INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense

Câmpus
Passo Fundo

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÕES

Alexsander Furtado Carneiro

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO COULOMB

- Em muitos sistemas mecânicos são usados amortecedores coulomb ou de atrito seco em razão da sua simplicidade mecânica e conveniência.
- Sempre que os componentes de uma estrutura vibratória deslizam um em relação ao outro, o amortecimento por atrito aparece internamente.

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO COULOMB

A lei de Coulomb do atrito seco afirma que, quando dois corpos estão em contato, a força requerida para produzir deslizamento é proporcional à força normal que age no plano de contato. Assim, a força de atrito F é dada por:

$$F = \mu N = \mu W = \mu m g$$

onde N é a força normal, igual ao peso da massa (W = mg) e μ é o coeficiente de deslizamento ou atrito cinético.

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO COULOMB

O valor do coeficiente de atrito (μ) depende dos materiais em contato e da condição das superfícies de contato.

μ = 0,1 para metal sobre metal com lubrificação;

μ = 0,3 para metal sobre metal sem lubrificação;

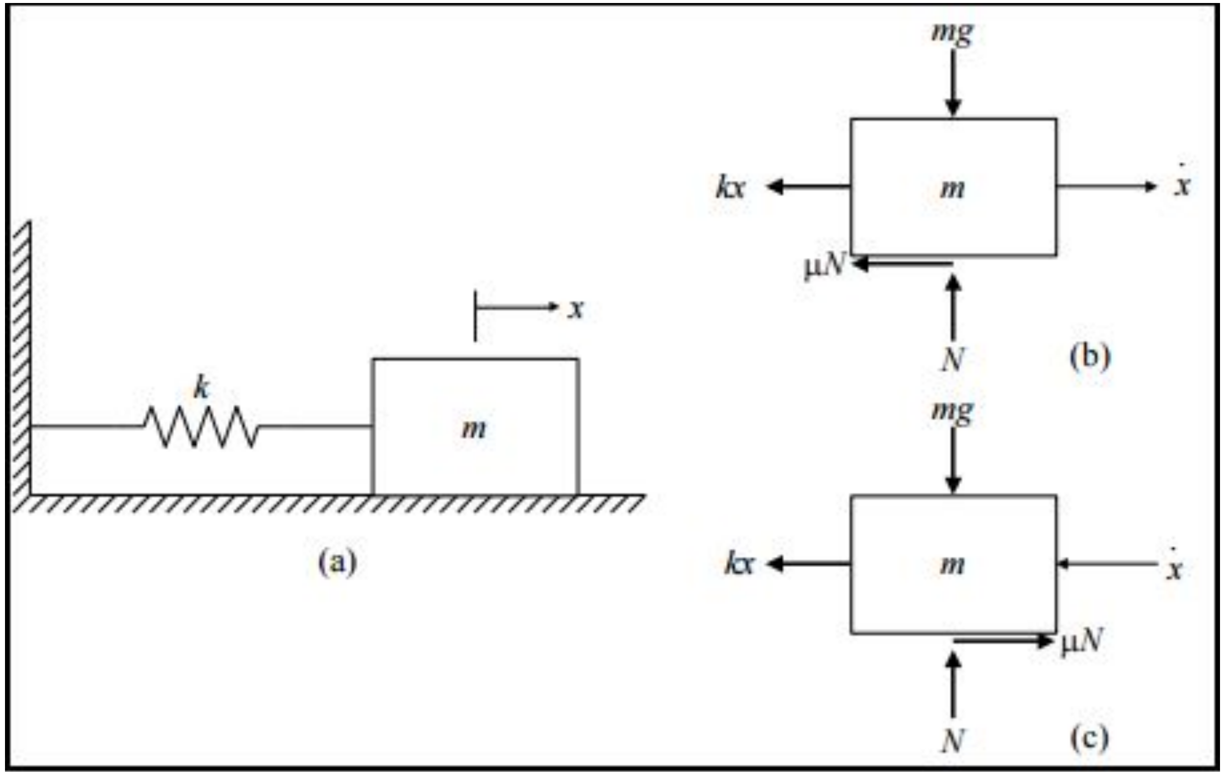
μ = 1,0 borracha sobre metal.

