INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

Vibrações Sob Excitação Harmônica - Resposta de um sistema não amortecido.

Alexsander Furtado Carneiro

VIBRAÇÃO FORÇADA

- Diz-se que um sistema mecânico sofre vibrações forçadas sempre que a energia externa é fornecida ao sistema durante a vibração.
- A energia externa pode ser fornecida através de uma força aplicada ou de uma excitação de deslocamento imposta.
- A força aplicada ou excitação de deslocamento pode ser de natureza harmônica, não harmônica, mas periódica, não periódica ou aleatória.

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

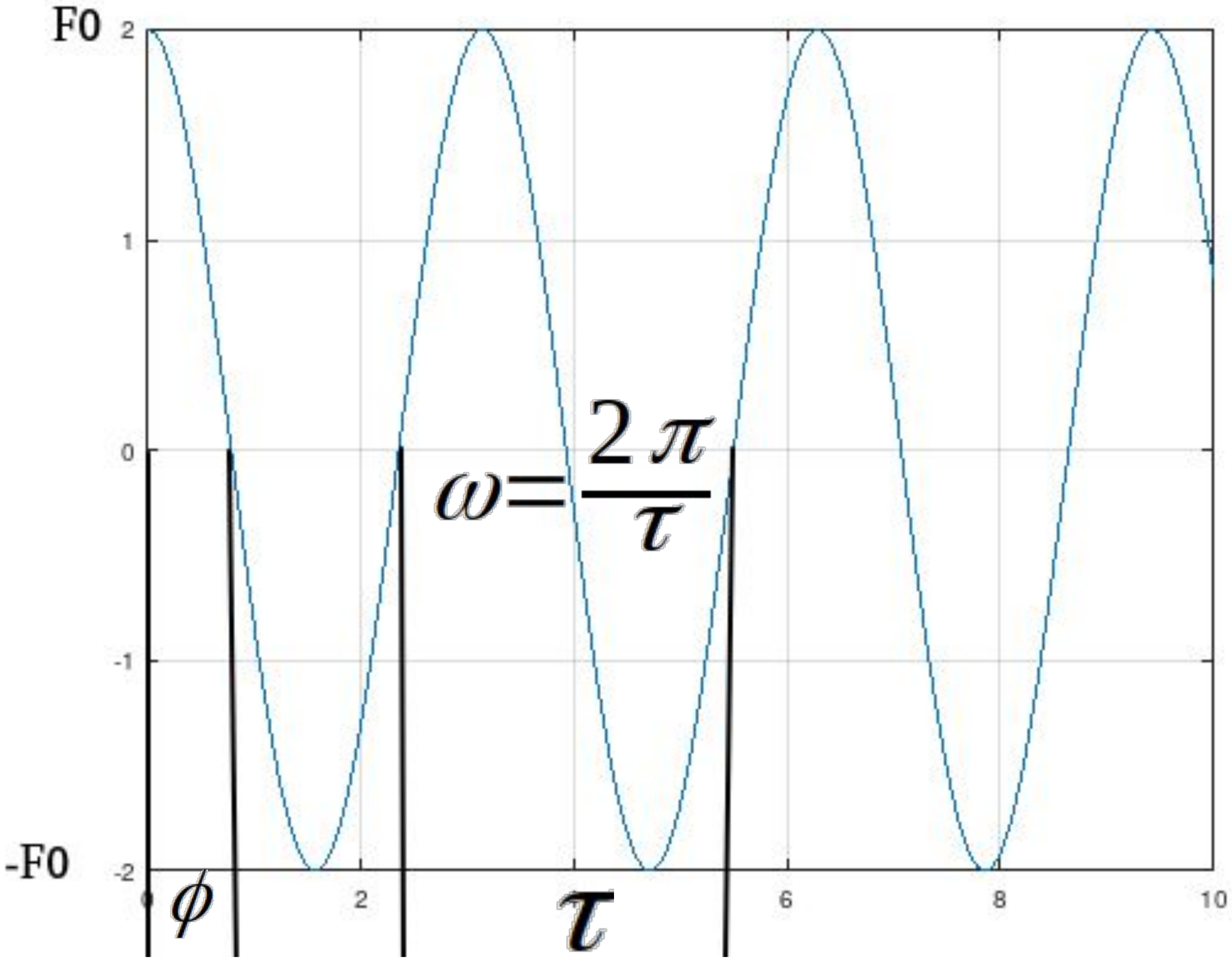
VIBRAÇÃO FORÇADA

A resposta de um sistema a uma excitação harmônica é chamada de **resposta harmônica**.

