INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense

Câmpus
Passo Fundo

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÃO LIVRE DE SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE

ALEXSANDER FURTADO CARNEIRO

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

A força de amortecimento viscoso é proporcional à velocidade e pode ser expressa como:

$$F = -c\dot{x}$$

Onde c é a constante de amortecimento ou coeficiente de amortecimento viscoso, e o sinal negativo indica que a força de amortecimento é oposta ao sentido da velocidade.

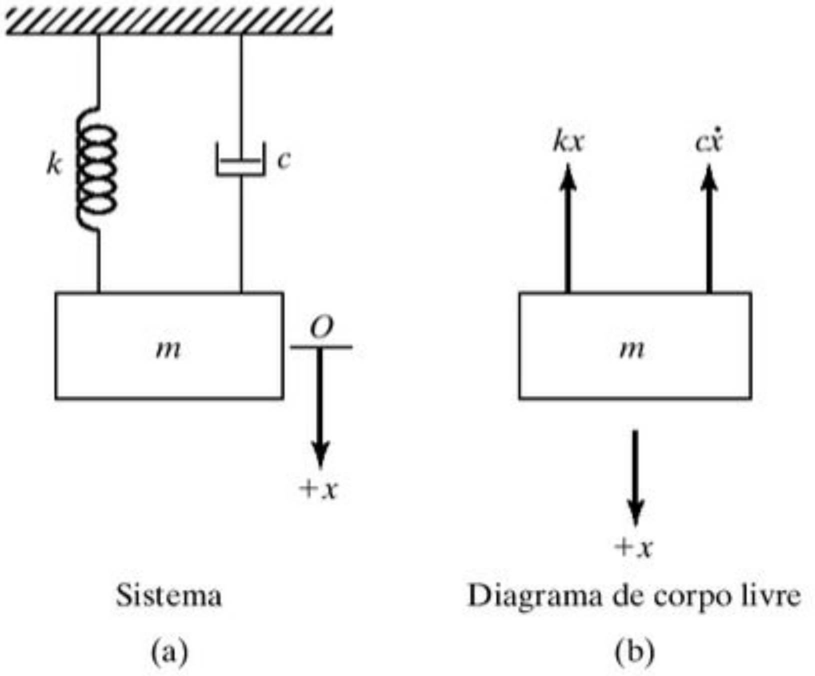


FIGURA 2.21 Sistema com um grau de liberdade com amortecedor viscoso.

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

Se for medida em relação à posição de equilíbrio da massa , a aplicação da lei de Newton dá a equação do movimento:

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$$

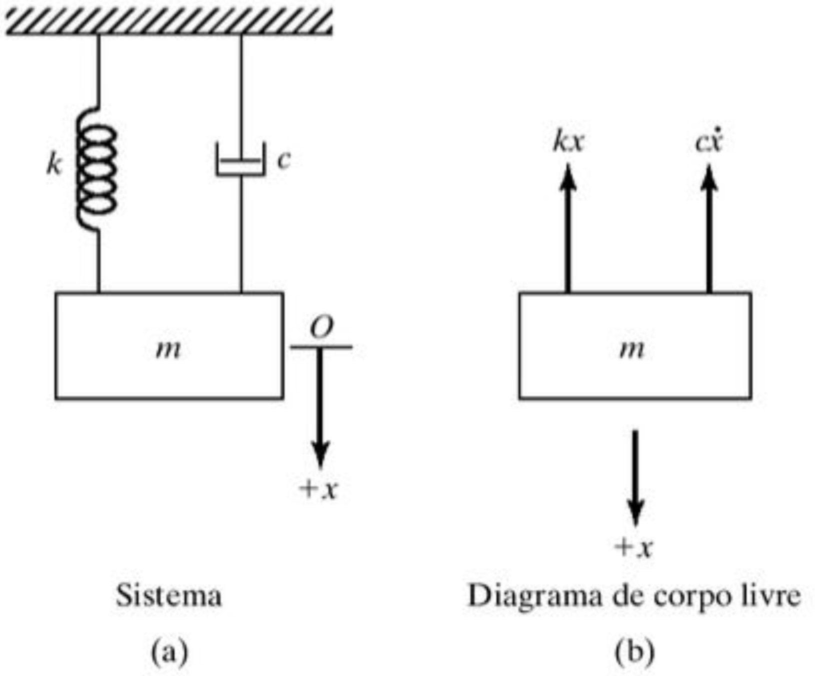


FIGURA 2.21 Sistema com um grau de liberdade com amortecedor viscoso.

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

SOLUÇÃO

Para resolver a equação do movimento, admitimos uma solução na forma:

$$x(t)=C\,e^{st}$$

Onde *C* e *s* são constantes indeterminadas. A inserção dessa função na Equação do movimento resulta na equação característica:

$$ms^2+cs+k=0$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

SOLUÇÃO

Da equação característica do movimento, obtemos as seguintes raízes:

$$s_{1,2}=\frac{-c\pm\sqrt{(c^2-4mk)}}{2m}$$

$$s_{1,2}=-\frac{c}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{c^2}{2m}\right)-\frac{k}{m}}$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

SOLUÇÃO

As raízes dão duas soluções para a equação do movimento:

$$x_1(t) = C_1 e^{s_1 t} \qquad x_2(t) = C_2 e^{s_2 t}$$

A solução geral da equação da equação do movimento é dada por uma combinação das duas soluções:

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

SOLUÇÃO

$$x(t)=C_1 e^{s_1 t}+C_2 e^{s_2 t}$$

$$x(t)=C_1 e^{\left\{-\frac{c}{2m}+\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}\right\}t}+C_2 e^{\left\{-\frac{c}{2m}-\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}\right\}t}$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias a serem determinadas pelas condições iniciais do sistema.

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

SOLUÇÃO

A constante de amortecimento crítico: o amortecimento crítico, c_c , é definido como o valor da constante de amortecimento c para o radical das raízes da equação característica do movimento torna-se 0 . O amortecimento crítico é definido como:

$$s_{1,2}=-\frac{c}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{c^2}{2m}\right)-\frac{k}{m}} \longrightarrow \left(\frac{c^2}{2m}\right)-\frac{k}{m}=0$$

$$c_c=2m\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad c_c=2\sqrt{km} \qquad c_c=2m\,\omega_n$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

SOLUÇÃO

Fator de amortecimento: O fator de amortecimento é definido como a razão entre a constante de amortecimento e a constante de amortecimento crítico:

$$\zeta = c / c_c$$

$$\zeta = \frac{c}{2 m \omega_n}$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

SOLUÇÃO

Utilizando as equações do amortecimento crítico e do fator de amortecimento, podemos escrever a seguinte equação:

$$\frac{c}{2m} = \frac{c}{c_c} \cdot \frac{c_c}{2m} = \zeta \omega_n$$

substituindo essa equação nas raízes da equação característica temos:

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \omega_n$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

SOLUÇÃO

Assim, a solução, da equação do movimento, pode ser escrita como:

$$x(t)=C_1 e^{\left(-\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_n t}+C_2 e^{\left(-\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_n t}$$

Lembrando que C1 e C2 são constantes arbitrárias que são determinadas pelas condições iniciais do sistema.