O amortecimento Coulomb às vezes pe denominado amortecimento constante, uma vez que a força de amortecimento é independente do deslocamento e da velocidade; ela depende somente da força normal N entre as superfícies deslizantes.

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO COULOMB

Equação do movimento

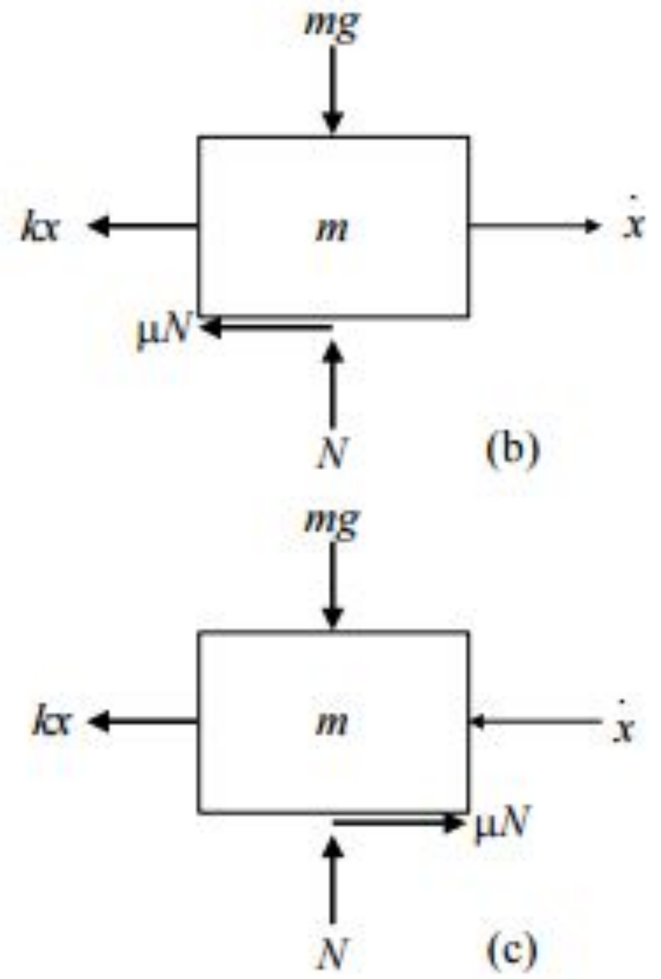
Considere um sistema com um grau de liberdade com atrito seco como mostrado na figura:



VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO COULOMB

Equação do movimento

Já que a força de atrito varia com a direção da velocidade, precisamos considerar dois casos, como indicado nas figuras (b) e (c).



VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO COULOMB

Equação do movimento

Caso 1: Para o meio ciclo durante o qual a massa se movimenta da esquerda para a direita, a equação de movimento pode ser obtida pela segunda lei de Newton:

$$m\ddot{x} + kx = -\mu N$$

A solução desta equação será:

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \operatorname{sen} \omega_n t - \mu \frac{N}{k}$$

A_1 e A_2 são constantes que dependem das condições iniciais.

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO COULOMB

Equação do movimento

Caso 2: Para o meio ciclo durante o qual a massa se movimenta da direita para a esquerda, a equação de movimento pode ser obtida pela segunda lei de Newton:

$$m\ddot{x}+kx=\mu N$$

A solução desta equação será:

$$x(t)=A_3\cos\omega_n t+A_4 \operatorname{sen}\omega_n t+\mu\frac{N}{k}$$

A_3 e A_4 são constantes que dependem das condições iniciais.