$$F(t)=F_0 e^{i(\omega t+\phi)} \quad F(t)=F_0 \cos(\omega t+\phi) \quad F(t)=F_0 sen(\omega t+\phi)$$

Onde: F0 é amplitude, ω é a frequência angular e ϕ é o ângulo de fase da excitação harmônica.

VIBRAÇÃO FORÇADA



EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

RESPOSTA DE UM SISTEMA NÃO AMORTECIDO À FORÇA HARMÔNICA

Se uma força $F(t) = F_0 \cos \omega t$ agir sobre uma massa m de um sistema não amortecido, a equação do movimento será:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

Essa equação não-homogênea, sua solução geral x(t) é dada pela soma da solução homogênea, $x_h(t)$ com a solução particular, $x_p(t)$.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

RESPOSTA DE UM SISTEMA NÃO AMORTECIDO À FORÇA HARMÔNICA

A solução homogênea de um sistema não amortecido sob ação de uma força harmônica é dada por:

$$x_h(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 sen\, \omega_n t$$

A solução particular $x_p(t)$ é harmônica e possui a mesma frequência ω que a força excitadora F(t). Assim admitimos uma solução na forma:

$$x_p(t) = X \cos \omega t$$

RESPOSTA DE UM SISTEMA NÃO AMORTECIDO À FORÇA HARMÔNICA

X é uma constante que denota a máxima amplitude de $x_p(t)$. Se substituir a solução particular na equação do movimento e resolvendo para X, obtemos que:

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

deflexão estática $\delta_{st} = F_0 / K$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

RESPOSTA DE UM SISTEMA NÃO AMORTECIDO À FORÇA HARMÔNICA

A solução total da equação do movimento para um sistema não amortecido sob ação de uma força harmônica é:

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \, sen \, \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \qquad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

RESPOSTA DE UM SISTEMA NÃO AMORTECIDO À FORÇA HARMÔNICA

Assim x(t) será:

$$x(t)=\left(x_0-\frac{F_0}{k-m\,\omega^2}\right)\cos\omega_n t+\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)\mathrm{sen}\,\omega_n t+\frac{F_0}{k-m\,\omega^2}\cos\omega t$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

RESPOSTA DE UM SISTEMA NÃO AMORTECIDO À FORÇA HARMÔNICA

A constante X que denota a máxima amplitude de $x_p(t)$ pode ser expressa como:

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \qquad \frac{amplitude\ dinâmica}{amplitude\ estática}$$

A quantidade $\mathbf{X/\delta_{st}}$ representa a razão entre a amplitude dinâmica e a amplitude estática do movimento e é denominada **fator de ampliação**, **fator de amplificação** ou **coeficiente de amplitude**.

RESPOSTA DE UM SISTEMA NÃO AMORTECIDO À FORÇA HARMÔNICA

Outra razão que é importante nos sistemas é a razão entre a frequência da força harmônica (ω) e a frequência natural do sistema (ω_n). A chamada razão de frequências (r) é dada por:

$$r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

Dependendo do valor da razão de frequências podemos ter 3 tipos de resposta para o sistema não amortecido sob a ação de uma força harmônica.

