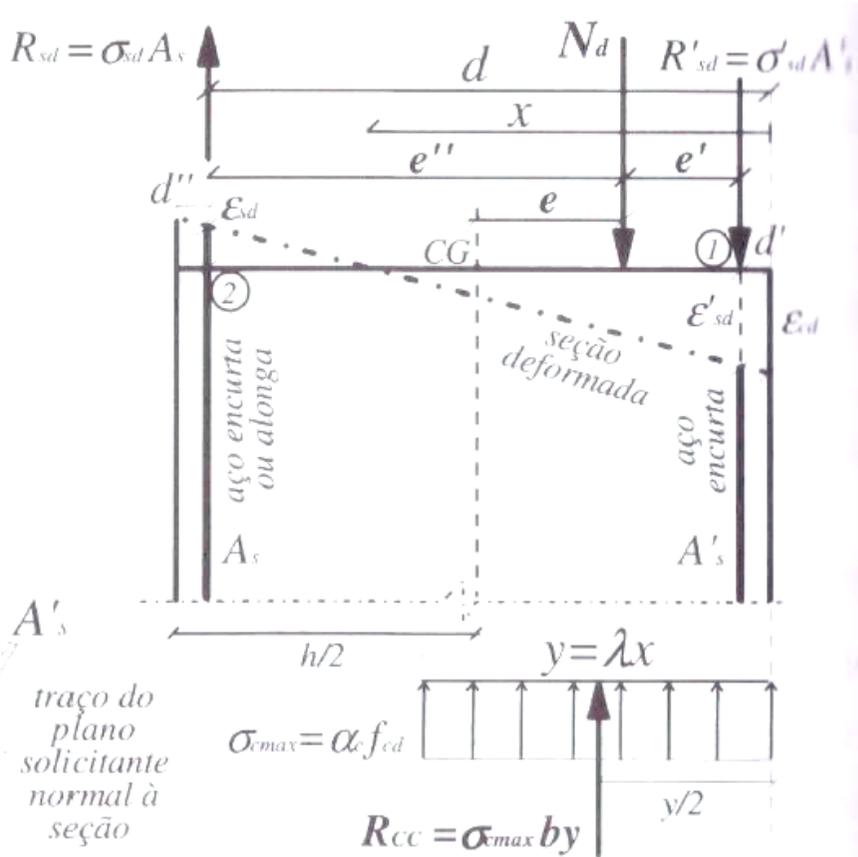


- Equilíbrio da seção





Flexão composta normal



- C20 a C50

$$R_{cc} = \sigma_{cd} \cdot b \cdot y = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0,8 \cdot x$$

$$R_{sd} = \sigma_{sd} \cdot A_s \quad R'_{sd} = \sigma'_{sd} \cdot A'_s$$

- $\Sigma F_y = 0$

$$N_d = R_{cc} + R_{sd} - R'_{sd}$$

- $\Sigma M_2 = 0$

$$M_d = N_d \cdot e'' = R_{cc} \left(d - \frac{y}{2} \right) - R'_{sd} \cdot (d - d')$$

- $\Sigma M_1 = 0$

$$M_d = N_d \cdot e' = R_{cc} \left(\frac{y}{2} - d' \right) + R_{sd} \cdot (d - d')$$



Flexão composta normal

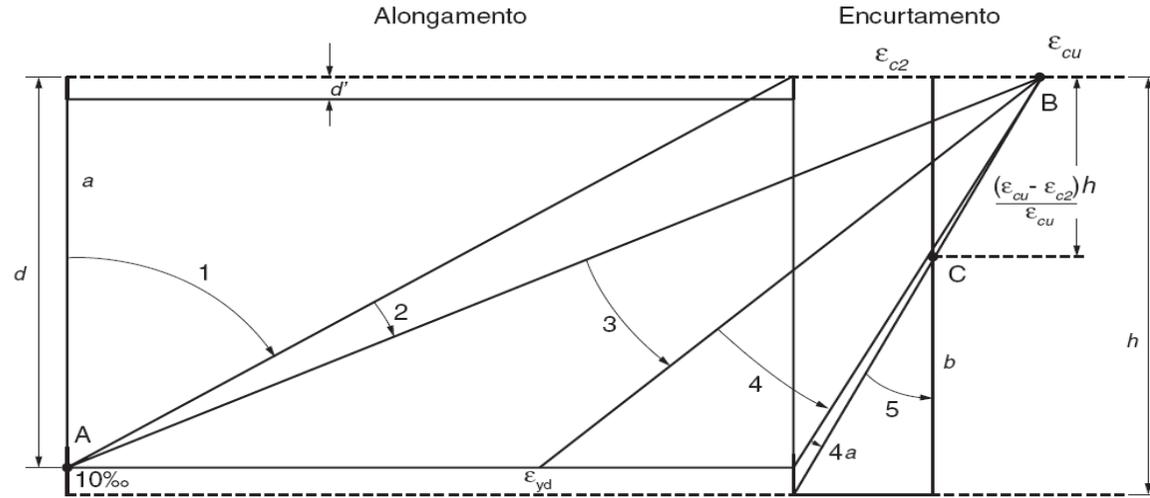
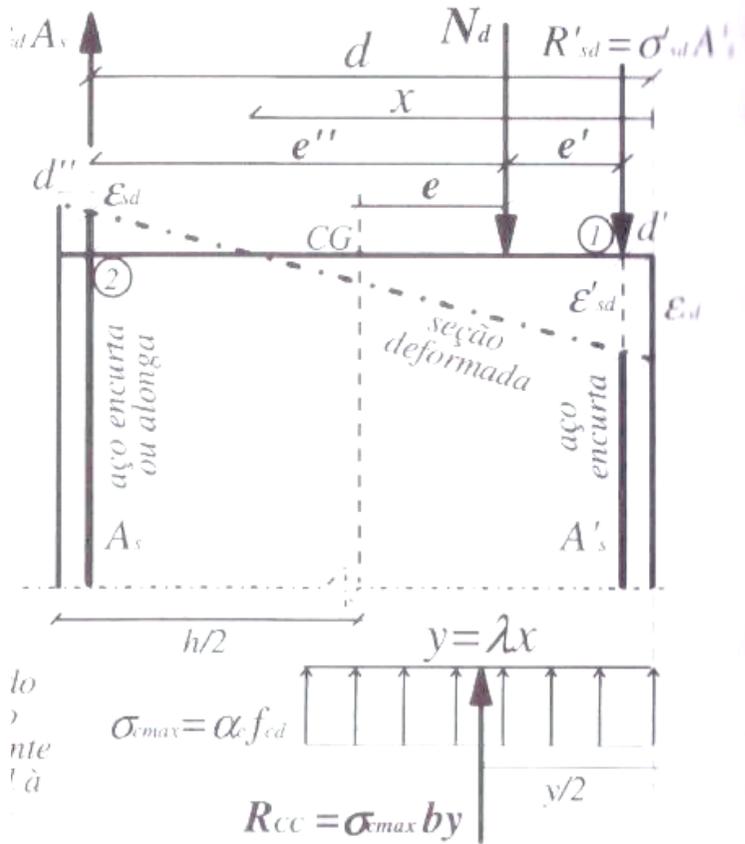


Figura 17.1 – Domínios de estado-limite último de uma seção transversal

$$N_d = R_{cc} + R_{sd} - R'_{sd}$$

- Duas equações $\rightarrow \Sigma F$ e ΣM
- Incógnitas: x , A_s e A'_s \rightarrow Sistema indeterminado



- Grandezas adimensionais, reduzidas ou relativas

- Força normal:

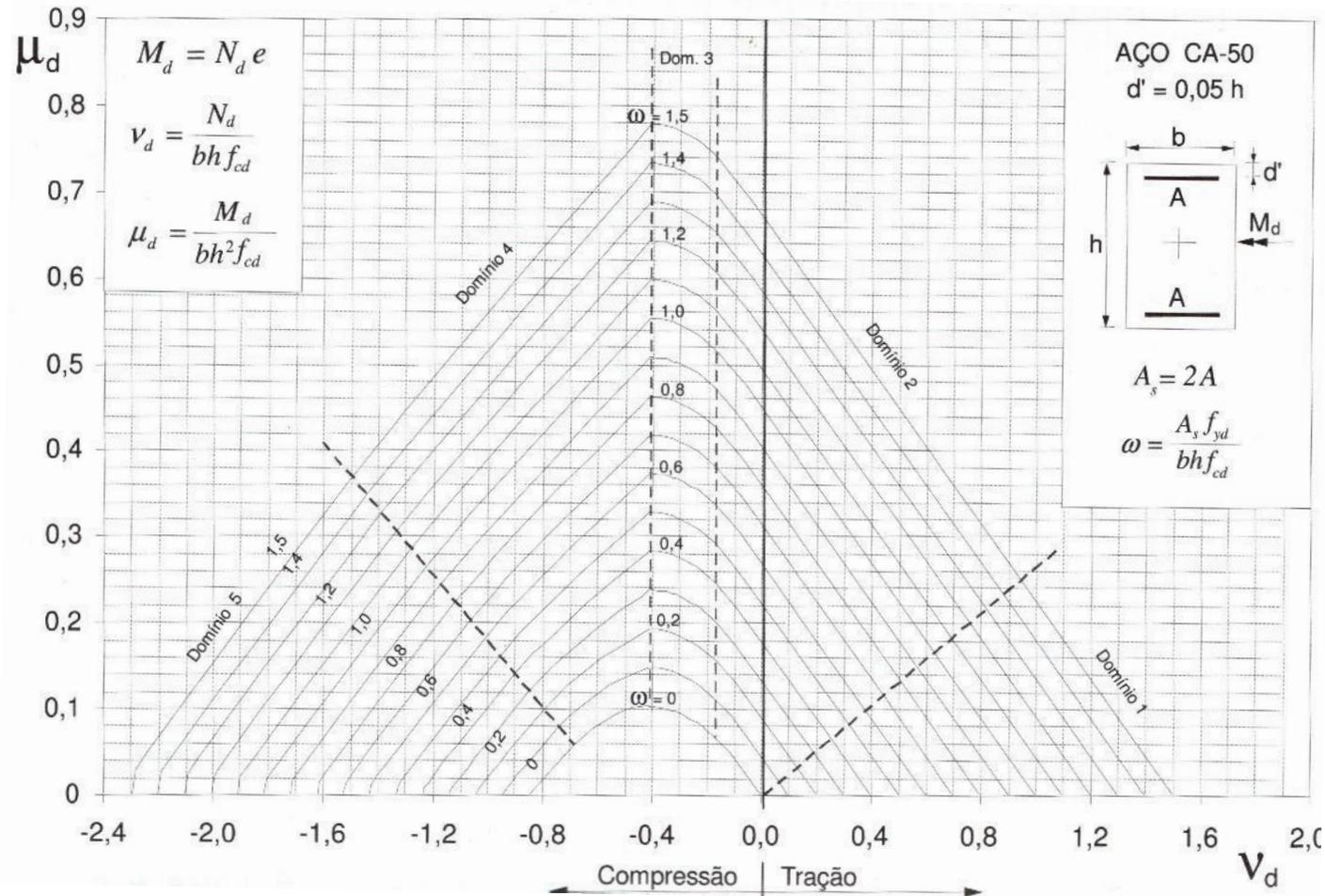
$$v_d = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$$

- Momento:

$$\mu_d = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}}$$

- Taxa mecânica de armadura longitudinal

$$\omega = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$$



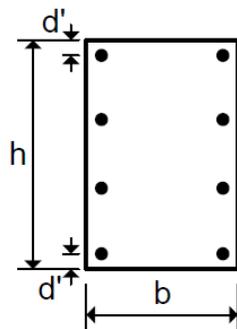


número de camadas=4 ; $\delta=0,10$

$$\delta = d'/h \quad \sigma_{cd} = 0,85f_{cd}$$

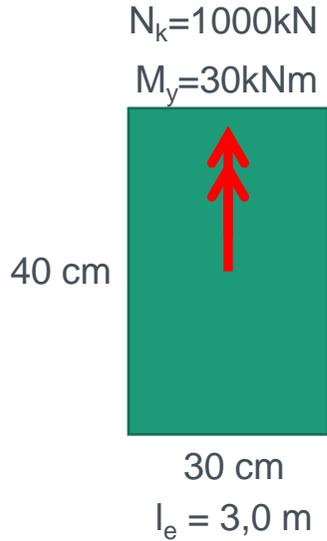
$$v = \frac{N_d}{bh\sigma_{cd}} \quad \mu = \frac{M_d}{bh^2\sigma_{cd}}$$

$$A_s = \frac{\omega bh\sigma_{cd}}{f_{yd}}$$



Valores de ω

		$\mu \downarrow$								
$v \downarrow$		0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80
0,00	0,00	0,00	0,24	0,54	0,89	1,26	1,66	2,09	2,52	2,95
0,10	0,00	0,15	0,47	0,83	1,23	1,66	2,09	2,52	2,95	2,95
0,20	0,00	0,06	0,41	0,81	1,23	1,66	2,09	2,53	2,96	2,96
0,30	0,00	0,00	0,37	0,80	1,23	1,66	2,10	2,53	2,97	2,97
0,40	0,00	0,00	0,35	0,79	1,22	1,66	2,10	2,54	2,97	2,97
0,50	0,00	0,00	0,35	0,78	1,22	1,66	2,10	2,54	2,98	2,98
0,60	0,00	0,00	0,39	0,84	1,26	1,68	2,11	2,55	2,99	2,99
0,70	0,00	0,00	0,44	0,90	1,33	1,75	2,17	2,59	3,01	3,01
0,80	0,00	0,07	0,51	0,96	1,40	1,82	2,25	2,67	3,09	3,09
0,90	0,00	0,16	0,58	1,03	1,47	1,90	2,32	2,74	3,16	3,16
1,00	0,00	0,26	0,65	1,10	1,54	1,97	2,40	2,82	3,24	3,24
1,10	0,11	0,37	0,74	1,17	1,61	2,04	2,47	2,90	3,32	3,32
1,20	0,22	0,47	0,82	1,25	1,69	2,12	2,55	2,97	3,39	3,39
1,30	0,33	0,57	0,91	1,33	1,76	2,20	2,63	3,05	3,47	3,47
1,40	0,43	0,68	1,00	1,41	1,84	2,27	2,70	3,13	3,55	3,55
1,50	0,54	0,78	1,09	1,49	1,92	2,35	2,78	3,21	3,63	3,63
1,60	0,65	0,89	1,18	1,58	2,00	2,43	2,86	3,29	3,71	3,71
1,70	0,76	1,00	1,28	1,66	2,08	2,51	2,94	3,37	3,79	3,79
1,80	0,87	1,10	1,38	1,75	2,17	2,59	3,02	3,45	3,87	3,87
1,90	0,98	1,21	1,49	1,84	2,25	2,67	3,10	3,53	3,95	3,95
2,00	1,09	1,32	1,59	1,93	2,33	2,76	3,18	3,61	4,03	4,03



$$v_d = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$$

$$\mu_d = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}}$$

$$\varpi = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$$

- Momento em relação ao eixo y:

Momento mínimo de 1ª ordem:

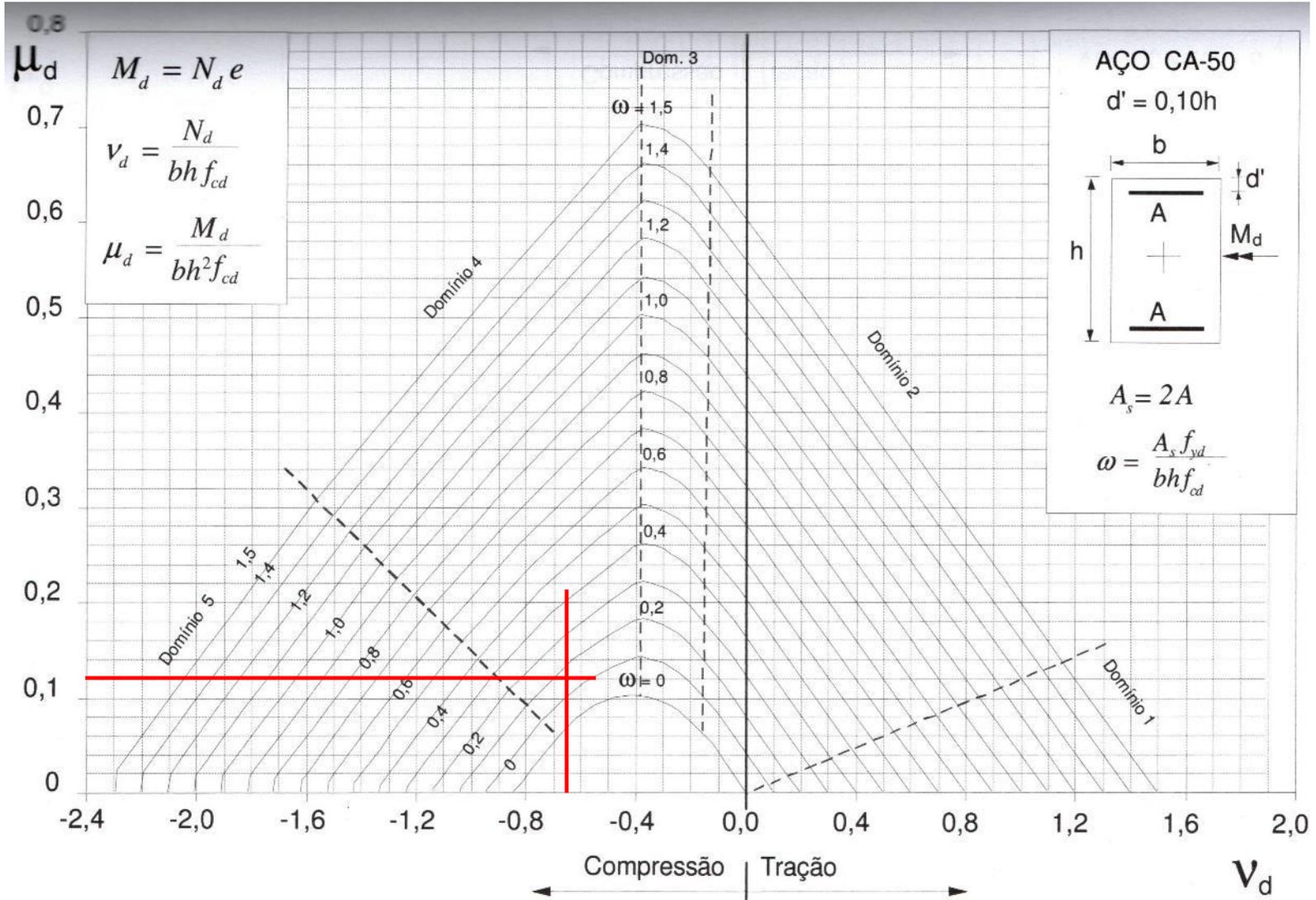
$$M_{1d, \min, b} = 1400 \cdot 0,024 = 33,6 \text{ kNm}$$

Momento total:

$$M_{d, \text{tot}, y} = 1,4 \cdot 30 + 33,6 = 75,6 \text{ kNm}$$



Diagramas de Interação





- Valores mínimos:

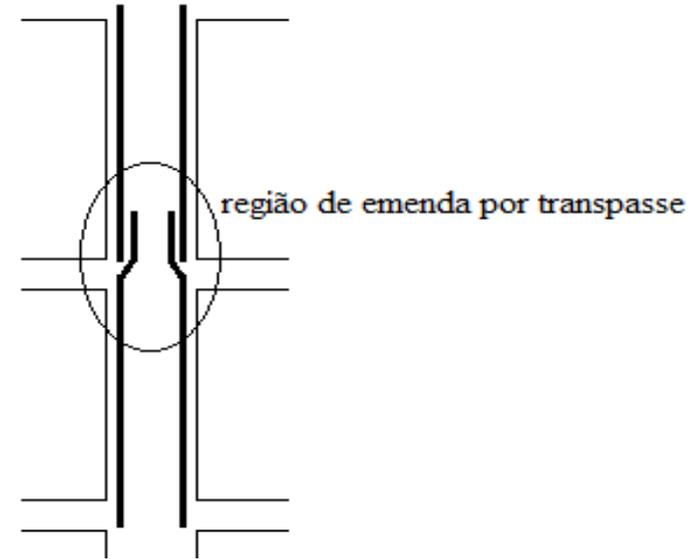
$$A_{s,min} = 0,15 \frac{N_{sd}}{f_{yd}} \geq 0,004 \cdot A_c$$

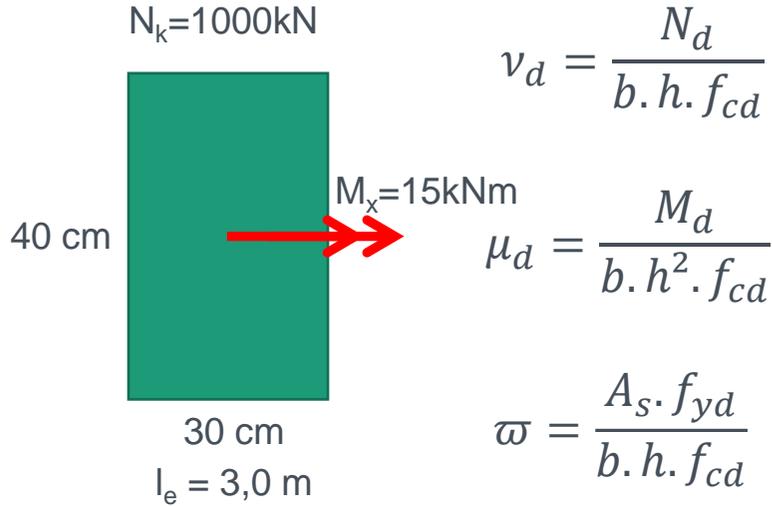
- Valores máximos: A taxa deve ser inferior a 8% da área de concreto A_c , inclusive na região de emenda por transpasse, portanto:

$$A_{s,máx} = 0,04 \cdot A_c$$

- Diâmetro:

$$10 \text{ mm} \leq \phi_l \leq \frac{b}{8}$$





- Momento em relação ao eixo x:

Momento mínimo de 1ª ordem:

$$M_{1d,min,h} = 1400 \cdot 0,027 = 37,8 \text{ kNm}$$

Momento total:

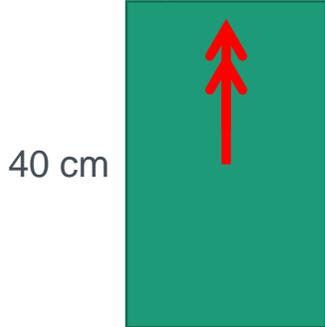
$$M_{d,tot,y} = 1,4 \cdot 15 + 37,8 = 58,8 \text{ kNm}$$



