INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense

Câmpus
Passo Fundo

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

Vibrações Sob Excitação Harmônica - Resposta de um Sistema amortecido à força harmônica.

Alexsander Furtado Carneiro

Resposta de um Sistema amortecido à força harmônica

Se a função forçante for $F(t) = F_0 \cos \omega t$, a equação do movimento será:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

Espera que a solução particula ($x_p(t)$) da equação do movimento também seja harmônica e que seja desta forma:

$$x_p(t) = X \cos(\omega t - \phi)$$

Onde X e ϕ são constantes a determinar e denotam respectivamente a amplitude e o ângulo de fase.

Resposta de um Sistema amortecido à força harmônica

$$x_p(t) = X\cos(\omega t - \phi)$$

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{\left[\left(k - m\,\omega^2\right)^2 + c^2\,\omega^2\right]}}$$

$$\phi = tg^{-1}\left(\frac{c\,\omega}{k - m\,\omega}\right)$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

Resposta de um Sistema amortecido à força harmônica

Da resposta particular ($x_p(t)$) realizando algumas substituições podemos determinar a quantidade M = X/δ_{st} que é denominada fator de amplificação, fator de ampliação ou coeficiente de amplitude.

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\,\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}}$$

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\,\xi r)^2}}$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

Resposta de um Sistema amortecido à força harmônica

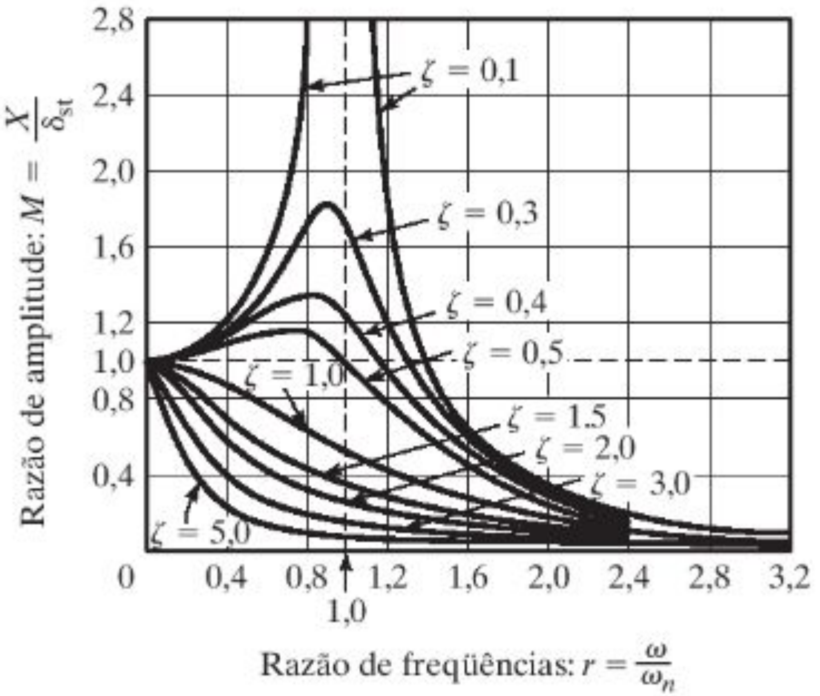
O ângulo de fase da resposta (ϕ) também pode ser escrito de outra forma:

$$\phi = tg^{-1}\left[\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right] = tg^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$

Resposta de um Sistema amortecido à força harmônica

As seguintes características do fator de amplificação (M) ou (X/δ_{st}) podem ser observadas na sua própria equação e na Figura que a relaciona o próprio fator de amplificação e a razão entre as frequências.

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\,\xi r)^2}}$$



Resposta de um Sistema amortecido à força harmônica

a) Qualquer quantidade de amortecimento ($\zeta > 0$) reduz o fator de amplificação (M) para todos os valores da frequência forçante.

b) Para qualquer valor especificado de r, um valor mais alto de amortecimento reduz o valor de M.