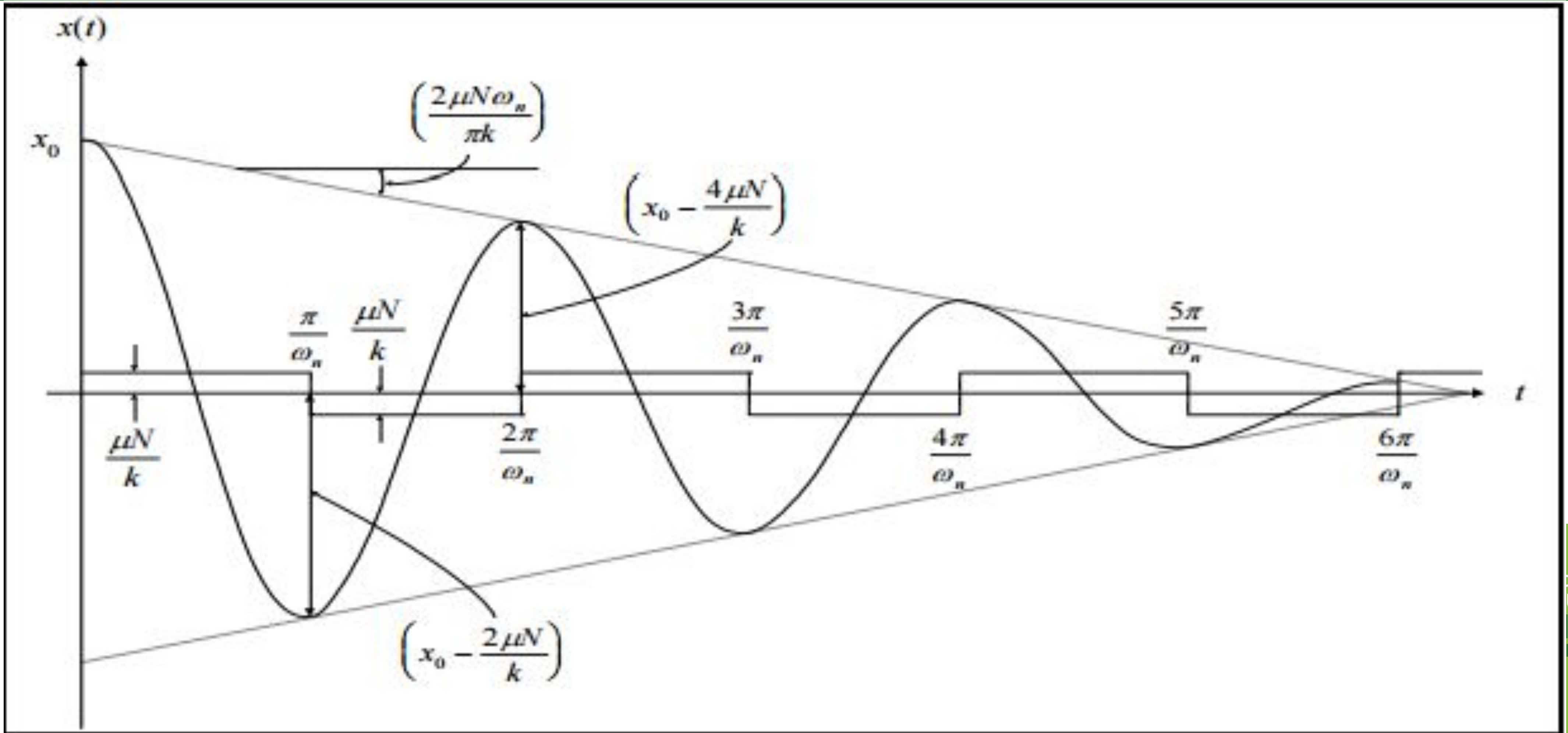
VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO COULOMB

O termo $\mu N/k$ que aparece nas equações de cada meio ciclo é uma constante que representa o deslocamento virtual da mola sob a força μN, se ela fosse aplicada como uma força estática.

As equações anteriores indicam que em cada meio-ciclo o movimento é harmônico.

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO COULOMB



VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO COULOMB

Solução

As equações para cada semi-ciclo podem ser expressas como uma única equação (usando N = mg):

$$m\ddot{x} + \mu mg\, sgn(\dot{x}) + kx = 0$$

Esta equação é uma equação diferencial não linear para o qual não existe uma solução análitica simples. Podem ser utilizados métodos numéricos para resolver a equação.