Exemplo: Flexão composta reta

$$N_k = 1000 \text{ kN}$$

$$M_y = 30 \text{ kNm}$$



30 cm

$$l_e = 3,0 \text{ m}$$

$$N_k = 1000 \text{ kN}$$

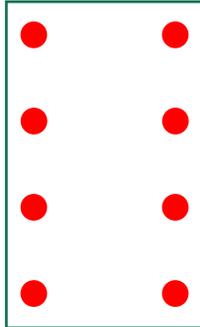


30 cm

$$l_e = 3,0 \text{ m}$$

$$M_x = 15 \text{ kNm}$$

$$A_s = 7,39 \text{ cm}^2 \rightarrow 8 \phi 12,5 \text{ mm}$$



$$A_{s,min} = 4,83 \text{ cm}^2 \rightarrow 4 \phi 12,5 \text{ mm}$$

$$A_{s,min} = 0,15 \frac{N_{sd}}{f_{yd}} \geq 0,004 \cdot A_c$$

$$A_{s,min} = 4,83 \text{ cm}^2 \geq 4,8 \text{ cm}^2$$

$$A_{s,máx} = 0,04 \cdot A_c$$

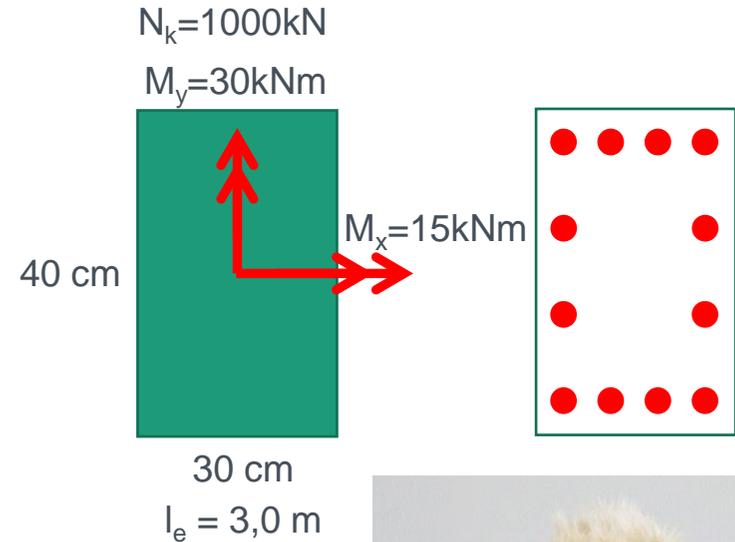
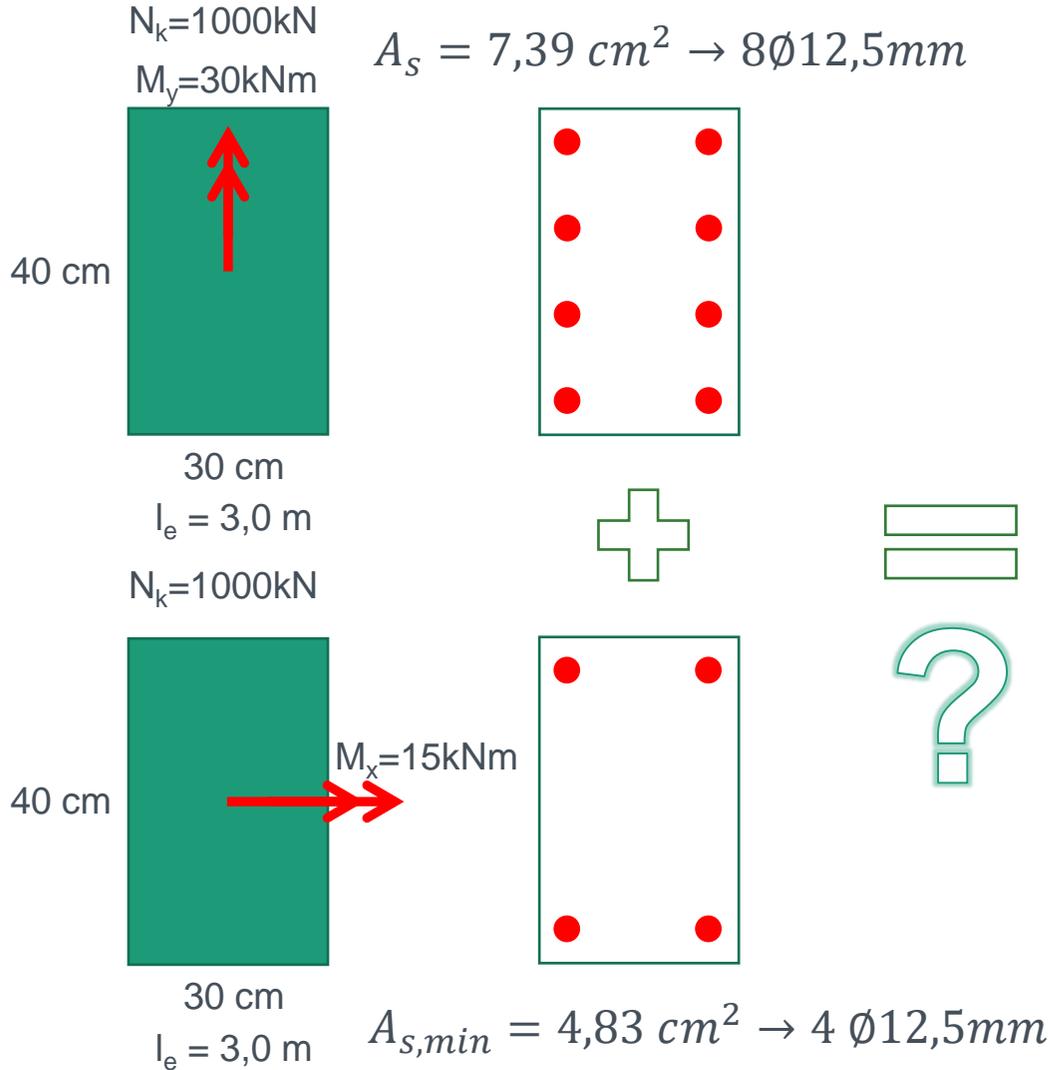
$$A_{s,máx} = 48 \text{ cm}^2$$

$$10 \text{ mm} \leq \phi_l \leq \frac{b}{8}$$

$$10 \text{ mm} \leq \phi_l \leq 37,5 \text{ mm}$$

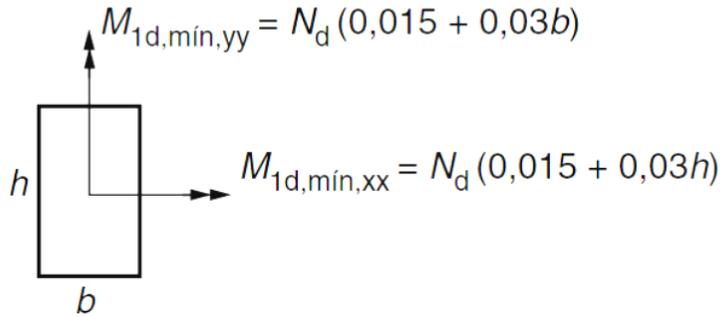


Exemplo: Flexão composta reta





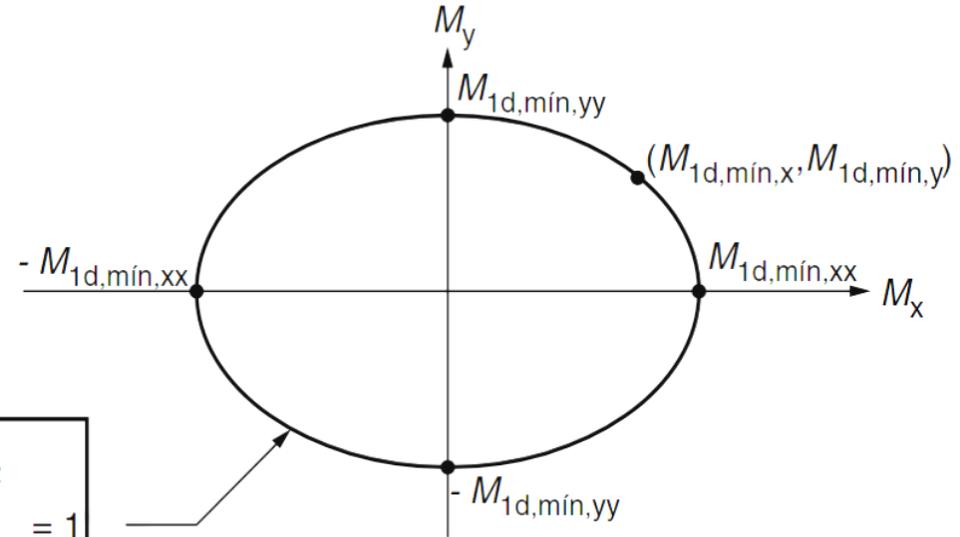
- Envoltória:



(Seção transversal)

$$\left(\frac{M_{1d,min,x}}{M_{1d,min,xx}}\right)^2 + \left(\frac{M_{1d,min,y}}{M_{1d,min,yy}}\right)^2 = 1$$

(Envoltória mínima de 1ª ordem)

