



**INSTITUTO  
FEDERAL**  
Sul-rio-grandense  
Câmpus  
Passo Fundo

EDUCAÇÃO  
PÚBLICA  
**100%**  
GRATUITA

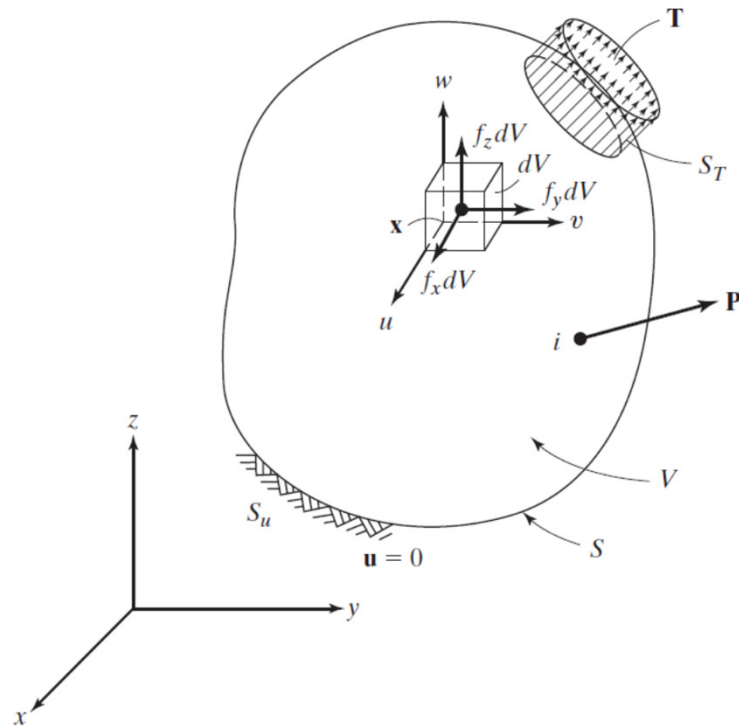
# RESISTÊNCIAS DOS MATERIAIS

## 09 – Análise de tensões

©2024 - Prof. Dr. Rodrigo Bordignon

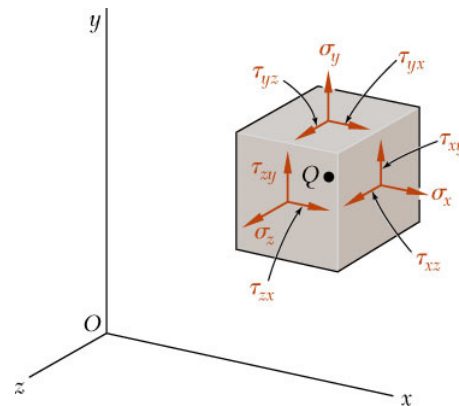
## TENSÕES E EQUILÍBRIO

- Um corpo tridimensional ocupa um volume  $V$  e tem uma superfície  $S$ ;
- Os pontos no corpo estão localizados pelas coordenadas  $x, y, z$ ;
- O limite é restringido em alguma região, onde o deslocamento é especificado;
- É aplicada uma força distribuída por unidade de área  $T$  e o corpo se deforma;
- A deformação de um ponto  $x, y, z$  é dada pelas três componentes do seu deslocamento  $(u, v, w)$ .



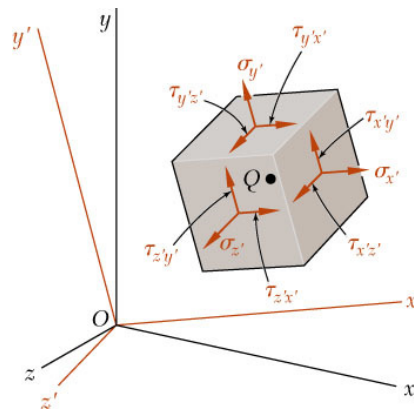
## ESTADO GERAL DE TENSÃO

- O estado mais geral de tensão em um ponto pode ser representado por seis componentes:



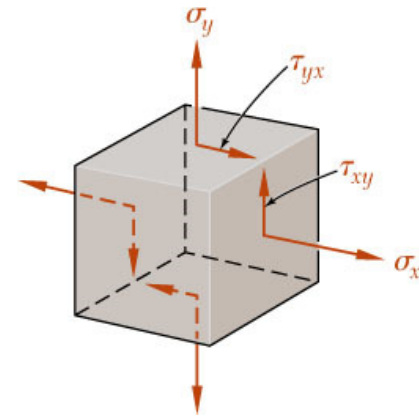
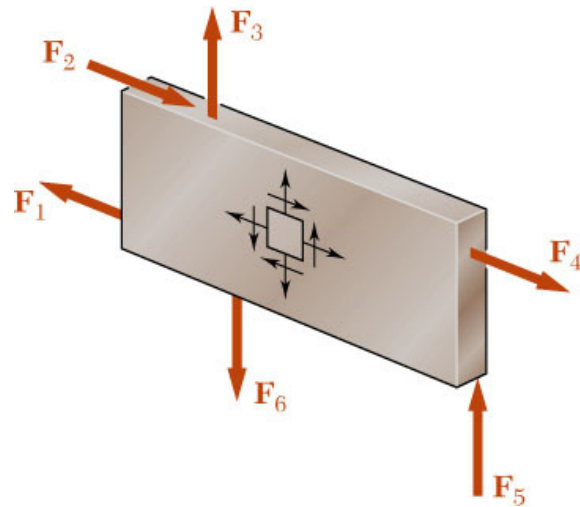
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$       Tensões normais  
 $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$       Tensões cisalhantes

- O mesmo estado de tensão é representado por um conjunto diferente de componentes se os eixos são girados.



## ESTADO PLANO DE TENSÃO

- Ocorre as forças atuam no plano médio da espessura de um elemento estrutural.