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

SOLUÇÃO

A natureza das raízes s_1 e s_2 depende da magnitude do amortecimento. Pode-se perceber que se o fator de amortecimento (ζ) for igual a zero, resulta nas vibrações não amortecidas. Quando o fator de amortecimento (ζ) é diferente de zero, podemos considerar três casos:

- Caso 1 - Sistema subamortecido
- Caso 2 - Sistema criticamente amortecido
- Caso 3 - Sistema superamortecido

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

SOLUÇÃO

Caso 1. Sistema subamortecido: $\zeta<1$ ou $c<c_c$ ou $c/2m<\sqrt{k/m}$

Para essa condição, o termo (ζ^2-1) é negativo e as raízes s1 e s2 podem ser expressas como:

$$s_{1,2}=\left(-\zeta\pm i\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

SOLUÇÃO

A solução, para a equação do movimento, pode ser escrita de formas diferentes:

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\xi + i\sqrt{1-\xi^2}\right)\omega_n t} + C_2 e^{\left(-\xi - i\sqrt{1-\xi^2}\right)\omega_n t}$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left\{C'_1 \cos\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t + C'_2 sen\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t\right\}$$

$$x(t) = X e^{-\xi\omega_n t} sen\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t + \phi\right)$$

$$x(t) = X_0 e^{-\xi\omega_n t} \cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t + \phi_0\right)$$

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

SOLUÇÃO

Nas equações de deslocamento anteriormente, as constantes (C'_1, C'_2), (X, Φ) e (X_0, Φ_0) podem ser determinadas pelas condições iniciais.

Para as condições iniciais $x(t = 0) = x_0$ e $v(t = 0) = v_0$, podemos determinar C'_1 e C'_2:

$$C'_1 = x_0$$

$$C'_2 = \frac{v_0 + \zeta \omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}$$

$$X = X_0 = \sqrt{(C'_1)^2 + (C'_2)^2}$$

$$\phi = \mathrm{tg}^{-1}(C'_1 / C'_2)$$

$$\phi_0 = \mathrm{tg}^{-1}(C'_2 / C'_1)$$

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

SOLUÇÃO

Após encontradas as constantes arbitrárias C'_1 e C'_2 podemos reescrever a solução da equação do movimento em função de x_0 e v_0 :

$$x(t)=e^{-\xi\omega_n t}\left\{x_0 \cos\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t+\frac{v_0+\xi\omega_n x_0}{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t}\, sen\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t\right\}$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

SOLUÇÃO

O movimento descrito pela solução da equação do movimento é um movimento harmônico amortecido de frequência angular $\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n$

Porém por causa do fator $e^{-\xi\omega_n t}$, a amplitude diminui exponencialmente com o tempo. A quantidade:

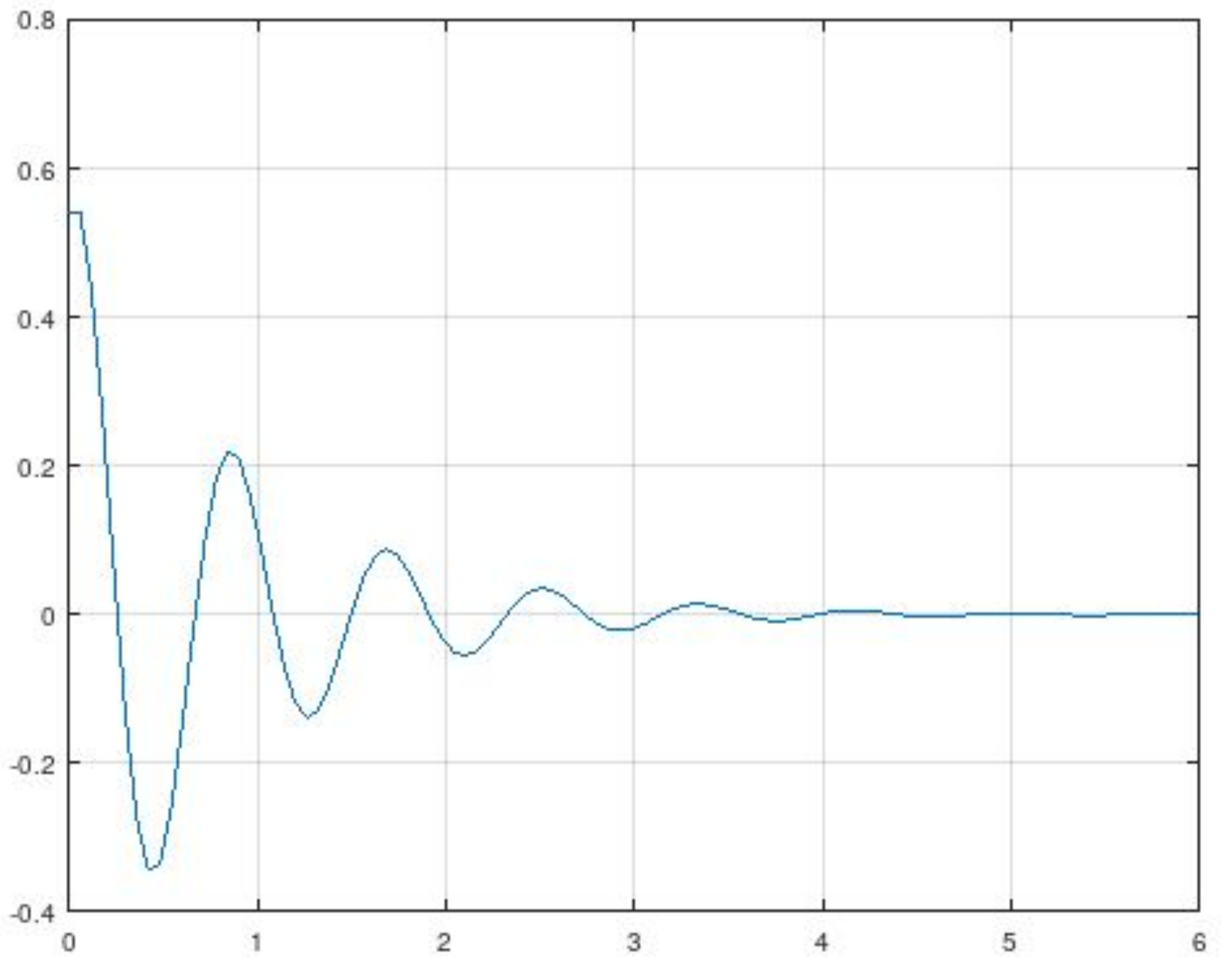
$$\omega_d = \sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n$$

É denominada a frequência de vibração amortecida.

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

SOLUÇÃO

O caso subamortecido é muito importante no estudo de vibrações mecânicas porque é o único que resulta em um movimento oscilatório.



VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

SOLUÇÃO

Caso 2. Sistema criticamente amortecido : $\zeta=1$ ou $c=c_c$ ou $c/2m=\sqrt{k/m}$

Nesse caso, as duas raízes s_1 e s_2 da equação característica do movimento são iguais:

$$s_1=s_2=-\frac{c_c}{2m}=-\omega_n$$

A solução para a equação do movimento será dada por:

$$C_1=x_0 \quad C_2=v_0+\omega_n x_0$$

$$x(t)=(C_1+C_2 t)e^{-\omega_n t}$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