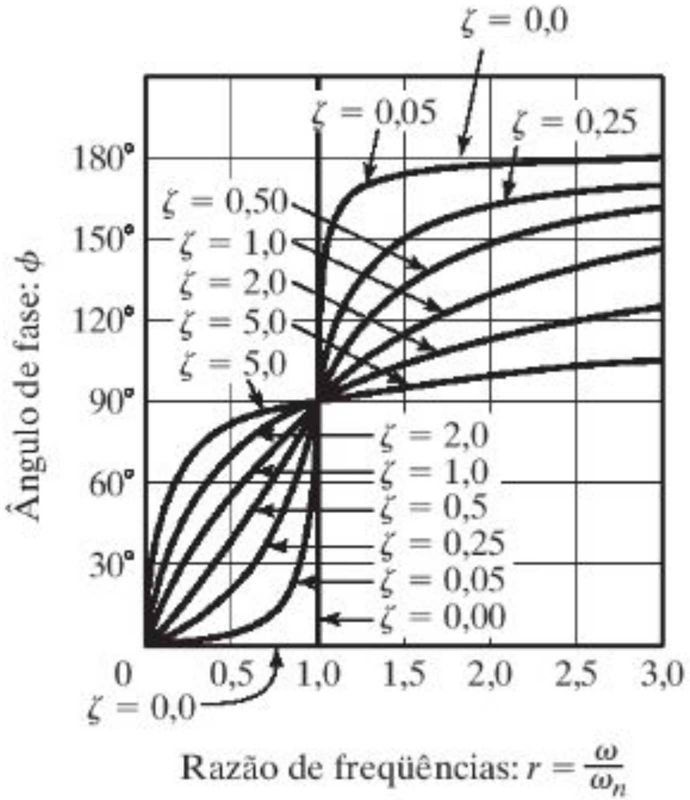
c) A redução de M na presença de amortecimento é muito significativa na ressonância ou próximo da ressonância.

d) A amplitude de vibração forçada torna-se menor com valores crescentes da frequência forçante ($M \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$).

Resposta de um Sistema amortecido à força harmônica

As seguintes caracaterísticas do ângulo de fase podem ser observadas pela sua própria equação e pela Figura abaixo:

$$\phi = tg^{-1}\left[\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right] = tg^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$



Resposta de um Sistema amortecido à força harmônica

a) Para um sistema não amortecido o ângulo de fase é zero para $0 < r < 1$ e 180° para $r > 1$.

b) Para $\zeta > 0$ e $0 < r < 1$, o ângulo de fase é dado para $0 < \phi < 90°$, o que implica que a resposta se atrasa em relação à excitação.

c) Para $\zeta > 0$ e $r > 1$, o ângulo de fase é dado para $90° < \phi < 180°$, o que implica que a resposta se adianta em relação à excitação.

d) Para $\zeta > 0$ e $r = 1$, o ângulo de fase é dado para $\phi = 90°$, o que implica que a diferença de fase entre a excitação e a resposta é 90º.

Resposta de um Sistema amortecido à força harmônica

Resposta total

A solução completa é dada por $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$. Então deve-se observar a equação para cada caso de amortecimento.

Assim, para um sistema subamortecido temos:

$$x(t) = X_0 e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi_0) + X\cos(\omega t - \phi)$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

Resposta de um Sistema amortecido à força harmônica

$$x(t)=X_0 e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t-\phi_0)+X\cos(\omega t-\phi)$$

$$X_0=\sqrt{(x_0-X\cos\phi)^2+\frac{1}{\omega_d^2}(\xi\omega_n x_0+\dot{x}_0-\xi\omega_n X\cos\phi-\omega X\,sen\,\phi)^2}$$

$$\phi_0=tg^{-1}\left(\frac{\xi\omega_n x_0+\dot{x}_0-\xi\omega_n X\cos\phi-\omega X\sin\phi}{\omega_d(x_0-X\cos\phi)}\right)$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

Resposta de um Sistema amortecido à força harmônica

Determine a resposta total de um sistema com um grau de liberdade com m = 15 kg, c = 30 N.s/m, k = 2000 N/m, x_0 = 0,01, v_0 = 0 , que está sob a ação de uma força externa F(t) = 150 cos 12t.

$$\omega_n=\sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)}=\sqrt{\left(\frac{2000}{15}\right)}=11{,}547\,rad/s$$

$$\delta_{st}=\frac{F_0}{k}=\frac{150}{2000}=0{,}075$$

$$\zeta=\frac{c}{c_c}=\frac{c}{2\sqrt{km}}=\frac{30}{2\sqrt{2000*15}}=0{,}086603$$

$$\omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n=\sqrt{1-0{,}086603^2}*11{,}547=11{,}504\,rad/s$$