$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$$
$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

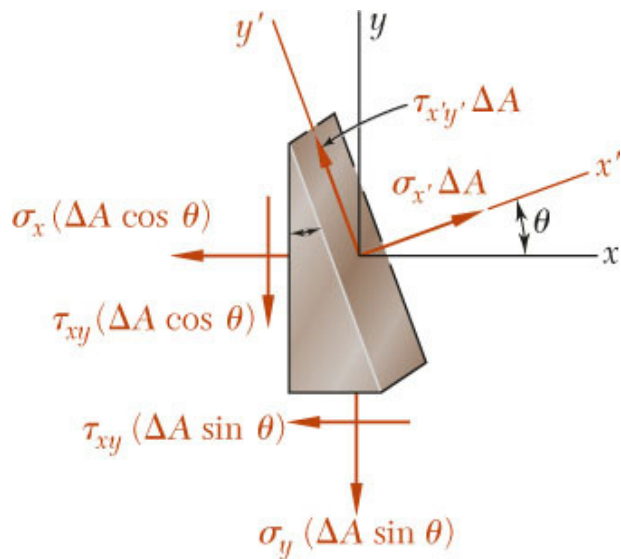
Vídeo: Estado Plano de Tensão:

<https://www.youtube.com/watch?v=78K0pbvHzjM>



## ESTADO PLANO DE TENSÃO

- Considerando as condições para o equilíbrio de um elemento prismático com faces perpendicular aos eixos  $x$ ,  $y$ , e  $x'$ .



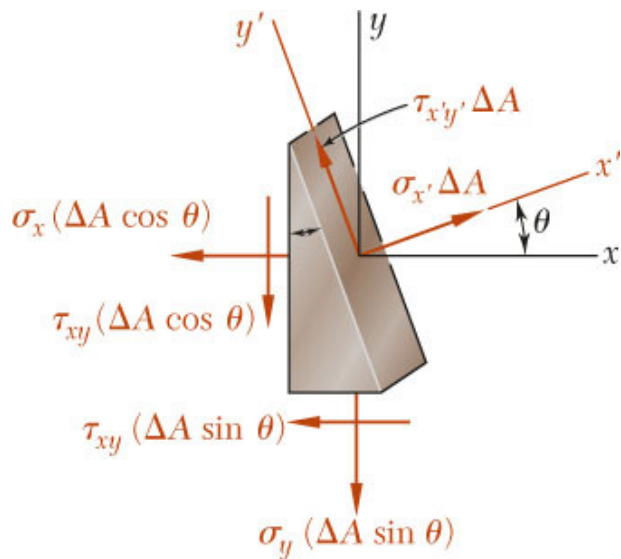
$$\sum F_{x'} = \sigma_{x'} \Delta A - \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \cos \theta = 0$$

$$\sum F_{y'} = \tau_{x'y'} \Delta A + \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \cos \theta + \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \sin \theta = 0$$



## ESTADO PLANO DE TENSÃO

- Considerando as condições para o equilíbrio de um elemento prismático com faces perpendicular aos eixos  $x$ ,  $y$ , e  $x'$ .



$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \text{sen} 2\theta$$

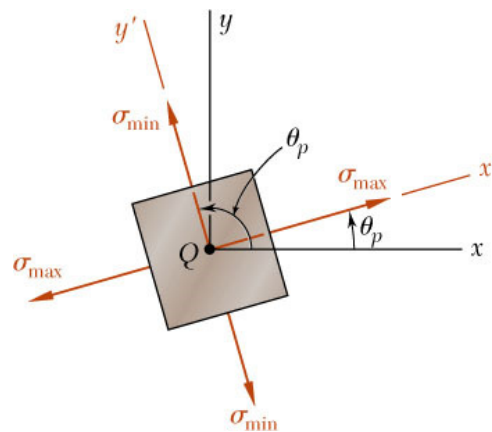
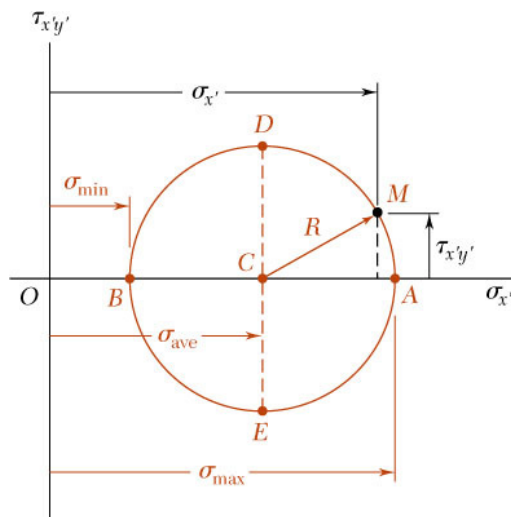
$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \text{sen} 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \text{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$



## TENSÕES PRINCIPAIS

- As equações anteriores são combinadas para produzir equações paramétricas de um círculo;
- Tensões principais ocorrem nos planos principais de tensões onde o cisalhamento é zero.