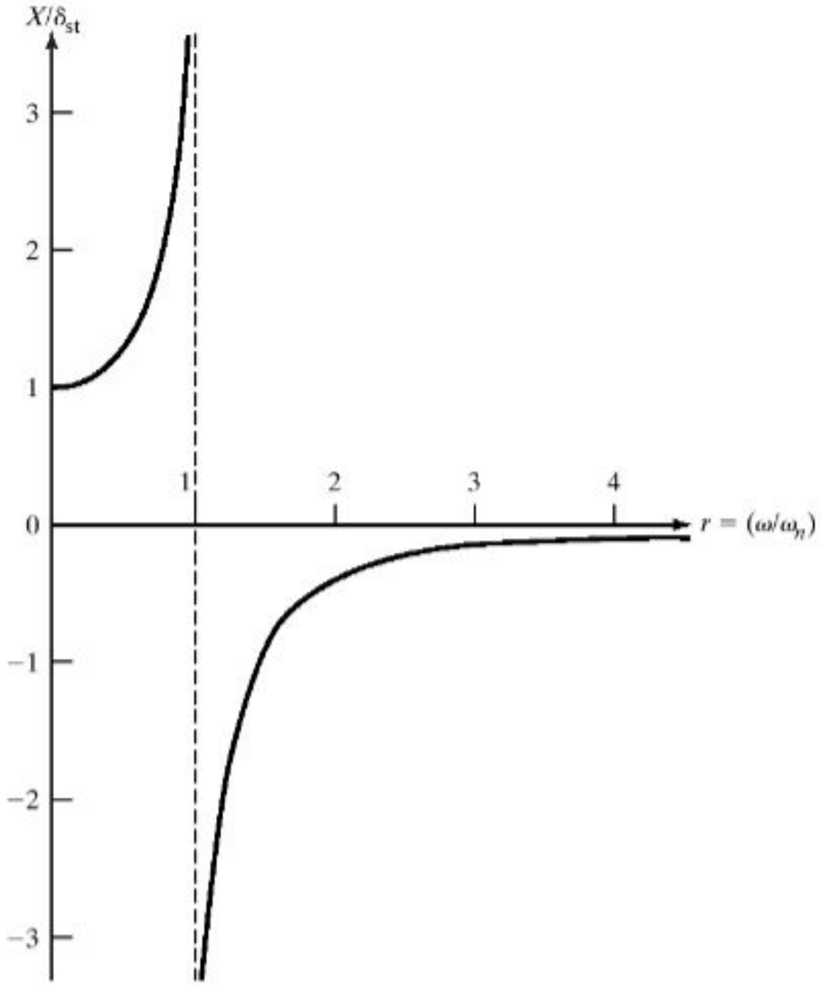
RESPOSTA DE UM SISTEMA NÃO AMORTECIDO À FORÇA HARMÔNICA

A figura ao lado apresenta a relação entre o fator de amplificação (**X/δ_{st}**)e a razão entre as frequências (**r**). Ela nos apresenta 3 casos que podem ocorrer com a amplitude do deslocamento.

caso 1 - 0 < r < 1

caso 2 - r > 1 (quanto maior a frequência, menor a amplitude dinâmica)

caso 3 - r = 1 (ressonância)

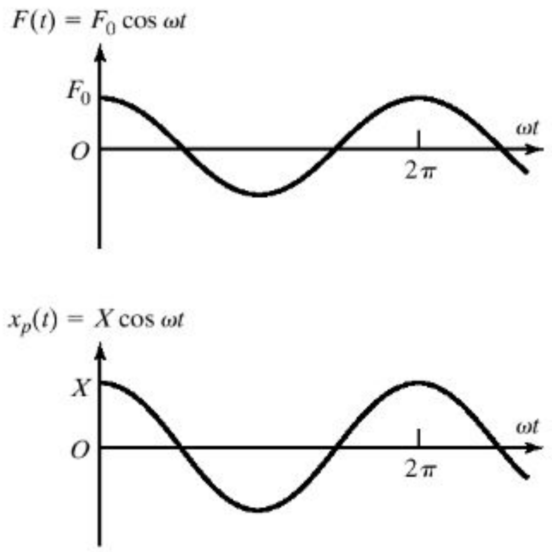


RESPOSTA DE UM SISTEMA NÃO AMORTECIDO À FORÇA HARMÔNICA

Caso 1: Quando **r** é **maior que zero e menor que 1**, nesse caso o denominador da equação do fator de amplificação é positivo e a resposta particular do sistema não sofre alteração. Diz-se que a resposta harmônica do sistema $x_p(t)$ está em fase com a força externa.