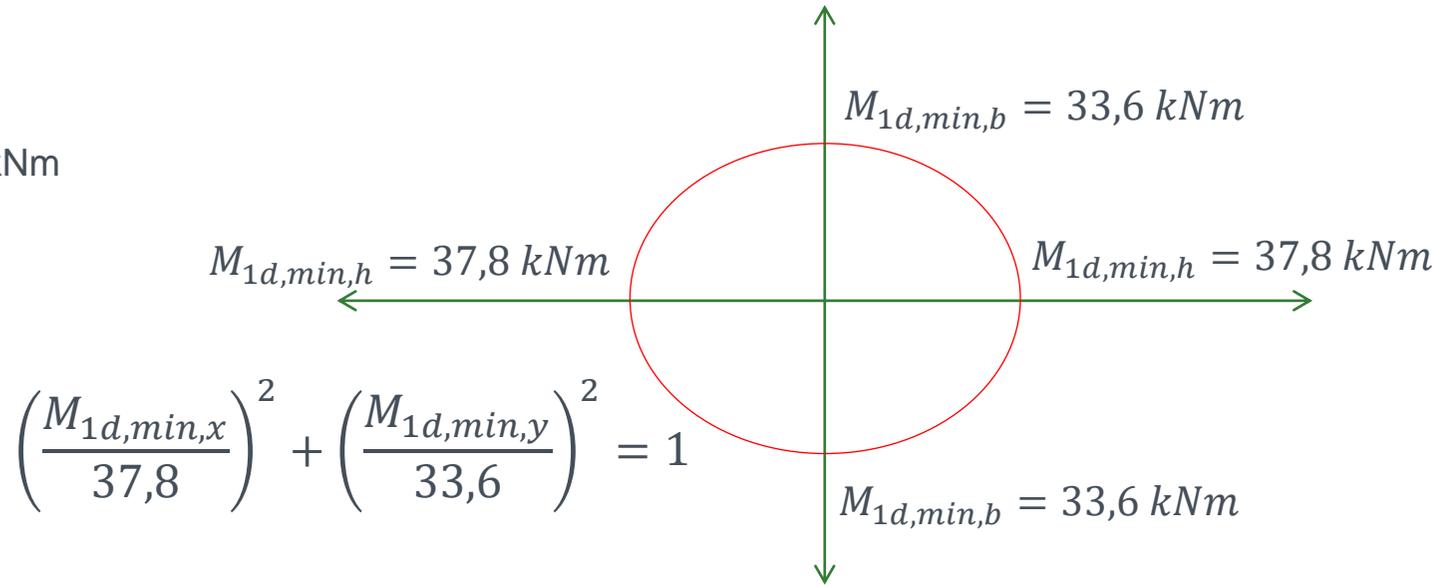
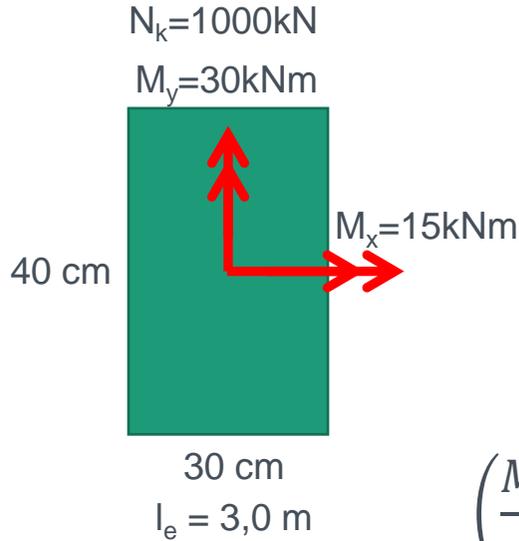


Sendo: $M_{1d,min,xx}$ e $M_{1d,min,yy}$ as componentes em flexão composta normal e

$M_{1d,min,x}$ e $M_{1d,min,y}$ as componentes em flexão composta oblíqua



Exemplo: Pilar curto



- Momento em relação ao eixo y:

Momento mínimo de 1ª ordem:

$$M_{1d,min,b} = 1400 \cdot 0,024 = 33,6 \text{ kNm}$$

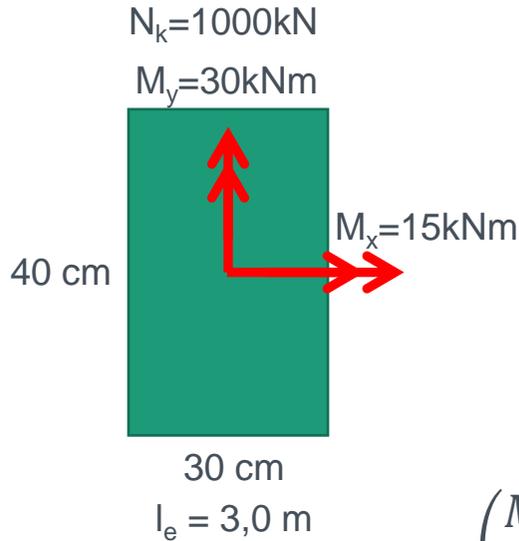
- Momento em relação ao eixo x:

Momento mínimo de 1ª ordem:

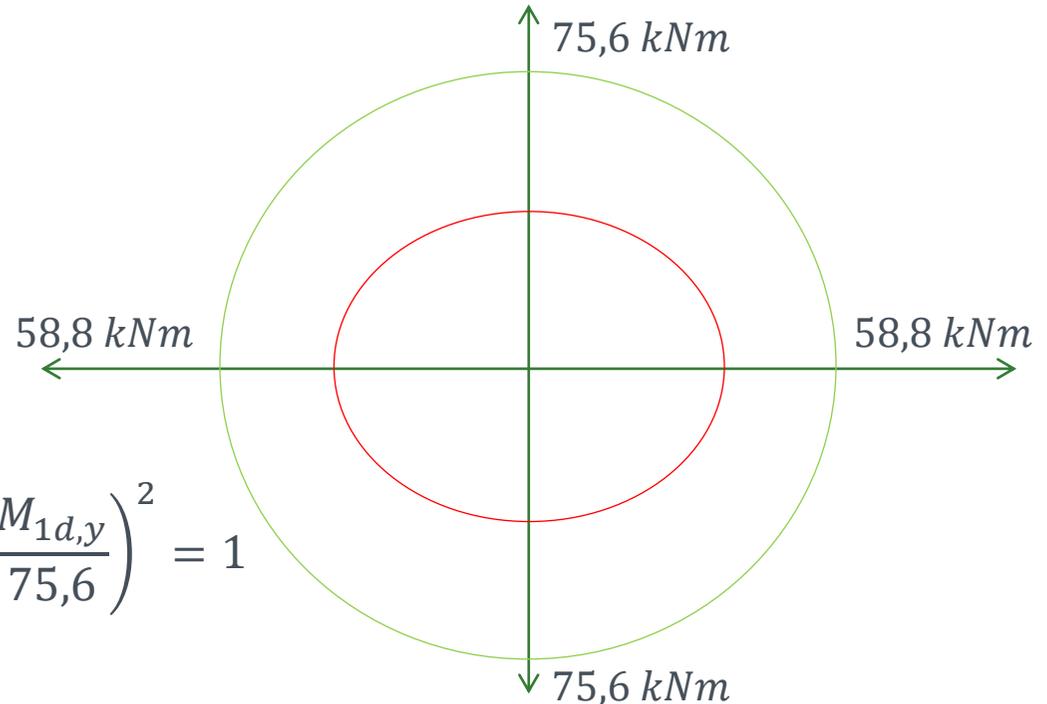
$$M_{1d,min,h} = 1400 \cdot 0,027 = 37,8 \text{ kNm}$$



Exemplo: Pilar curto



$$\left(\frac{M_{1d,x}}{58,8}\right)^2 + \left(\frac{M_{1d,y}}{75,6}\right)^2 = 1$$



- Momento em relação ao eixo y:

Momento mínimo de 1ª ordem:

$$M_{1d,min,b} = 1400 \cdot 0,024 = 33,6 \text{ kNm}$$

Momento total:

$$M_{d,tot,y} = 1,4 \cdot 30 + 33,6 = 75,6 \text{ kNm}$$

- Momento em relação ao eixo x:

Momento mínimo de 1ª ordem:

$$M_{1d,min,h} = 1400 \cdot 0,027 = 37,8 \text{ kNm}$$

Momento total:

$$M_{d,tot,x} = 1,4 \cdot 15 + 37,8 = 58,8 \text{ kNm}$$

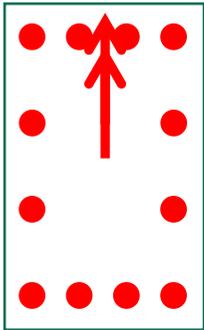


Exemplo: Flexão composta reta

$N_k=1000\text{kN}$

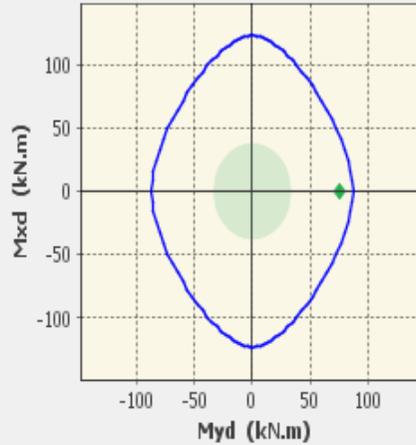
$M_y=30\text{kNm}$

40 cm



30 cm

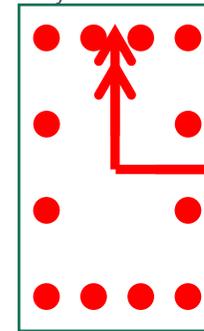
Diagrama de Interação N, Mx, My (FCO)