$$(\sigma_{x'} - \sigma_{méd})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2$$

$$\sigma_{méd} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

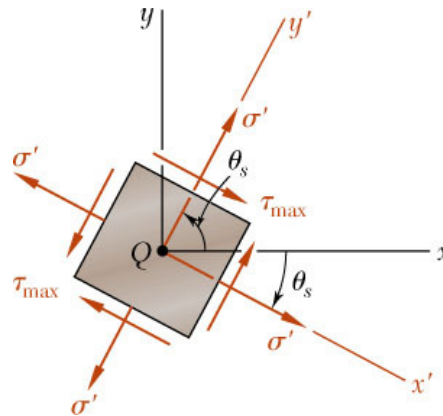
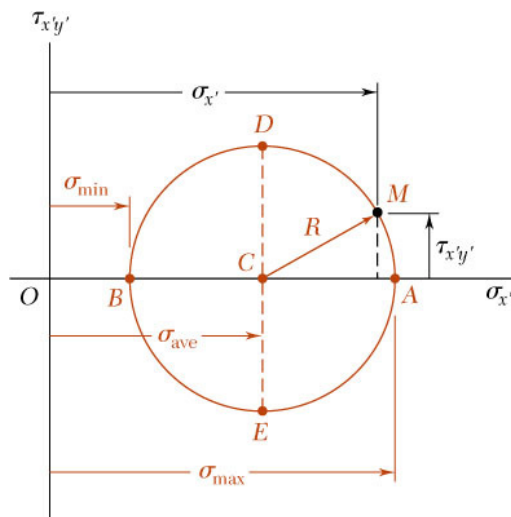
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{max, min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

## TENSÃO DE CISALHAMENTO MÁXIMA

- Os planos de tensão de cisalhamento máximo estão defasados em  $45^\circ$  dos planos principais.



$$\tau_{m\acute{a}x} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

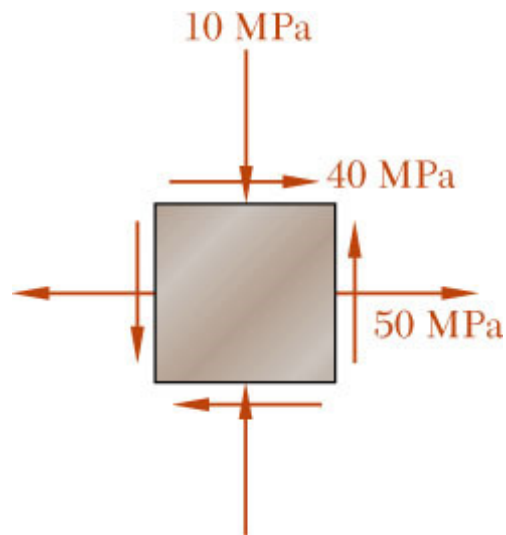
$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$$\sigma' = \sigma_{m\acute{e}d} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$



**EXEMPLO 4.1** - Para o estado plano de tensão mostrado, determine:

- (a) as tensões principais e os planos principais;
- (b) a tensão de cisalhamento máxima e a tensão normal correspondente.



$$\sigma_x = +50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = -10 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = +40 \text{ MPa}$$



(a) as tensões principais e os planos principais;

$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{50 + (-10)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{50 - (-10)}{2}\right)^2 + (40)^2}$$

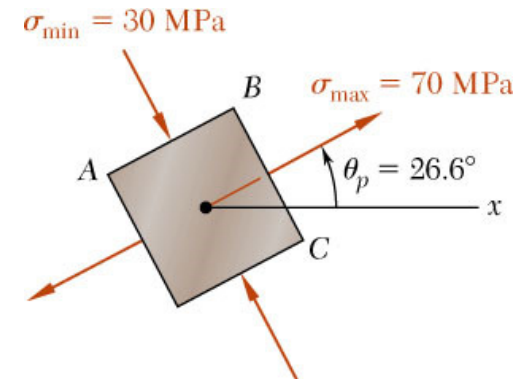
$$\sigma_{max} = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{min} = -30 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(40)}{50 - (-10)} = 1,333$$

$$2\theta_p = 53,13^\circ$$

$$\theta_p = 26,56^\circ$$



(c) a tensão de cisalhamento máxima e a tensão normal correspondente.

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{50 - (-10)}{2}\right)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$$

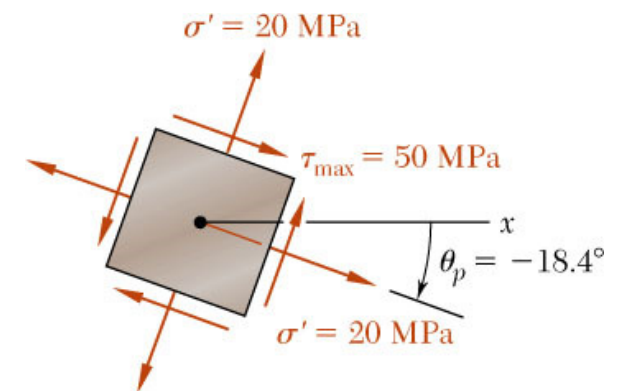
$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{50 - (-10)}{2(40)} = -0,75$$

$$2\theta_s = -36,87^\circ$$

$$\theta_s = -18,43^\circ$$

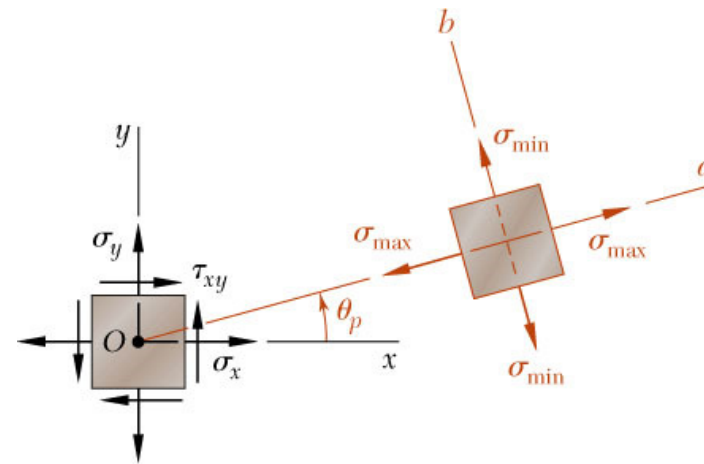
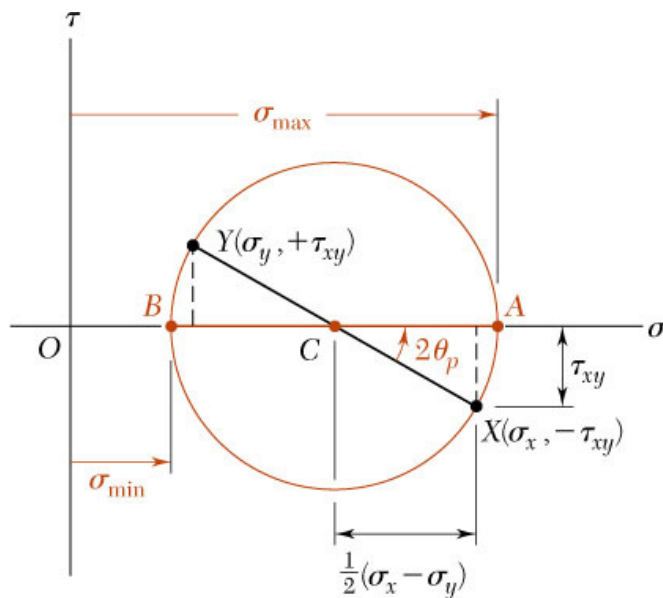
$$\theta_s = \theta_p \pm 45^\circ = -18,43^\circ; 71,56^\circ$$