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$x_p(t) = X \cos \omega t$$



RESPOSTA DE UM SISTEMA NÃO AMORTECIDO À FORÇA HARMÔNICA

Caso 2: Quando **r** é **maior que 1**, nesse caso o denominador da equação do fator de amplificação é negativo e a resposta particular do sistema $x_p(t)$ será expressa como:

$$x_p(t) = -X\cos\omega t$$

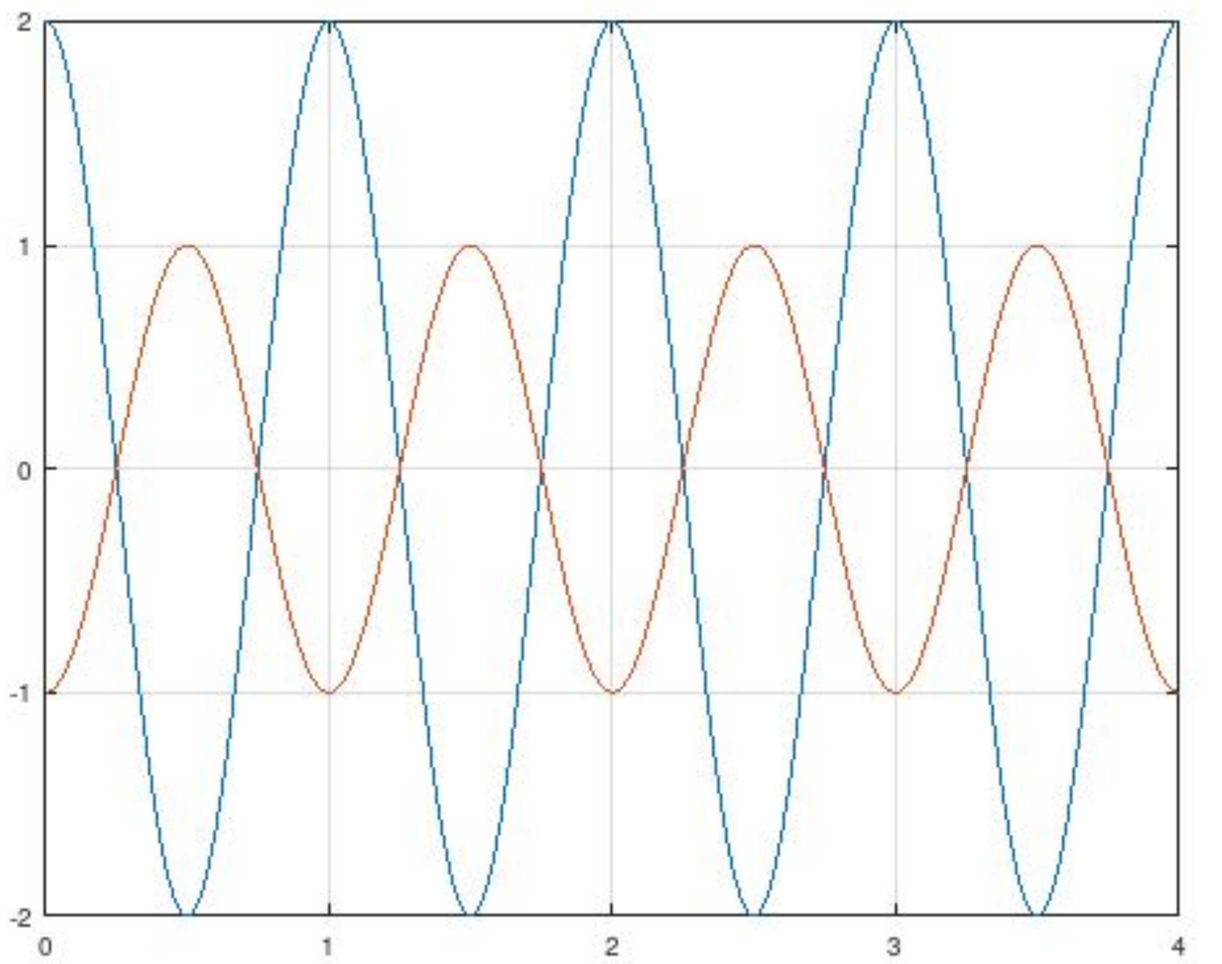
Neste caso a amplitude de movimento X é redefinida para ser uma quantidade positiva como :

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1}$$

RESPOSTA DE UM SISTEMA NÃO AMORTECIDO À FORÇA HARMÔNICA

Neste caso $x_p(t)$ e $F(t)$ têm sinais opostos, diz-se que a resposta está defasada de 180º em relação à força externa.