$N_k=1000\text{kN}$

$M_y=30\text{kNm}$

40 cm



$M_x=15\text{kNm}$

30 cm

Diagrama de Interação N, Mx, My (FCO)

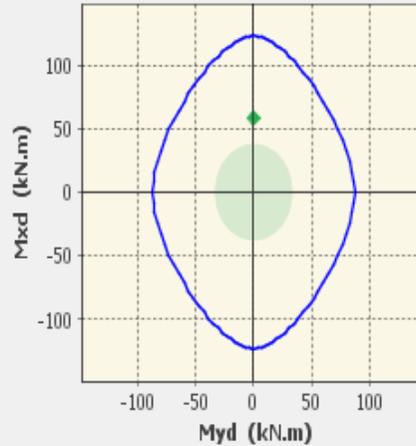
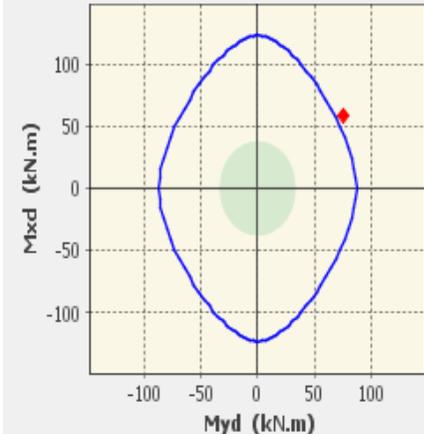
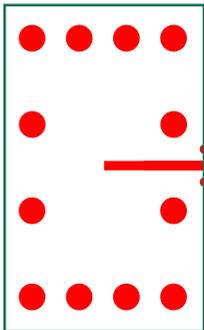


Diagrama de Interação N, Mx, My (FCO)



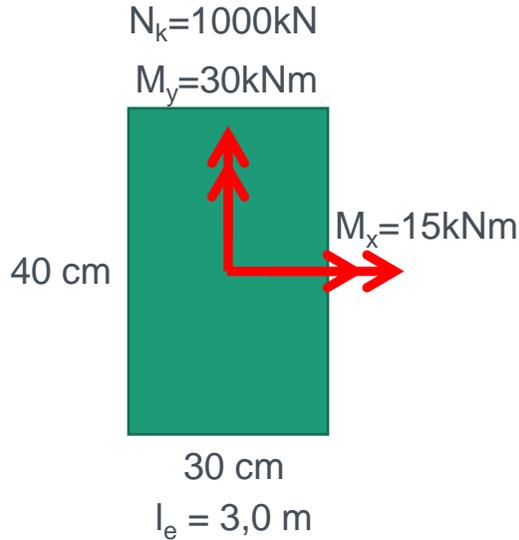
$N_k=1000\text{kN}$

40 cm



$M_x=15\text{kNm}$

30 cm



- Cálculo dos momentos:

$$e_{1min,b} = 0,015 \text{ m} + 0,03 \cdot 0,3 = 0,024 \text{ m} = 24 \text{ mm}$$

$$e_{1min,h} = 0,015 \text{ m} + 0,03 \cdot 0,4 = 0,027 \text{ m} = 27 \text{ mm}$$

$$N_d = 1,4 \cdot N_k = 1400 \text{ kN}$$

- Momento em relação ao eixo y:

Momento mínimo de 1ª ordem:

$$M_{1d,min,b} = 1400 \cdot 0,024 = 33,6 \text{ kNm}$$

Momento total:

$$M_{d,tot,y} = 1,4 \cdot 30 + 33,6 = 75,6 \text{ kNm}$$

- Momento em relação ao eixo x:

Momento mínimo de 1ª ordem:

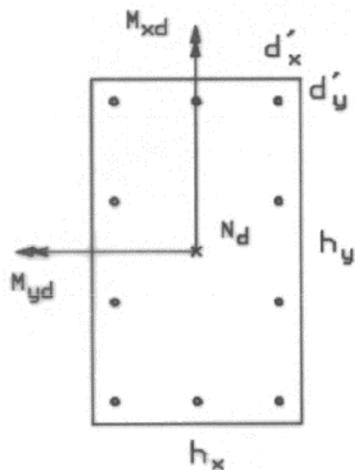
$$M_{1d,min,h} = 1400 \cdot 0,027 = 37,8 \text{ kNm}$$

Momento total:

$$M_{d,tot,y} = 1,4 \cdot 15 + 37,8 = 58,8 \text{ kNm}$$



Diagramas de Interação Flexo-compressão oblíqua



$$\nu = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$$

CA-50 A

$$\mu_x = \frac{M_{xd}}{A_c f_{cd} h_x}$$

$$d'_y = 0.100 h_y$$

$$d'_x = 0.150 h_x$$

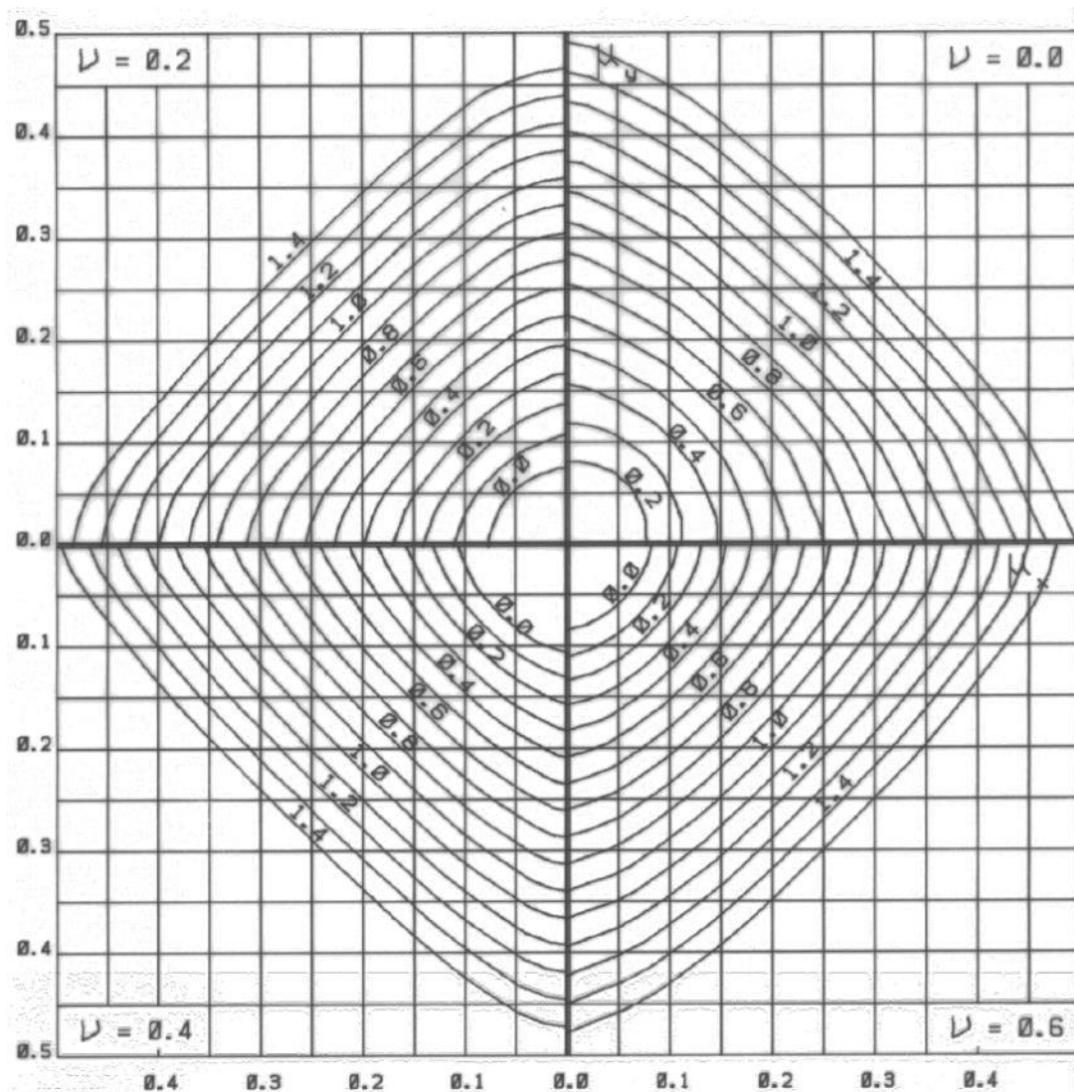
$$\mu_y = \frac{M_{yd}}{A_c f_{cd} h_y}$$

