

EXERCÍCIOS

57. Calcule a soma dos 25 termos iniciais da P.A. (1, 7, 13, ...).

Solução

Sendo $a_1 = 1$ e $r = 6$, temos:

$$a_{35} = a_1 + 24 \cdot r = 1 + 24 \cdot 6 = 145$$

$$S_{25} = \frac{25(a_1 + a_{25})}{2} = \frac{25(1 + 145)}{2} = 1825.$$

58. Obtenha a soma dos 200 primeiros termos da sequência dos números ímpares positivos. Calcule também a soma dos n termos iniciais da mesma sequência.

Solução

A sequência (1, 3, 5, ...) é uma P.A. em que $a_1 = 1$ e $r = 2$, então:

$$a_{200} = a_1 + 199 \cdot r = 1 + 199 \cdot 2 = 399$$

$$S_{200} = \frac{200(a_1 + a_{200})}{2} = \frac{200(1 + 399)}{2} = 40000$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)r = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(1 + 2n - 1)}{2} = n^2$$

59. Qual é a soma dos números inteiros de 1 a 350?
60. Qual é a soma dos 120 primeiros números pares positivos? E a soma dos n primeiros?
61. Obtenha a soma dos 12 primeiros termos da P.A. (6, 14, 22, ...).
62. Obtenha a soma dos n elementos iniciais da sequência:

$$\left(\frac{1-n}{n}, \frac{2-n}{n}, \frac{3-n}{n}, \dots \right)$$

- 63.** Determine a P.A. em que o vigésimo termo é 2 e a soma dos 50 termos iniciais é 650.

Solução

Determinar uma P.A. é obter a_1 e r . Temos:

$$a_{20} = 2 \Rightarrow a_1 + 19r = 2 \quad (1)$$

$$S_{50} = 650 \Rightarrow \frac{50(2a_1 + 49r)}{2} = 650 \Rightarrow 2a_1 + 49r = 26 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (1) e (2), obtemos $a_1 = -36$ e $r = 2$. Portanto, a P.A. procurada é $(-36, -34, -32, \dots)$.

- 64.** Qual é o 23º elemento da P.A. de razão 3 em que a soma dos 30 termos iniciais é 255?
- 65.** Uma progressão aritmética de 9 termos tem razão 2 e soma de seus termos igual a 0. Determine o sexto termo da progressão.
- 66.** O primeiro termo de uma progressão aritmética é -10 e a soma dos oito primeiros termos 60. Determine a razão.
- 67.** A soma dos vinte primeiros termos de uma progressão aritmética é -15 . Calcule a soma do sexto termo dessa P.A. com o décimo quinto termo.
- 68.** A razão de uma P.A. é igual a 8% do primeiro termo. Sabendo que o 11º termo vale 36, determine o valor da soma dos 26 primeiros termos dessa P.A.
- 69.** Se a soma dos 10 primeiros termos de uma progressão aritmética é 50 e a soma dos 20 primeiros termos também é 50, determine o valor da soma dos 30 primeiros termos.
- 70.** Um matemático (com pretensões a carpinteiro) compra uma peça de madeira de comprimento suficiente para cortar os 20 degraus de uma escada de obra. Se os comprimentos dos degraus formam uma progressão aritmética, se o primeiro degrau mede 50 cm e o último 30 cm e supondo que não há desperdício de madeira no corte, determine o comprimento mínimo da peça.
- 71.** Um jardineiro tem que regar 60 roseiras plantadas ao longo de uma vereda retilínea e distando 1 m uma da outra. Ele enche seu regador numa fonte situada na mesma vereda, a 15 m da primeira roseira, e a cada viagem rega 3 roseiras. Começando e terminando na fonte, qual é o percurso total que ele terá que caminhar até regar todas as roseiras?

- 72.** Numa progressão aritmética limitada em que o 1º termo é 3 e o último 31, a soma de seus termos é 136. Determine o número de termos dessa progressão.
- 73.** Quantos termos devem ser somados na P.A. $(-5, -1, 3, \dots)$, a partir do 1º termo, para que a soma seja 1590?
- 74.** Qual é o número mínimo de termos que devemos somar na P.A. $\left(13, \frac{45}{4}, \frac{19}{2}, \dots\right)$, a partir do 1º termo, para que a soma seja negativa?
- 75.** Ao se efetuar a soma de 50 parcelas em P.A., 202, 206, 210, ..., por distração não foi somada a 35ª parcela. Qual a soma encontrada?
- 76.** Determine uma P.A. de 60 termos em que a soma dos 59 primeiros é 12 e a soma dos 59 últimos é 130.
- 77.** Determine uma P.A. em que a soma dos 10 termos iniciais é 130 e a soma dos 50 iniciais é 3650.
- 78.** Calcule o quociente entre a soma dos termos de índice ímpar e a soma dos termos de índice par da P.A. finita $(4, 7, 10, \dots, 517)$.
- 79.** Qual é a soma dos múltiplos positivos de 5 formados por 3 algarismos?