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO COULOMB

Solução

Porém a equação pode ser resolvida analiticamente se dividirmos o eixo do tempo em segmentos separados quando a velocidade é igual a zero. Para determinar a solução usando esse procedimento, vamos admitir que as condições iniciais sejam:

$$x(t=0)=x_0$$

$$\dot{x}(t=0)=0$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO COULOMB

Solução

O movimento começa da direita para a esquerda (amplitude positiva), sendo x_0 a maior amplitude que o movimento vai atingir. A amplitude x_n pode ser calculada com base na equação abaixo:

$$x_n = x_0 - n\frac{2\mu N}{k}$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO COULOMB

Solução

O movimento para quando: $x_n \leq \frac{\mu N}{k}$

Porque a força restauradora exercida pela mola será menor que a força de atrito. Assim, o número de meios ciclos (n) que transcorrem antes do movimento cessar é dado por:

$$n \geq \frac{\left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right)}{\left(\frac{2\mu N}{k}\right)}$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO COULOMB

Características de um sistema com amortecimento Coulomb

- A equação de movimento é não linear com amortecimento Coulomb, ao passo que é linear com amortecimento viscoso.
- A frequência natural do sistema permanece inalterada com a adição de amortecimento Coulomb, ao passo que é reduzida com a adição de amortecimento viscoso.
- O movimento é periódico com amortecimento Coulomb, ao passo que pode ser não-periódico em um sistema viscosamente amortecido (superamortecido).

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO COULOMB

Características de um sistema com amortecimento Coulomb (continuação)

- O sistema entra em repouso após algum tempo com amortecimento Coulomb, ao passo que, teoricamente, o movimento continua para sempre (talvez com uma amplitude infinitesimalmente pequena) com amortecimento viscoso e histerese.
- A amplitude é reduzida linearmente com amortecimento Coulomb, ao passo que a redução é exponencial com amortecimento viscoso.

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO COULOMB

Características de um sistema com amortecimento Coulomb (continuação)

Em cada ciclo sucessivo a amplitude do movimento é reduzida pela quantidade:

$$4\mu N / k$$

Desta maneira as amplitudes no final de quaisquer dois ciclos consecutivos estão relacionadas:

$$X_m = X_{m-1} - \frac{4\mu N}{k}$$

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO COULOMB

Características de um sistema com amortecimento Coulomb (continuação)

A posição final da massa normalmente é afastada em relação à posição de equilíbrio e representa um deslocamento permanente no qual a força de atrito é travada. Leves batidinhas normalmente farão a massa chegar à sua posição de equilíbrio.

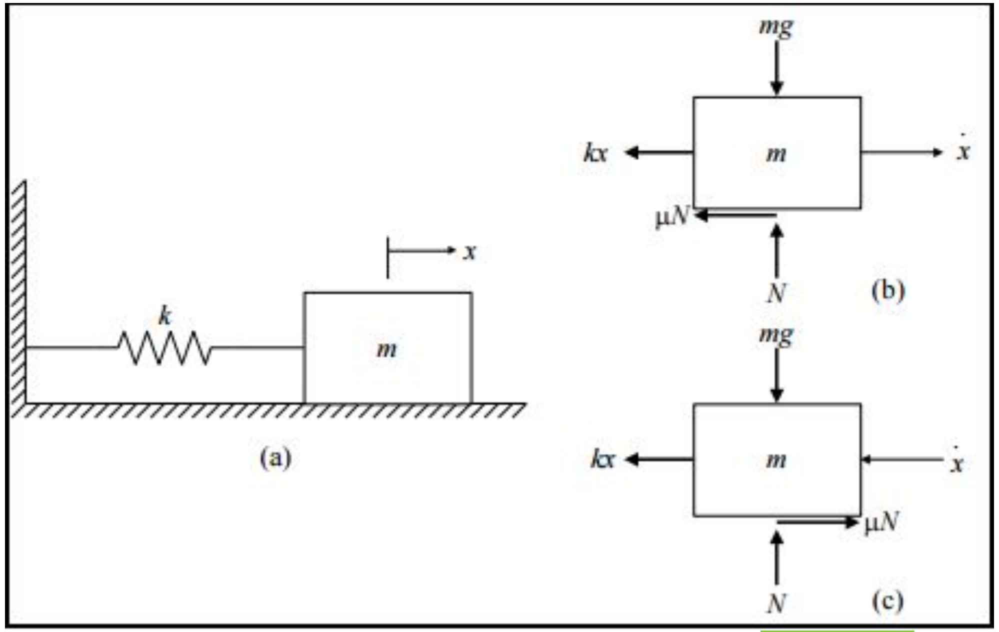
O tempo final de oscilação (tf) é dado por:

$$tf = \left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) n$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO COULOMB