A linha em azul representa o sinal de entrada e a linha em vermelho o sinal de saída.



RESPOSTA DE UM SISTEMA NÃO AMORTECIDO À FORÇA HARMÔNICA

Caso 3: Quando **r** é **igual a 1**, nesse caso a amplitude X torna-se infinita.

Essa condição, para a qual a frequência forçante ω é igual a frequência natural do sistema ω_n, é denominada ressonância.

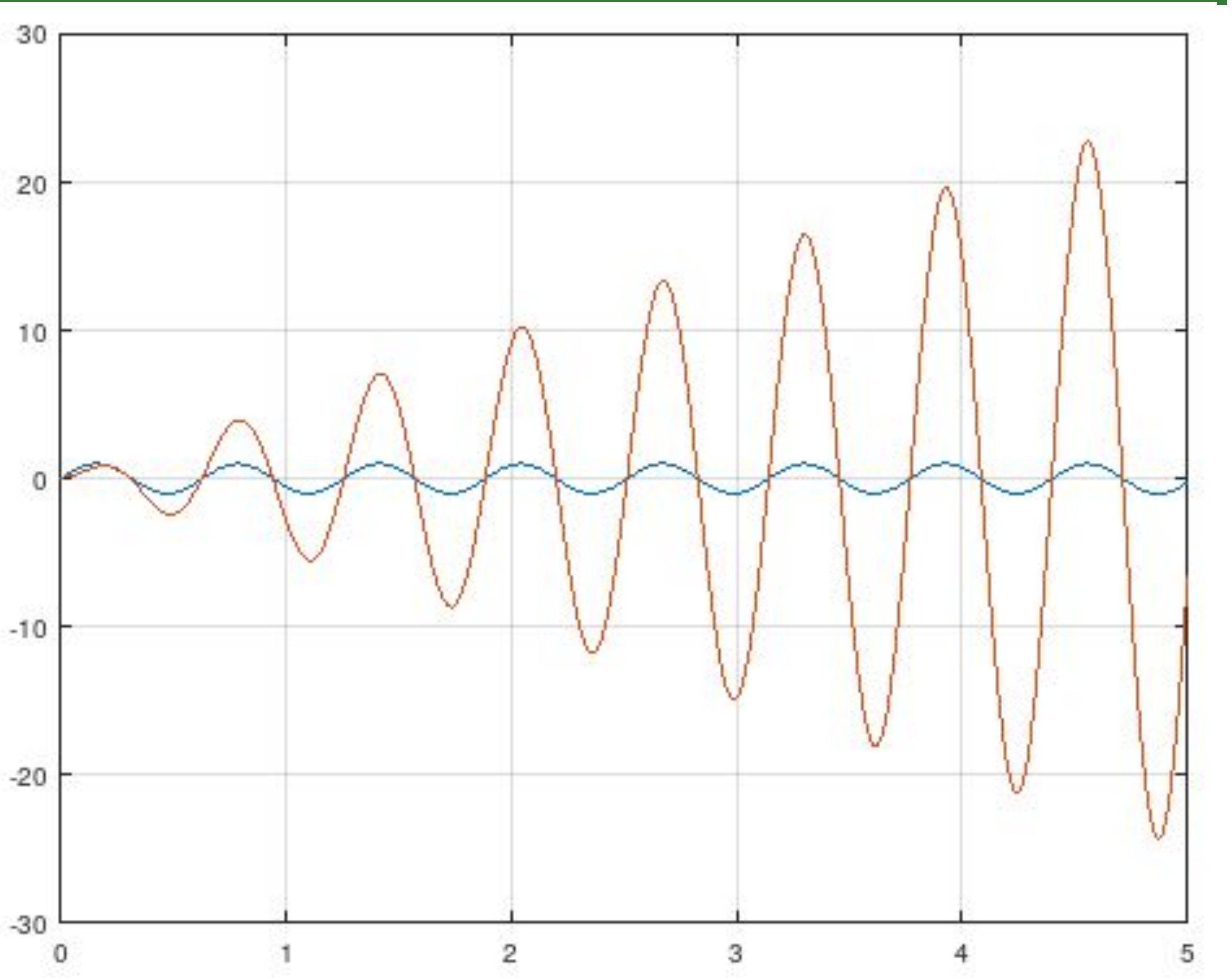
A resposta do sistema em ressonância é dada por:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} sen\, \omega_n t + \frac{\delta_{st}\, \omega_n t}{2} sen\, \omega_n t$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