$$A_{sy} / A_s = 3/10$$

$$A_{sx} / A_s = 4/10$$

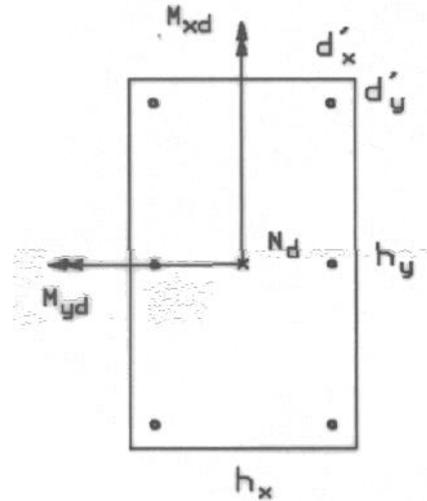
$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

$$A_c = h_x h_y$$





Diagramas de Interação Flexo-compressão oblíqua



$$\nu = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$$

$$\mu_x = \frac{M_{xd}}{A_c f_{cd} h_x}$$

$$\mu_y = \frac{M_{yd}}{A_c f_{cd} h_y}$$

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

CA-50 A

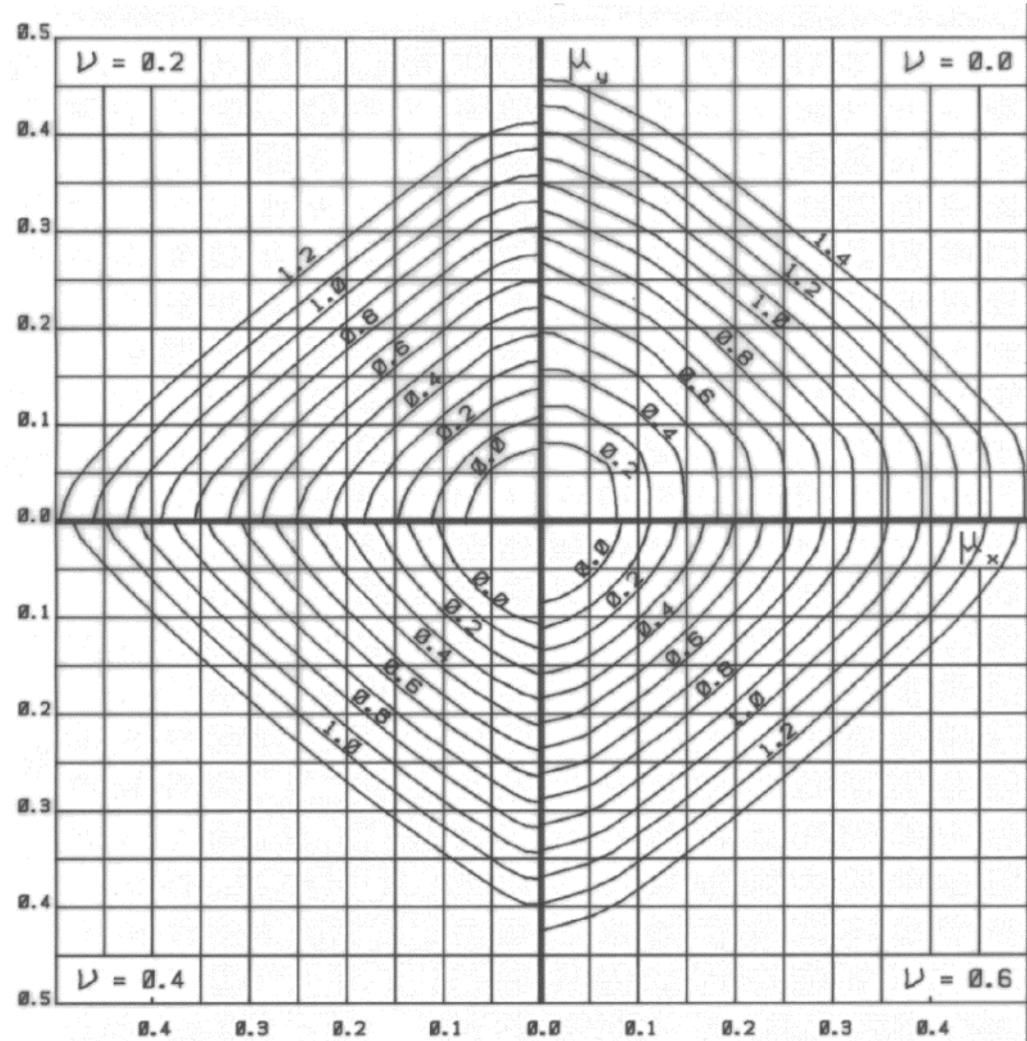
$$d'_y = 0.100 h_y$$

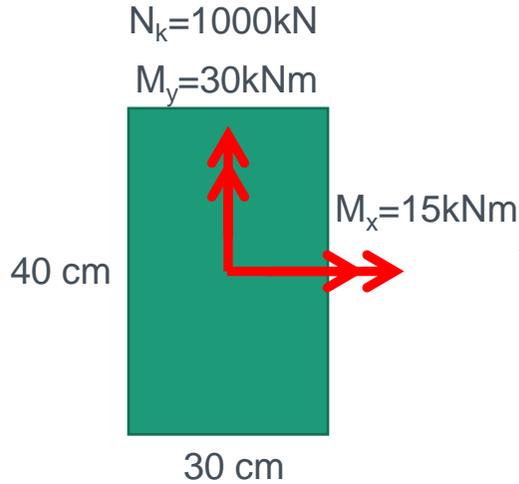
$$d'_x = 0.150 h_x$$

$$A_{sy} / A_s = 2/6$$

$$A_{sx} / A_s = 3/6$$

$$A_c = h_x h_y$$





$$\frac{d'}{h} = \frac{5}{40} = 0,125$$

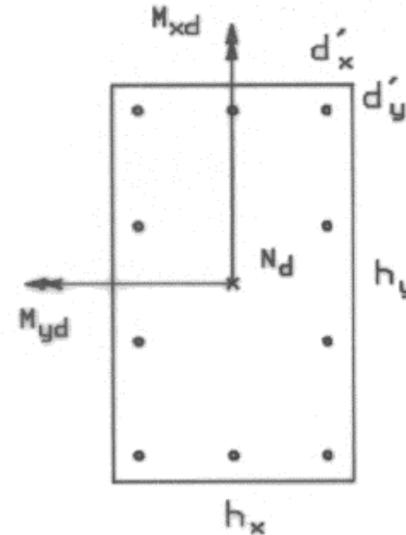
$$\frac{d'}{h} = \frac{5}{30} = 0,166$$

$$\nu = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$$

$$\mu_x = \frac{M_{xd}}{A_c f_{cd} h_x}$$

$$\mu_y = \frac{M_{yd}}{A_c f_{cd} h_y}$$

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$



CA-50 A

$$d'_y = 0,100 h_y$$

$$d'_x = 0,150 h_x$$

$$A_{sy} / A_s = 3/10$$

$$A_{sx} / A_s = 4/10$$

$$A_c = h_x h_y$$

Momento total:

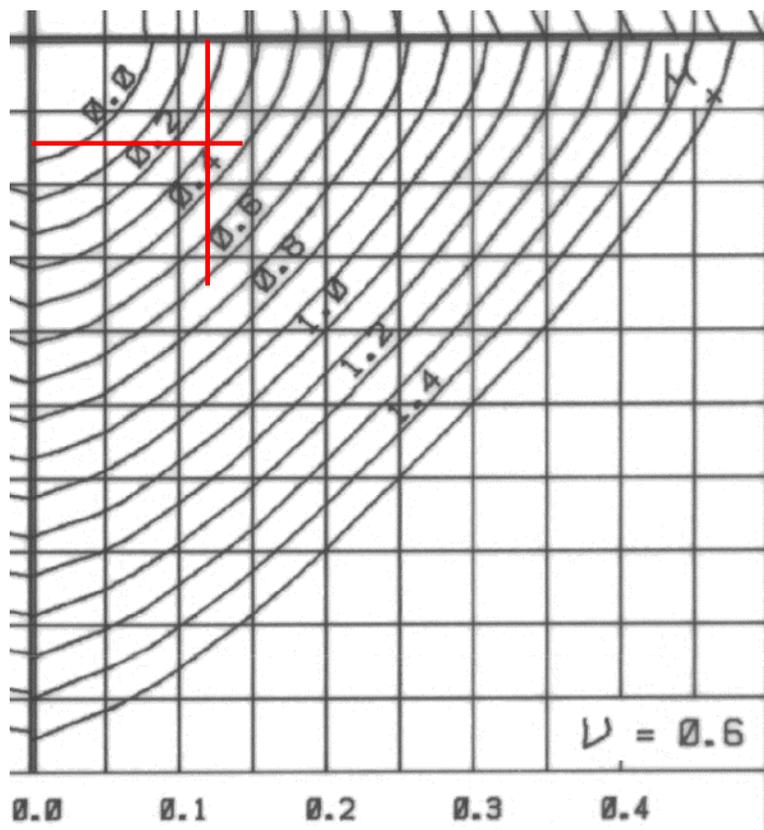
$$M_{d,tot,y} = 1,4 \cdot 30 + 33,6 = 75,6 \text{ kNm}$$

Momento total:

$$M_{d,tot,y} = 1,4 \cdot 15 + 37,8 = 58,8 \text{ kNm}$$



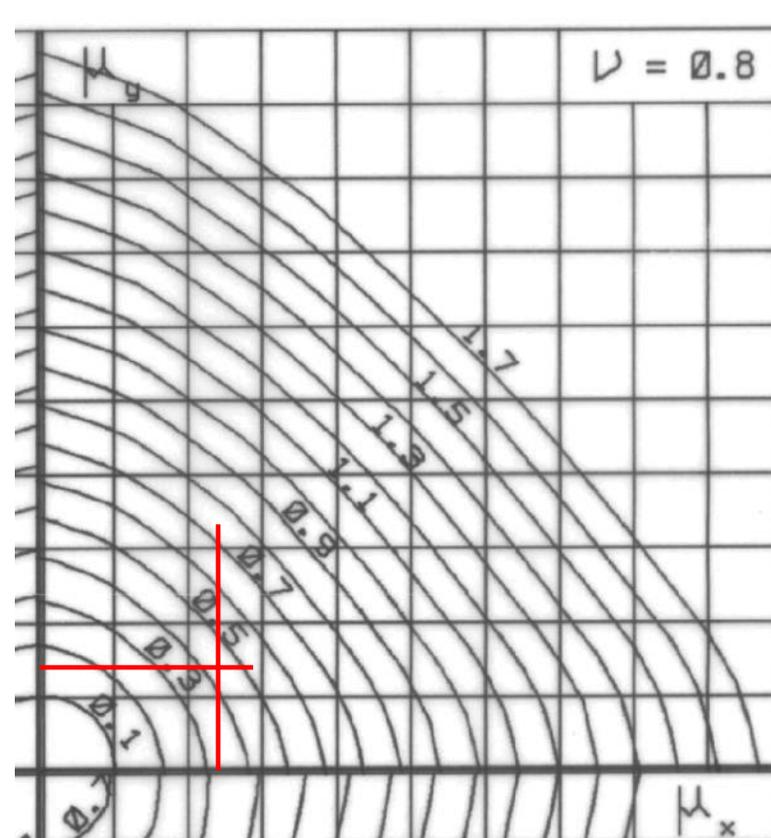
Diagramas de Interação Flexo-compressão oblíqua



$$\omega = 0,30$$

$$\nu_d = 0,65$$

$$\omega = 0,34$$



$$\omega = 0,44$$



- 17.2.5 Processo aproximado

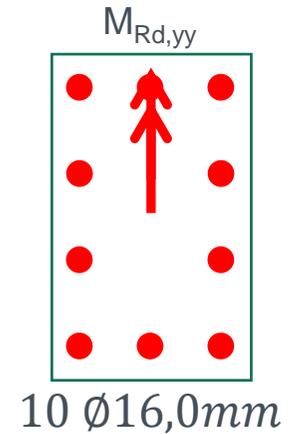
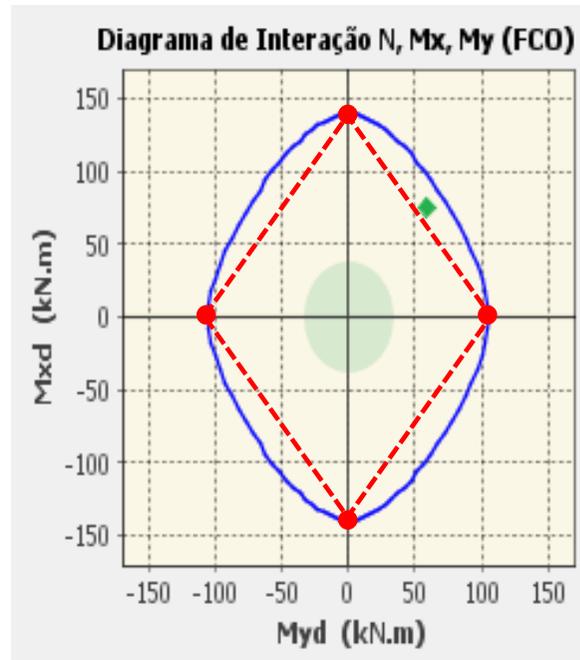
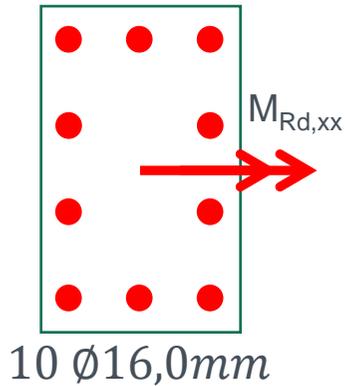
$$\left[\frac{M_{Rd,x}}{M_{Rd,xx}} \right]^\alpha + \left[\frac{M_{Rd,y}}{M_{Rd,yy}} \right]^\alpha = 1$$

- $M_{Rd,x}$ e $M_{Rd,y}$: momento resistente de cálculo em flexão oblíqua composta, segundo os dois eixos principais de inércia x e y, da seção bruta, com um esforço normal resistente de cálculo igual à normal solicitante. Valores a serem obtidos.
- $M_{Rd,xx}$ e $M_{Rd,yy}$: momentos resistentes de cálculo segundo cada um dos referidos eixos em flexão composta normal, com o mesmo valor de N_{Rd} . Esses valores são calculados a partir do arranjo e da quantidade de armadura em estudo.
- α : depende da seção, força normal, armaduras. $\alpha = 1$ a favor da segurança e $\alpha = 1,2$ para seções retangulares.



- 17.2.5 Processo aproximado

$$\left[\frac{M_{Rd,x}}{M_{Rd,xx}} \right]^1 + \left[\frac{M_{Rd,y}}{M_{Rd,yy}} \right]^1 = 1$$





- Clímaco, J. C. T. S. Estruturas de concreto armado. Fundamentos de projeto, dimensionamento e verificação. 3ª edição. Rio de Janeiro: Elsevier, 2016.
- Araújo, J. M. Curso de concreto armado. Volume 3. Rio Grande: Dunas, 2003.
- Pinheiro, L. M.; Baraldi, L. T.; Porem, M. E. Estruturas de concreto: Ábacos para flexão oblíqua. São Carlos: USP, 2009.
- Venturini, W. S.; Rodrigues, R. O. Dimensionamento de peças retangulares de concreto armado solicitadas à flexão reta. São Carlos: USP, 1987.