Resposta de um Sistema amortecido à força harmônica

$$r=\frac{\omega}{\omega_n}=\frac{12}{11,547}=1,0392$$

$$X=\frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1-r^2)^2-(2\xi r)^2}}=\frac{0,075}{\sqrt{(1-1,0392^2)-(2*0,086603*1,0392)^2}}=0,38075\,m$$

$$\phi=tg^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right)=tg^{-1}\left(\frac{2*0,086603*1,0392}{1-1,0392^2}\right)=-1,1526\,rad$$

Resposta de um Sistema amortecido à força harmônica

$$X_0=\sqrt{(x_0-X\cos\phi)^2+\frac{1}{\omega_d^2}(\zeta\omega_n x_0+\dot{x}_0-\zeta\omega_n X\cos\phi-\omega X\,sen\,\phi)^2}$$

$$X_0=\sqrt{(0{,}01-0{,}38075\cos-1{,}1526)^2+\frac{1}{11{,}504^2}(0{,}086603*11{,}547*0{,}01+0-0{,}086603*11{,}547*0{,}38075*\cos(-1{,}1526)-12*0{,}38075*sen(-1{,}1526))^2}$$

$$X_0=0{,}37906\,m$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

Resposta de um Sistema amortecido à força harmônica

$$\phi_0 = tg^{-1}\left(\frac{\zeta\omega_n x_0 + \dot{x}_0 - \zeta\omega_n X\cos\phi - \omega X\sin\phi}{\omega_d\left(x_0 - X\cos\phi\right)}\right)$$

$$\phi_0 = tg^{-1}\left(\frac{0{,}086603 * 11{,}547 * 0{,}01 + 0 - 0{,}086603 * 11{,}547 * 0{,}38075 * \cos(-1{,}1526) - 12 * 0.38075 * sen(-1{,}1526)}{11{,}504 * (0{,}01 - 0{,}38075 * \cos(-1{,}1526))}\right)$$

$$\phi_0 = -1{,}1793\, rad$$

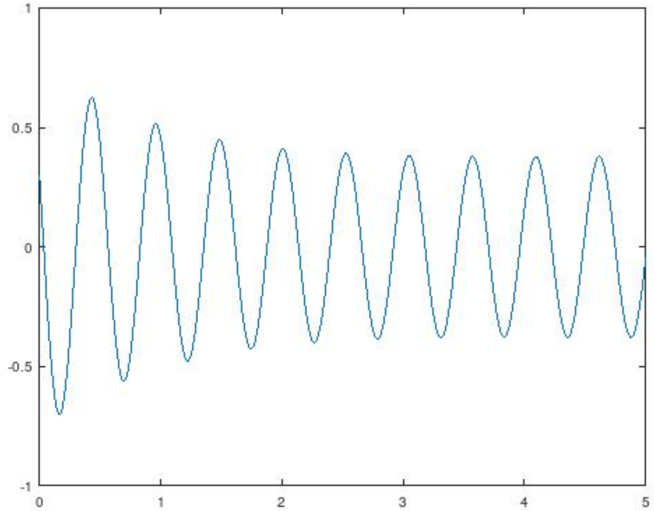
EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

Resposta de um Sistema amortecido à força harmônica

$$x(t)=X_0 e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t-\phi_0)+X\cos(\omega t-\phi)$$

$$x(t)=0,37906*e^{-0,086603*11,547t}\cos(11,504t-(-1,1793))+0,38075*\cos(15t-(-1,1526))$$

$$x(t)=0,37906*e^{t}\cos(11,504t+1,1793)+0,38075*\cos(15t+1,1526$$



Fator de qualidade e largura de banda

Para valores pequenos de amortecimento (ζ < 0,05), podemos dizer que:

$$\left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{máx} \simeq \left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{2\,\zeta} = Q$$