Solução

Os múltiplos positivos de 5 formados por 3 algarismos constituem a P.A. $(100, 105, 110, \dots, 995)$, em que $a_1 = 100$, $r = 5$ e $a_n = 995$. O número de elementos dessa P.A. é n tal que:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 995 = 100 + (n - 1)5 \Rightarrow n = 180.$$

A soma dos termos da P.A. é:

$$S_{180} = \frac{180(a_1 + a_{180})}{2} = \frac{180(100 + 995)}{2} = 98\,550.$$

- 80.** Qual é a soma dos múltiplos de 11 compreendidos entre 100 e 10000?
- 81.** Qual é a soma dos múltiplos positivos de 7, com dois, três ou quatro algarismos?
- 82.** Obtenha uma P.A. em que a soma dos n primeiros termos é $n^2 + 2n$ para todo n natural.

Solução

Como $S_n = n^2 + 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$S_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow a_1 = 3$$

$$S_2 = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8 \Rightarrow a_1 + a_2 = 8 \Rightarrow a_2 = 5$$

e a P.A. é $(3, 5, 7, 9, \dots)$.

- 83.** Calcule o 1º termo e a razão de uma P.A. cuja soma dos n primeiros termos é $n^2 + 4n$ para todo n natural.
- 84.** Sendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x + 3$, calcule o valor de $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(25)$.
- 85.** Se $\sum_{x=5}^{n+5} 4(x - 3) = An^2 + Bn + C$, calcule o valor de $A + B$.
- 86.** Se numa P.A. a soma dos m primeiros termos é igual à soma dos n primeiros termos, $m \neq n$, mostre que a soma dos $m + n$ primeiros termos é igual a zero.
- 87.** Demonstre que em toda P.A., com número ímpar de termos, o termo médio é igual à diferença entre a soma dos termos de ordem ímpar e a soma dos termos de ordem par.
- 88.** Quais as progressões aritméticas nas quais a soma de dois termos quaisquer faz parte da progressão?
- 89.** Determine uma progressão aritmética de razão 1, sabendo que o número de termos é divisível por 3, que a soma dos termos é 33 e que o termo de ordem $\frac{n}{3}$ é 4.
- 90.** A soma de quatro termos consecutivos de uma progressão aritmética é -6 , o produto do primeiro deles pelo quarto é -54 . Determine esses termos.
- 91.** Prove que, se uma P.A. é tal que a soma dos seus n primeiros termos é igual a $n + 1$ vezes a metade do n ésimo termo, então $r = a_1$.

23. $x_1 = 2\sqrt{2} - 1$

25. Demonstração

26. Demonstração

27. Demonstração

28. Demonstração

30. 35, 80 e 299

32. $r = 3$

33. $a_1 = -2$

34. a_{20}

36. $(-3, -1, 1, 3, \dots)$ 37. $(20, 23, 26, \dots)$ 38. $(89, 93, 97, \dots)$

39. $n = 89$

40. $m + n = p + q$

42. $n = 25$

43. $a = 9$

44. $f(2) = 7$

45. Demonstração

46. Demonstração

47. Demonstração

49. 43 termos

50. $r = \frac{100}{13}$

51. 69

52. 601

53. 849 números

54. 6171

55. $a_6 = 30$

56. $r = n - 1$

59. $S_{350} = 61425$

60. $S_{120} = 14520$; $S_n = n(n + 1)$

61. $S_{12} = 600$

62. $S_n = \frac{1-n}{2}$

64. $S_{23} = 31$

65. $a_6 = 2$

66. $r = 5$

67. $a_6 = a_{15} = -1,5$

68. $S_{26} = 1040$

69. $S_{30} = 0$

70. 8 m

71. 1820 m

72. $n = 8$

73. $n = 30$

74. 16

75. 14662

76. $a_1 = -\frac{3410}{59}$; $r = 2$

77. $a_1 = -\frac{1}{2}$; $r = 3$

78. $\frac{259}{262}$

80. $S = 4549050$

81. $S = 7142135$

83. $a_1 = 5; r = 2$

84. $f(1) + f(2) + \dots + f(25) = 725$

85. $A + B = 12$

86. Demonstração

87. Demonstração

88. $a_1 = k \cdot r, k \in \mathbb{Z}$

89. (3, 4, 5, 6, 7, 8)

90. (-9, -4, 1, 6)

91. Demonstração

Capítulo III

93. $x = 6 - a$

94. $x = 3$

95. $a_4 = -\frac{1}{2}$

96. $x = -\frac{1}{8}$

97. $q = 3$

98. $q = 2; (2, 4, 8, 16)$

99. P.G. alternante; $q = -1$

100. a) V e) V i) V
 b) V f) V j) F
 c) F g) V l) F
 d) F h) F m) F

101. $\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$

102. (2, 10, 50, 250) ou (-3, 15, -75, 375)

103. $\left(\frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27\right)$

104. (2, 6, 18, 54, 162, 486)

105. $a = 2; b = 6; c = 18; d = 30$
ou $a = 32, b = 16, c = 8$ e $d = 0$

106. 6, 12 e 18

107. Demonstração

108. Demonstração

109. Demonstração

110. Demonstração

111. $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

112. $1 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

113. 12, 12, 12 ou 8, 12, 18
ou 6, 12, 24 ou 4, 12, 36

114. $x = k\pi$ ou $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, com k inteiro

116. $a_{100} = 2 \cdot 3^{99}$

117. $a_{21} = 3^{10}$

118. $a_4 = 1$

119. $\sqrt{3} + 1$

120. $a_1 = 64$

121. $a_6 = 4\sqrt{10}$

122. $a_1 = \frac{1}{16}; a_8 = 8$

123. 2 termos