Demonstração pelo princípio da indução finita:

I) Para $n = 1$, temos: $a_1 = a_1 + (1 - 1) \cdot r$ (sentença verdadeira).

II) Admitamos a validade da fórmula para $n = p$: $a_p = a_1 + (p - 1) \cdot r$ (hipótese de indução) e provemos que vale para $n = p + 1$:

$a_{p+1} = a_p + r = (a_1 + (p - 1) \cdot r) + r = a_1 + [(r + 1) - 1] \cdot r$

Então $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCÍCIOS

29. Calcule o 17º termo da P.A. cujo primeiro termo é 3 e cuja razão é 5.

Solução

Notando que $a_1 = 3$ e $r = 5$, apliquemos a fórmula do termo geral:

$a_{17} = a_1 + 16r = 3 + 16 \cdot 5 = 83$

30. Obtenha o 12º, o 27º e o 100º termos da P.A. (2, 5, 8, 11, ...).

31. Obtenha a razão da P.A. em que o primeiro termo é -8 e o vigésimo é 30.

Solução

$a_{20} = a_1 + 19r \Rightarrow 30 = -8 + 19r \Rightarrow r = 2$

32. Obtenha a razão da P.A. em que $a_2 = 9$ e $a_{14} = 45$.

33. Obtenha o primeiro termo da P.A. de razão 4 cujo 23º termo é 86.

34. Qual é o termo igual a 60 na P.A. em que o 2º termo é 24 e a razão é 2?

35. Obtenha a P.A. em que $a_{10} = 7$ e $a_{12} = -8$.

Solução

Para escrever a P.A. é necessário determinar a_1 e *r*.

Temos:

$$\begin{cases} a_{10} = 7 \Rightarrow a_1 + 9r = 7 & (1) \\ a_{12} = -8 \Rightarrow a_1 + 11r = -8 & (2) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$(2) - (1) \Rightarrow 2r = -15 \Rightarrow r = -\frac{15}{2}$$

$$(1) \Rightarrow a_1 + 9\left(-\frac{15}{2}\right) = 7 \Rightarrow a_1 = \frac{149}{2}$$

e, portanto, a P.A. é $\left(\frac{149}{2}, \frac{134}{2}, \frac{119}{2}, \ldots\right)$.

36. Determine a P.A. em que o 6º termo é 7 e o 10º é 15.

37. Qual é a P.A. em que o 1º termo é 20 e o 9º termo é 44?

38. Determine a P.A. em que se verificam as relações:

$a_{12} + a_{21} = 302$ e $a_{23} + a_{46} = 446$.

39. Quantos números ímpares há entre 14 e 192?

40. Determine a relação que deve existir entre os números *m*, *n*, *p* e *q*, para que se verifique a seguinte igualdade entre os termos da mesma progressão aritmética:

$a_m + a_n = a_p + a_q$.

41. Qual é o primeiro termo negativo da P.A. (60, 53, 46, ...)?

Solução

Temos:

$$a_n < 0 \Rightarrow a_1 + (n-1)r < 0 \Rightarrow 60 + (n-1)(-7) < 0 \Rightarrow n - 1 > \frac{60}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n > \frac{67}{7} \cong 9{,}5.$$

Concluímos que $a_n < 0$ para $n = 10, 11, 12, \ldots$; portanto, o primeiro termo negativo da P.A. é a_{10}.

42. As progressões aritméticas 5, 8, 11, ... e 3, 7, 11, ... têm 100 termos cada uma. Determine o número de termos iguais nas duas progressões.

23. $x_1 = 2\sqrt{2} - 1$

25. Demonstração

26. Demonstração

27. Demonstração

28. Demonstração

30. 35, 80 e 299

32. $r = 3$

33. $a_1 = -2$

34. a_{20}

36. $(-3, -1, 1, 3, ...)$

37. (20, 23, 26, ...)

38. (89, 93, 97, ...)

39. $n = 89$

40. $m + n = p + q$

42. $n = 25$

43. $a = 9$

44. $f(2) = 7$

45. Demonstração

46. Demonstração

47. Demonstração

49. 43 termos

50. $r = \frac{100}{13}$

51. 69

52. 601

53. 849 números

54. 6171

55. $a_6 = 30$

56. $r = n - 1$

59. $S_{350} = 61425$

60. $S_{120} = 14520$; $S_n = n(n + 1)$

61. $S_{12} = 600$

62. $S_n = \frac{1-n}{2}$

64. $S_{23} = 31$

65. $a_6 = 2$

66. $r = 5$

67. $a_6 = a_{15} = -1{,}5$

68. $S_{26} = 1040$

69. $S_{30} = 0$

70. 8 m

71. 1820 m

72. $n = 8$

73. $n = 30$

74. 16

75. 14662

76. $a_1 = -\frac{3410}{59}$; $r = 2$

77. $a_1 = -\frac{1}{2}$; $r = 3$

78. $\frac{259}{262}$

80. $S = 4549050$

81. $S = 7142135$