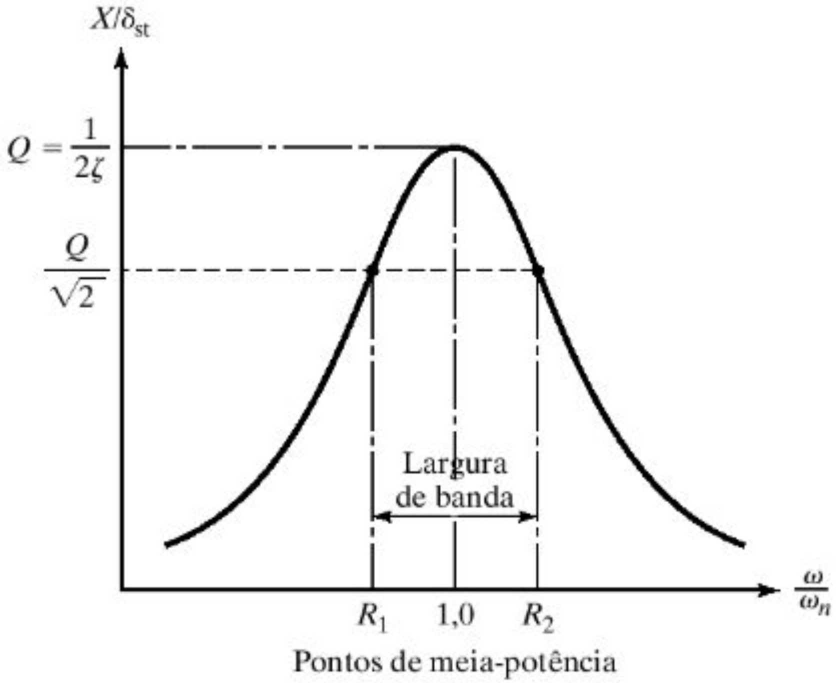
Q, que é o coeficiente de amplitude em ressonância também é chamado fator Q ou fator de qualidade do sistema.

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

Fator de qualidade e largura de banda

Os pontos R_1 e R_2 onde o fator de amplificação cai para $Q/\sqrt{2}$ são denominados pontos de meia-potência.

A diferença entre as frequências associadas com os pontos de meia-potência R_1 e R_2 do sistema é denominada largura de banda do sistema.



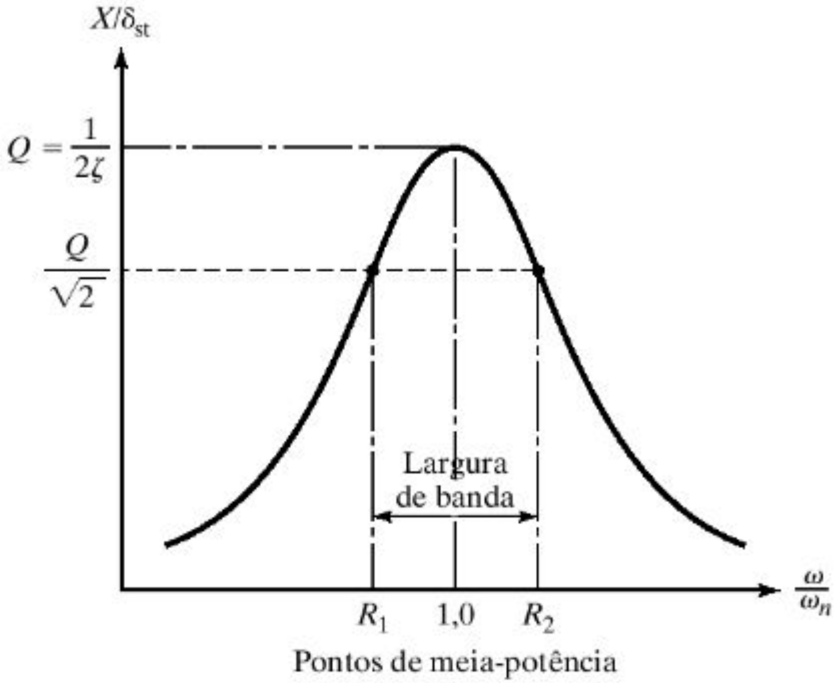
EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

Fator de qualidade e largura de banda

$$R_1^2=\left(\frac{\omega_1}{\omega_n}\right)^2\simeq 1-2\,\zeta \qquad R_2^2=\left(\frac{\omega_2}{\omega_n}\right)^2\simeq 1+2\,\zeta$$

$$\Delta\,\omega=\omega_2-\omega_1\simeq 2\,\zeta\,\omega_n$$

$$Q\simeq\frac{1}{2\,\zeta}\simeq\frac{\omega_n}{\omega_2-\omega_1}$$



EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

REFERENCIAS

RAO, Singiresu. Vibrações mecânicas. 4.ed. São Paulo, SP: Pearson, c2009. 424 p. ISBN 9788576052005.

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

MUITO OBRIGADO

Alexsander Furtado Carneiro

Professor de Eletrotécnica

www.ifsul.edu.br

E-mail de contato

TELEFONE DE CONTATO