$$\sigma' = \sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 + (-10)}{2} = 20 \text{ MPa}$$



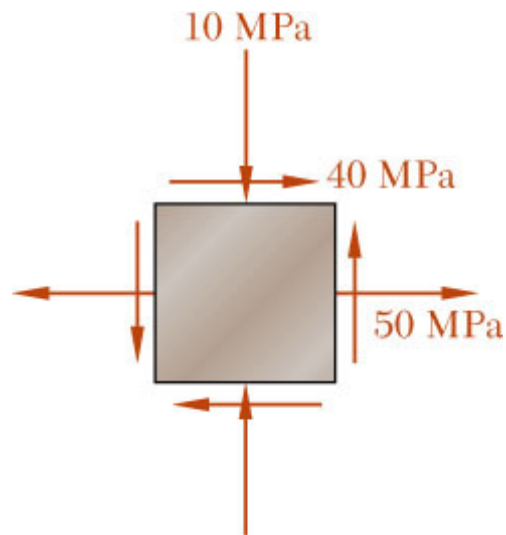
## CÍRCULO DE MOHR PARA O ESTADO PLANO DE TENSÃO

- Engenheiro alemão Otto Mohr (1835-1918);
- O significado físico do círculo de Mohr para tensão plana estabelecida, pode ser aplicado com simples considerações geométricas;
- Valores críticos são estimados graficamente ou calculados;
- Para um estado conhecido de tensão plana plotar os pontos X e Y e construir o círculo centrado em C;
- As tensões principais são obtidas em A e B.



**EXEMPLO 4.2** - Para o estado plano de tensão mostrado:

- (a) construa o círculo de Mohr;
- (b) determinar os planos principais e as tensões principais;
- (d) determinar a tensão de cisalhamento máxima e a tensão normal correspondente.



$$\sigma_x = +50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = -10 \text{ MPa}$$

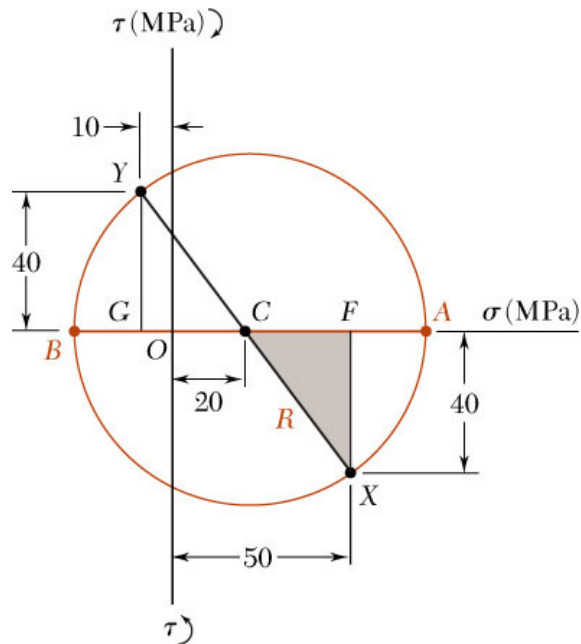
$$\tau_{xy} = +40 \text{ MPa}$$

Vídeo: Transformação de tensões e o círculo de Mohr

[https://www.youtube.com/watch?v= DH3546mSCM](https://www.youtube.com/watch?v=DH3546mSCM)



(a) construa o círculo de Mohr:



$$C = \sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{(50) + (-10)}{2} = 20 \text{ MPa}$$

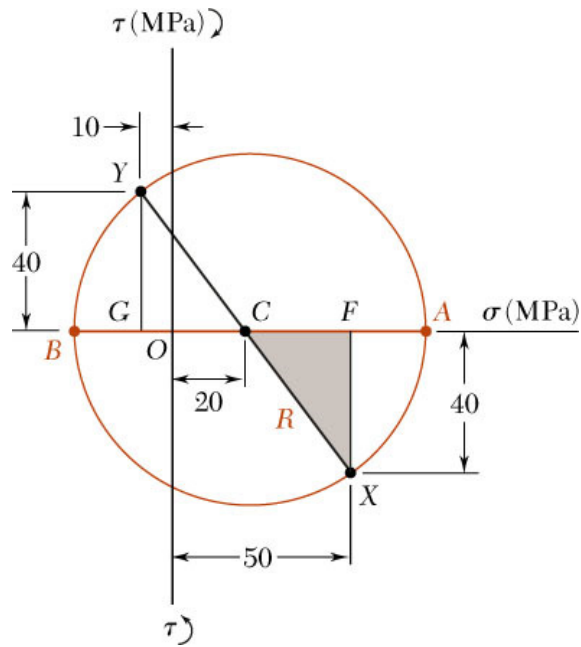
$$CF = 50 - 20 = 30 \text{ MPa}$$

$$FX = 40 \text{ MPa}$$

$$R = CX = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$$



(b) determinar os planos principais e as tensões principais:



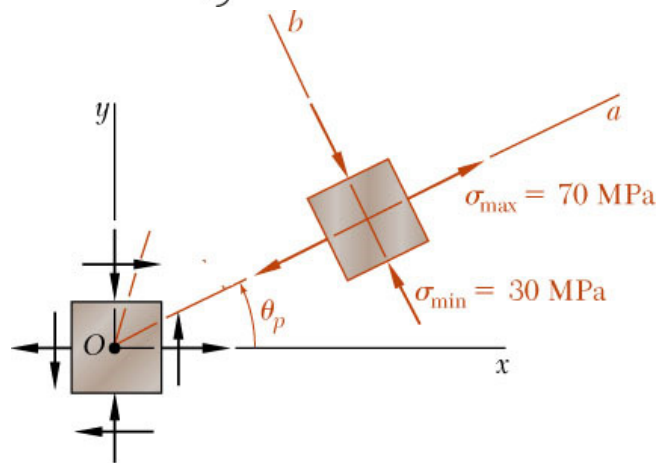
$$\sigma_{\max} = OA = OC + CA = 20 + 50 = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = OB = OC - BC = 20 - 50 = -30 \text{ MPa}$$

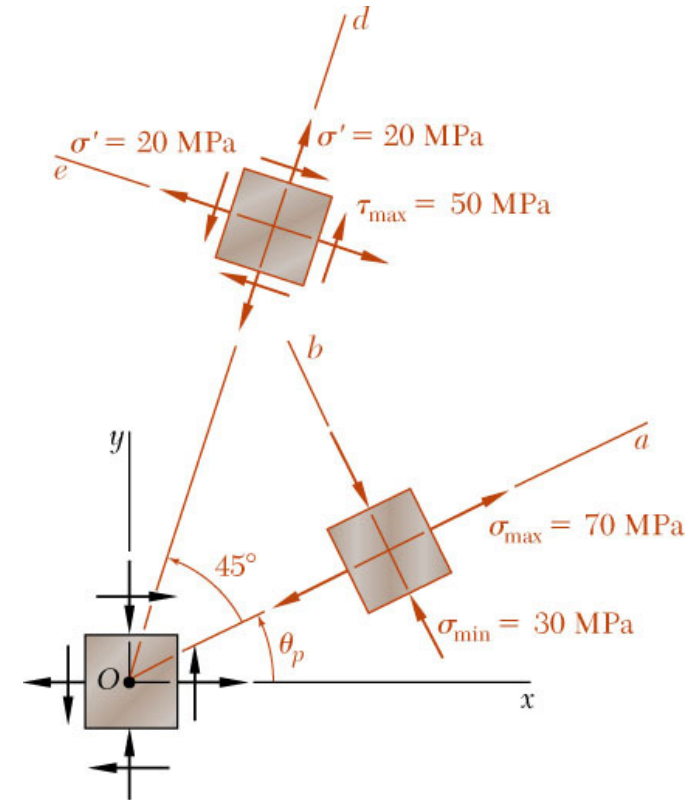
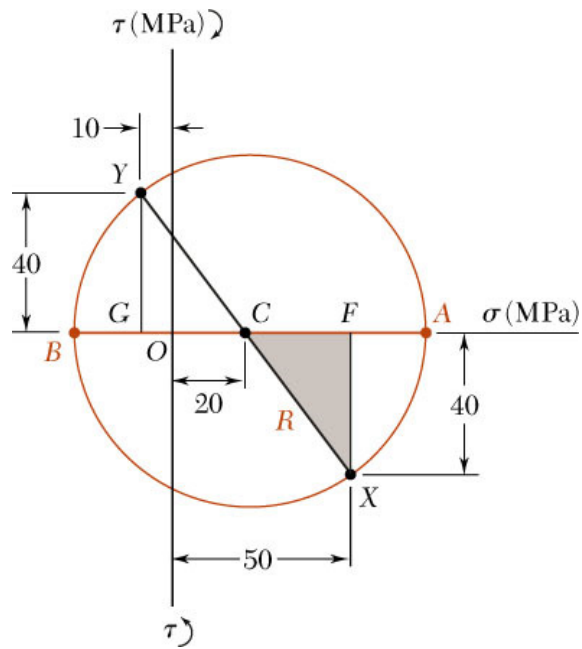
$$\tan 2\theta_p = \frac{FX}{CF} = \frac{40}{30} = 1,333$$

$$2\theta_p = 53,13^\circ$$

$$\theta_p = 26,56^\circ$$



(c) determinar a tensão de cisalhamento máxima e a tensão normal correspondente:



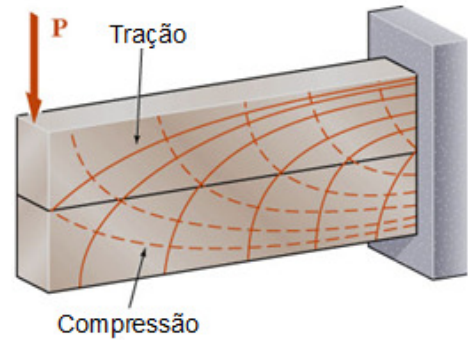
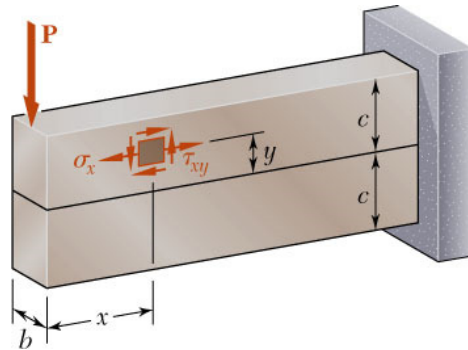
$$\tau_{\max} = R = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma' = \sigma_{\text{med}} = 20 \text{ MPa}$$