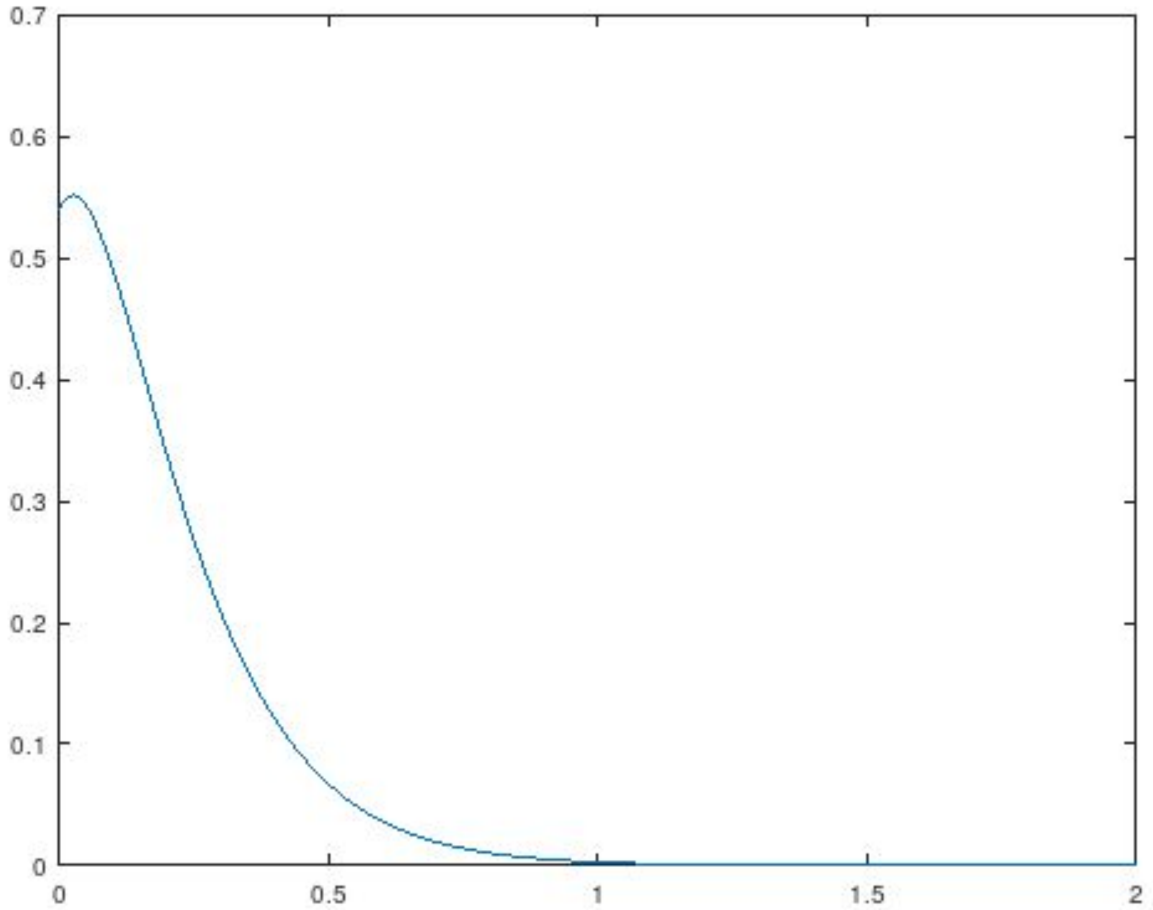
VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

SOLUÇÃO

Podemos reescrever a solução para esse caso como:

$$x(t)=[x_0+(v_0+\omega_n x_0)t]e^{-\omega_n t}$$

Pode-se ver que o movimento representado por essa equação é aperiódico.



VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

SOLUÇÃO

Caso 3. Sistema superamortecido: $\xi > 1$ ou $c > c_c$ ou $c/2m > \sqrt{k/m}$ ou $\sqrt{\xi^2 - 1} > 0$

Nesse caso as raízes s_1 e s_2 são reais e distintas e são dadas por:

$$s_{1,2} = \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_n < 0$$

Se $s_2 \gg s_1$ a solução da equação do movimento pode ser expressa como:

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_n t} + C_2 e^{\left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_n t}$$

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

SOLUÇÃO

$$x(t)=C_1 e^{\left(-\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_n t}+C_2 e^{\left(-\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_n t}$$

$$C_1=\frac{x_0\,\omega_n\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)+v_o}{2\,\omega_n\sqrt{\xi^2-1}}$$

$$C_2=\frac{-x_0\,\omega_n\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)-v_o}{2\,\omega_n\sqrt{\xi^2-1}}$$