RESPOSTA DE UM SISTEMA NÃO AMORTECIDO À FORÇA HARMÔNICA

A curva em azul é a entrada F(t) e a curva em laranja é a saída. Sistema em ressonância.



RESPOSTA DE UM SISTEMA NÃO AMORTECIDO À FORÇA HARMÔNICA

A resposta total do sistema pode ser expressa como:

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi) + \frac{\delta_{st}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\cos\omega t \qquad para\, r<1$$

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi) - \frac{\delta_{st}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\cos\omega t \qquad para\, r>1$$

RESPOSTA DE UM SISTEMA NÃO AMORTECIDO À FORÇA HARMÔNICA

Sendo:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\phi = tg^{-1}\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0\,\omega_n}\right)$$

RESPOSTA DOS EXERCÍCIOS

Exercícios 3.3 – Considere um sistema massa-mola com k = 4000 N/m e m = 10kg sujeito a uma força harmônica F(t) = 400 cos 10t. Determine e construa um gráfico da resposta total do sistema sob as seguintes condições iniciais x_0 = 0,1 m e v_0 = 10 m/s.

$$\omega = 10\, rad/s \quad F_0 = 400\, N \quad k = 4000\, N/m \quad m = 10\, kg$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4000}{10}} = 20\, rad/s \qquad \delta_{st} = \frac{F_0}{k} = \frac{400}{4000} = 0{,}1$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

RESPOSTA DOS EXERCÍCIOS

$$x(t)=\left(x_0-\frac{F_0}{k-m\,\omega^2}\right)\omega_n t+\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right) sen\,\omega_n t+\frac{F_0}{k-m\,\omega^2}\cos\omega t$$

$$x(t)=\left(0,1-\frac{400}{4000-10*10^2}\right)\cos 20t+\left(\frac{10}{20}\right) sen\,20t+\frac{400}{4000-10*10^2}\cos 10t$$

$$x(t)=-0,0333\cos 20t+0,5\,sen\,20t+0,133333\cos 10t$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

RESPOSTA DOS EXERCÍCIOS

$$x(t)=(x_0-\frac{F_0}{k-m\,\omega^2})\,\omega_n t+(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n})\,sen\,\omega_n t+\frac{F_0}{k-m\,\omega^2}\cos\omega t$$

$$x(t)=(0{,}1-\frac{400}{4000-10*10^2})\cos 20t+(\frac{10}{20})\,sen\,20t+\frac{400}{4000-10*10^2}\cos 10t$$

$$x(t)=-0{,}0333\cos 20t+0{,}5\,sen\,20t+0{,}133333\cos 10t$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

FENÔMENO DO BATIMENTO

Se a frequência forçante for próxima, mas não exatamente igual à frequência natural do sistema, pode ocorrer um fenômeno conhecido como **batimento**.

Nesse tipo de vibração, a amplitude aumenta e diminui segundo um padrão regular.

$$\tau_b = \frac{2\pi}{\omega_n - \omega} \qquad \omega_b = \omega_n - \omega$$

Sendo τ_b o período de batimento e ω_b a frequência de batimento.

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

REFERENCIAS

RAO, Singiresu. Vibrações mecânicas. 4.ed. São Paulo, SP: Pearson, c2009. 424 p. ISBN 9788576052005.

MUITO
OBRIGADO

Alexsander Furtado Carneiro

Professor de Eletrotécnica

www.ifsul.edu.br

E-mail de contato

TELEFONE DE CONTATO