$$\theta_s = \theta_p + 45^\circ = 26,56^\circ + 45^\circ = 71,56^\circ$$



# TENSÕES PRINCIPAIS EM UMA VIGA

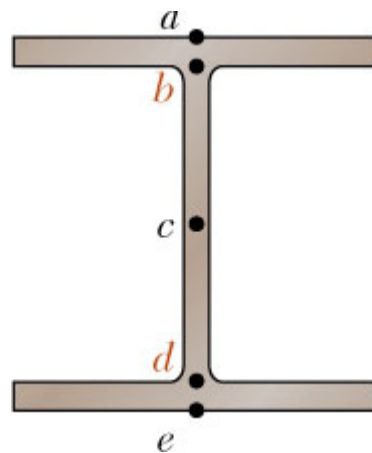
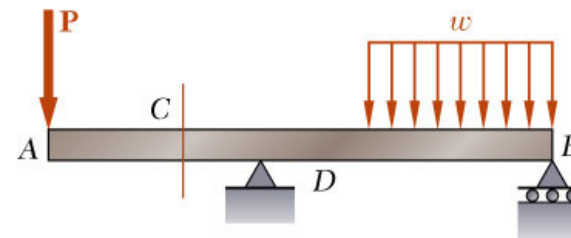


$y/c$	$x = 2c$		$x = 8c$	
	$\sigma_{\min}/\sigma_m$	$\sigma_{\max}/\sigma_m$	$\sigma_{\min}/\sigma_m$	$\sigma_{\max}/\sigma_m$
1.0	0	1.000	0	1.000
0.8	-0.010	0.810	-0.001	0.801
0.6	-0.040	0.640	-0.003	0.603
0.4	-0.090	0.490	-0.007	0.407
0.2	-0.160	0.360	-0.017	0.217
0	-0.250	0.250	-0.063	0.063
-0.2	-0.360	0.160	-0.217	0.017
-0.4	-0.490	0.090	-0.407	0.007
-0.6	-0.640	0.040	-0.603	0.003
-0.8	-0.810	0.010	-0.801	0.001
-1.0	-1.000	0	-1.000	0



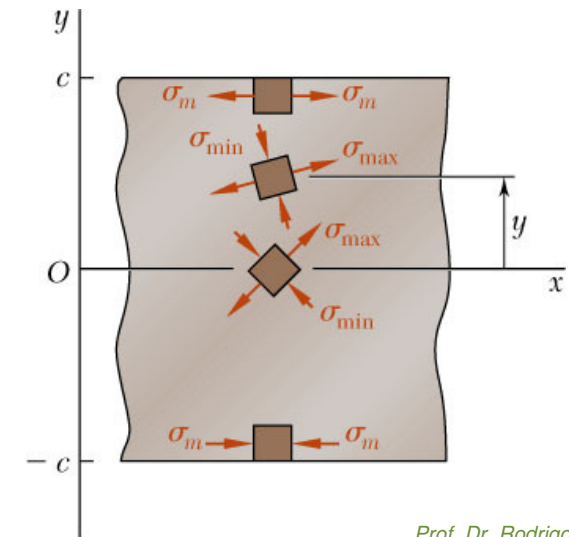
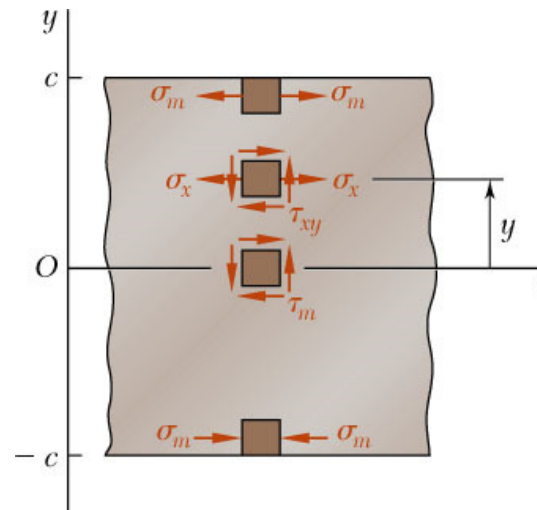
# TENSÕES PRINCIPAIS EM UMA VIGA

- Quando a seção transversal varia de maneira brusca, em que a tensão de cisalhamento máxima ocorre perto da superfície onde a tensão normal também é grande, a tensão normal máxima na seção transversal pode ser maior do que  $\sigma_m$

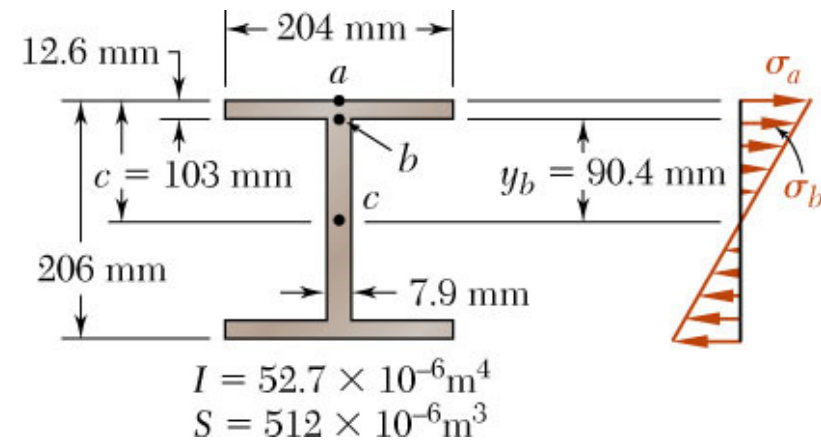
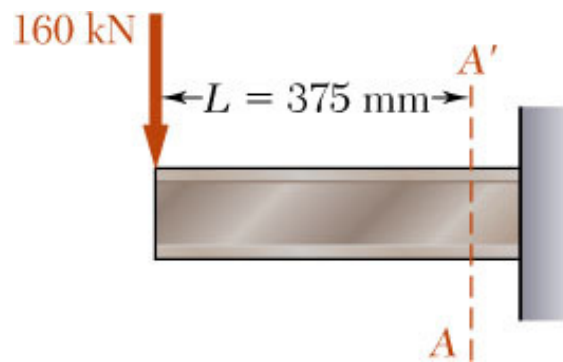