Exemplo: (2.113) Uma massa de 10 kg está ligada a uma mola de rigidez 3000 N/m e é solta após sofrer um deslocamento inicial de 100mm. Admitindo que a massa movimenta-se sobre uma superfície horizontal, como mostra a figura, determine a posição na qual a massa atinge o repouso. Suponha que o coeficiente de atrito entre a massa e a superfície seja 0,12.



EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO COULOMB

Solução

$$n \geq \frac{\left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right)}{\left(\frac{2\mu N}{k}\right)} = \frac{\left(0{,}1 - \frac{0{,}12 * 10 * 9{,}81}{3000}\right)}{\left(\frac{2 * 0{,}12 * 10 * 9{,}81}{3000}\right)} \geq 12{,}242$$

$$x_n = x_0 - n\frac{2\mu N}{k} = 0{,}1 - 12\,\frac{2 * 0{,}12 * 10 * 9{,}81}{3000} = 0{,}0058240$$

$$x_n = 5{,}8240\,mm$$

SISTEMAS TORCIONAIS COM AMORTECIMENTO COULOMB

Exemplo: Polia sujeita a amortecimento Coulomb

Um eixo de aço com 1 m de comprimento e 50 mm de diâmetro está fixado em uma extremidade e suporta uma polia de momento de inércia de massa de 25 kg/m² na outra extremidade. Um freio de lona exerce um torque de atrito constante de 400 N/m ao redor da circunferência da polia. Se a polia for deslocada de 6º e então solta, determine o numero de ciclos antes de a polia atingir o repouso e a posição final de acomodação da polia.

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

SISTEMAS TORCIONAIS COM AMORTECIMENTO COULOMB

Exemplo: Polia sujeita a amortecimento Coulomb

Solução: O número de meios-ciclos que transcorrem antes de o movimento angular da polia cessar é dado pela equação (14).

$$r \geq \left\{ \frac{\theta_0 - \frac{T}{k_t}}{\frac{2T}{k_t}} \right\}$$

Onde $\theta_0 = 6^{\text{o}} = 0{,}10472\, rad$ e $k_t = constante\ elástica\ torcional\ do\ eixo\ dada\ por:$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

SISTEMAS TORCIONAIS COM AMORTECIMENTO COULOMB

Exemplo: Polia sujeita a amortecimento Coulomb (continuação)

$$k_t = \frac{GJ}{l} = \frac{8x10^{10}(\frac{\pi}{32}(0{,}05)^4)}{1} = 49087{,}5\,\frac{Nm}{rad}$$

T = torque de atrito constante aplicada à polia = $400\,\frac{N}{m}$.

$$r \geq \frac{0{,}10472\ - \left(\frac{400}{49087{,}5}\right)}{\left(\frac{800}{49087{,}5}\right)} = 5{,}926$$

SISTEMAS TORCIONAIS COM AMORTECIMENTO COULOMB

Exemplo: Polia sujeita a amortecimento Coulomb (continuação)

Assim o movimento cessa após seis meios-ciclos.

$$\theta = 0{,}10472 - 6\,x\,2\left(\frac{400}{49087{,}5}\right) = 0{,}006935\,rad = 0{,}39734^{\underline{o}}$$

Assim, a polia para a 0,39734º em relação à posição de equilíbrio do mesmo lado do deslocamento inicial.

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

REFERENCIAS

RAO, Singiresu. Vibrações mecânicas. 4.ed. São Paulo, SP: Pearson, c2009. 424 p. ISBN 9788576052005.

MUITO OBRIGADO

Alexsander Furtado Carneiro

Professor de Eletrotécnica

www.ifsul.edu.br

E-mail de contato

TELEFONE DE CONTATO