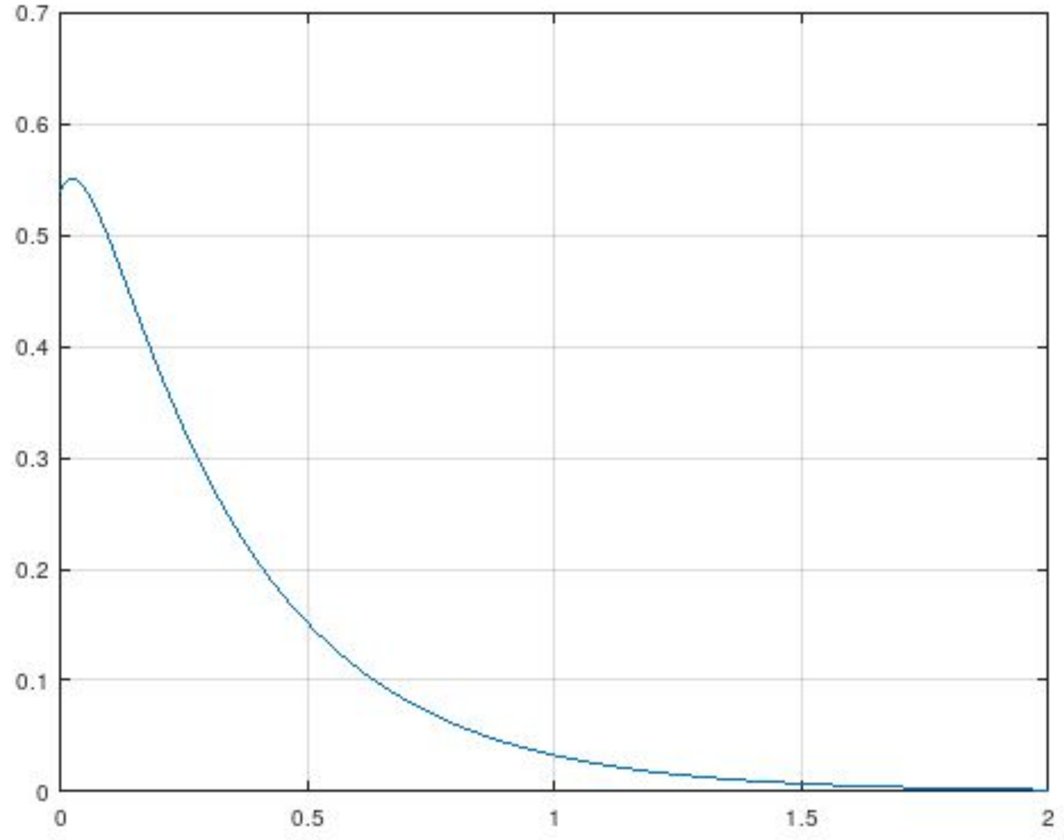
EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

SOLUÇÃO

$$x(t)=C_1 e^{\left(-\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_n t}+C_2 e^{\left(-\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_n t}$$

O movimento mostrado pela equação acima é aperiódico independente das condições iniciais impostas ao sistema.



VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

SOLUÇÃO

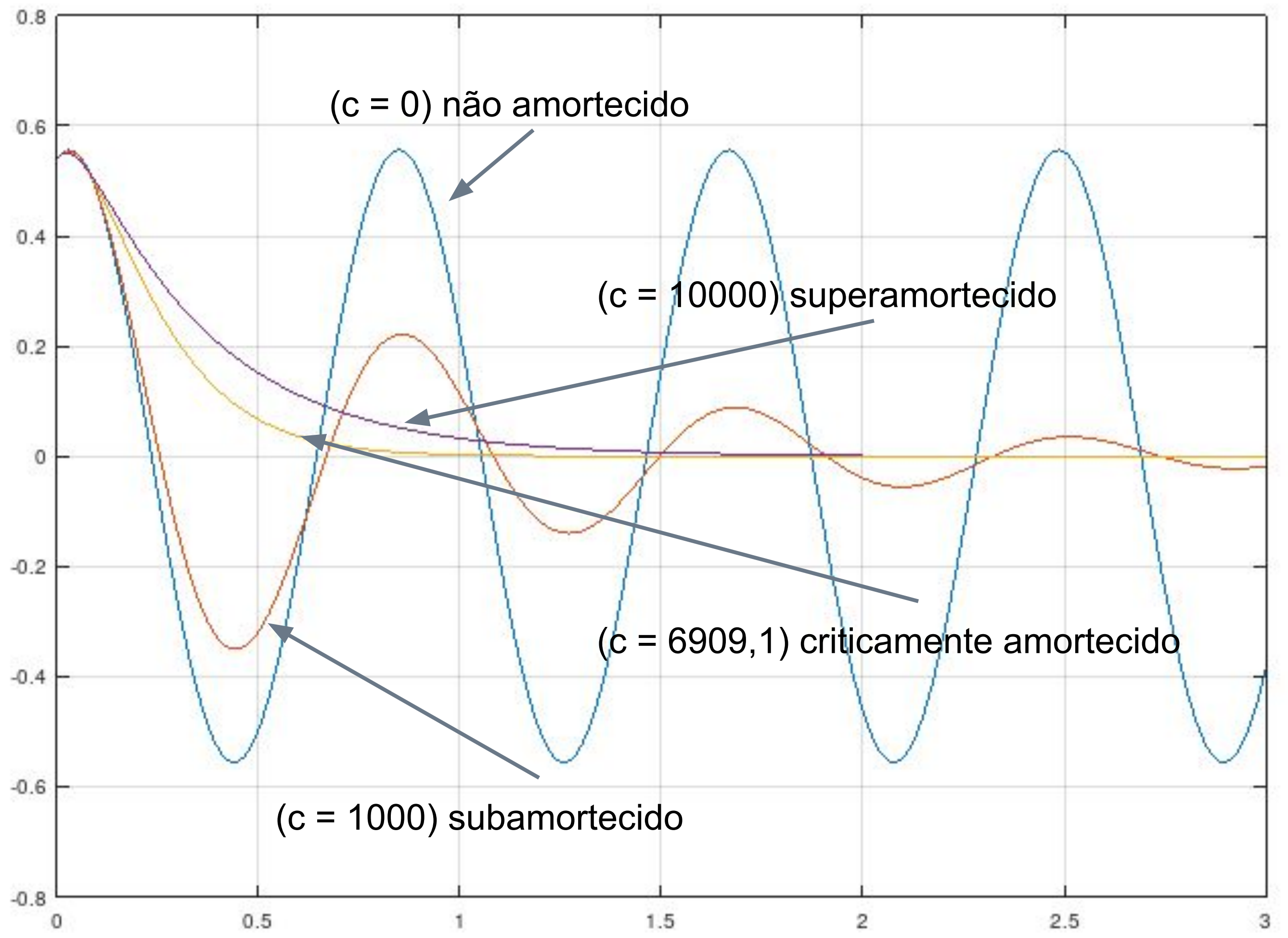
Comparativo entre os movimentos, para tanto foi analisado um sistema massa-mola-amortecedor e alterado o valor da constante de amortecimento (c)

m = 450 kg;

k = 26520 N/m;

x0 = 0,54 m;

v0 = 1 m/s;



VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOSO

SOLUÇÃO

AULA SÍNCRONA PARA RETIRADA DE DÚVIDAS SOBRE AMORTECIMENTO VISCOSO

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

RAO, Singiresu. **Vibrações mecânicas.** 4.ed. São Paulo, SP: Pearson, c2009. 424 p. ISBN 9788576052005.

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

MUITO

OBRIGADO

ALEXSANDER FURTRADO CARNEIRO

passofundo.ifsul.edu.br
alexsander.carneiro@passofundo.ifsul.edu.br
(54) 99919-3025