$$\sigma_m = \frac{Mc}{I}$$

$$\tau_m = \frac{VQ}{It}$$



**EXEMPLO 4.3** - Uma força de 160 kN é aplicada no final de uma viga de aço laminado W200x52. Determine se as tensões normais satisfazem à especificação de projeto de ser igual ou inferior a 150 MPa na seção A-A.



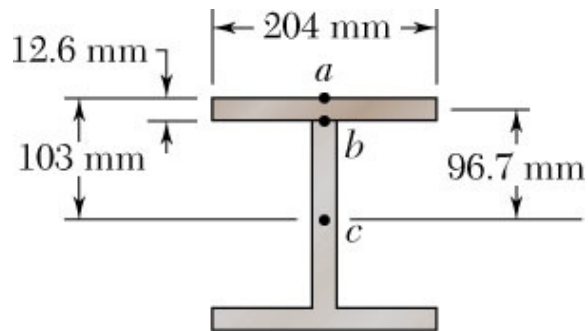
$$M_A = (160 \text{ kN})(0,375 \text{ m}) = 60 \text{ kN.m}$$

$$V_A = 160 \text{ kN}$$

$$\sigma_a = \frac{M_A c}{I} = \frac{60 \text{ kNm} \cdot 0,103 \text{ m}}{52,7 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 117,27 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = \frac{M_A c}{I} = \frac{60 \text{ kNm} \cdot 0,0904 \text{ m}}{52,7 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 102,92 \text{ MPa}$$

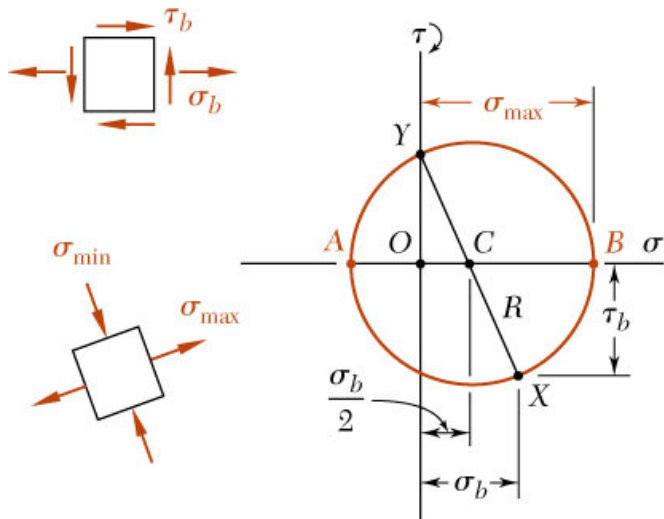
Tensão de cisalhamento na junção da alma e mesa:



$$Q = (204 \times 12,6)96,7 = 248,6 \times 10^3 \text{ mm}^3 = 248,6 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_b = \frac{V_A \cdot Q}{I \cdot t} = \frac{(160 \text{ kN})(248,6 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(52,7 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0,0079 \text{ m})} = 95,54 \text{ MPa}$$

Tensão principal na junção da alma e mesa:



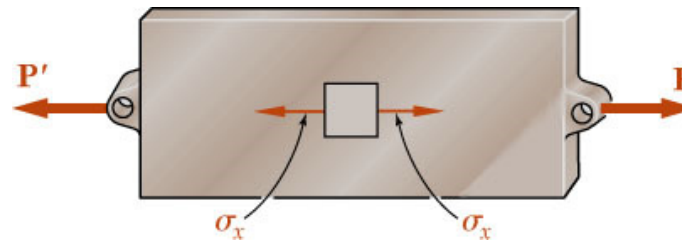
$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{102,92}{2} + \sqrt{\left(\frac{102,92}{2}\right)^2 + (95,54)^2} = 159,98 \text{ MPa}$$

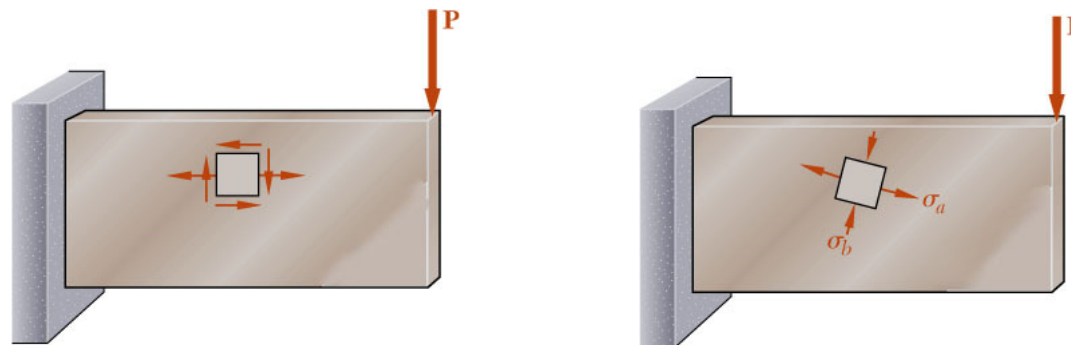
159,98 MPa > 150 MPa >>>> não ok.

## CRITÉRIOS DE ESCOAMENTO PARA MATERIAIS DÚCTEIS

- Falha de um componente submetido a tensão uniaxial está diretamente prevista a partir de um ensaio de tração equivalente;

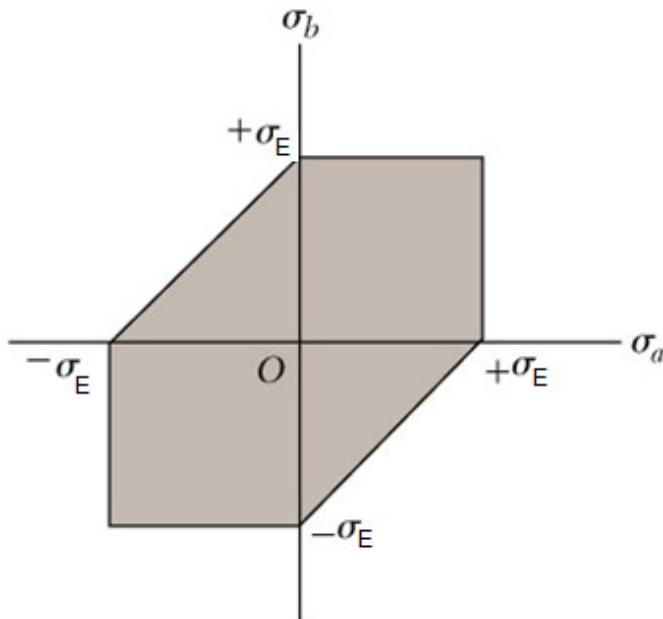


- Falha de componentes submetidos a um estado plano de tensão não pode ser diretamente prevista a partir de uma amostra de ensaio de tração. É conveniente determinar as tensões principais.



## CRITÉRIO DA TENSÃO DE CISALHAMENTO MÁXIMA (TRESCA):

- O componente estrutural é seguro desde que a tensão de cisalhamento máxima seja menor que a tensão de cisalhamento em uma amostra submetida ao teste de tração quando este começa a escoar;
- O hexágono associado ao início do escoamento no material é conhecido como hexágono de Tresca, em homenagem ao engenheiro Francês Henri Edouard Tresca (1814-1885).



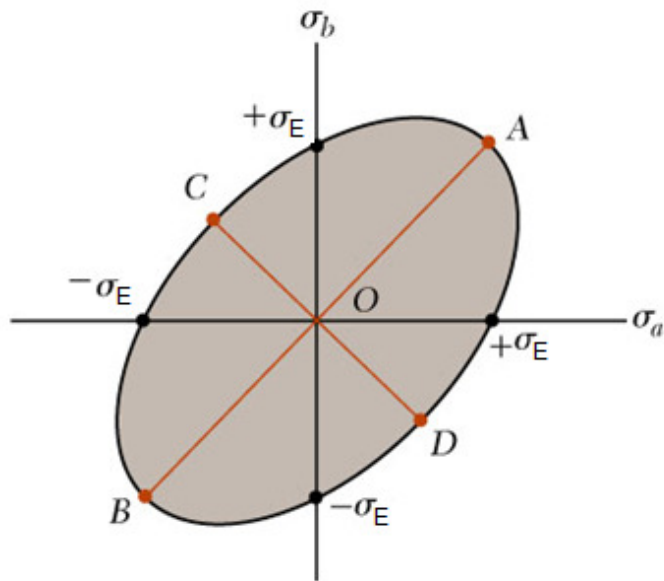
$$\tau_{\max} < \tau_E = \frac{\sigma_E}{2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_a|}{2} \text{ ou } \frac{|\sigma_b|}{2} < \frac{\sigma_E}{2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_a - \sigma_b|}{2} < \frac{\sigma_E}{2}$$

## CRITÉRIO DA ENERGIA DE DISTORÇÃO MÁXIMA (VON MISES):

- O componente estrutural é seguro desde que a energia de distorção por unidade de volume seja menor do que a energia necessária para provocar escoamento no corpo de prova submetido ao ensaio de tração;
- Também conhecido como critério de von Mises, em homenagem ao matemático alemão-americano Richard von Mises (1883-1953).



$$u_d < u_E$$
$$\frac{1}{6G} (\sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_b + \sigma_b^2) < \frac{1}{6G} (\sigma_E^2 - \sigma_E \times 0 + 0^2)$$
$$\sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_E^2$$

## TENSÃO DE VON MISES

- A tensão de von Mises é usada como critério para determinar o início da falha em materiais dúcteis.
- O critério de falha afirma que a tensão de von Mises deve ser menor que a tensão de escoamento do material.
- A tensão de von Mises,  $\sigma_{VM}$  é dada por  $\sigma_{VM} = \sqrt{I_1^2 - 3I_2}$

- Para o estado geral de tensão:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2$$

- Em termos das tensões principais, os dois invariantes podem ser escritos como

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$$





## TENSÃO DE VON MISES

- A tensão de von Mises pode ser expresso na forma:

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

- Para o estado plano de tensões:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2$$

- Para o estado plano de deformação:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y).$$

Vídeo: Teorias de falha (Tresca, von Mises etc...)

<https://www.youtube.com/watch?v=xkbQnBAOFeg>





EDUCAÇÃO  
PÚBLICA  
**100%**  
GRATUITA

# MUITO OBRIGADO

Prof. Rodrigo Bordignon  
Engenheiro Civil, Dr.

*[www.ifsul.edu.br](http://www.ifsul.edu.br)  
[rodrigobordignon@ifsul.edu.br](mailto:rodrigobordignon@ifsul.edu.br)*