INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Passo Fundo

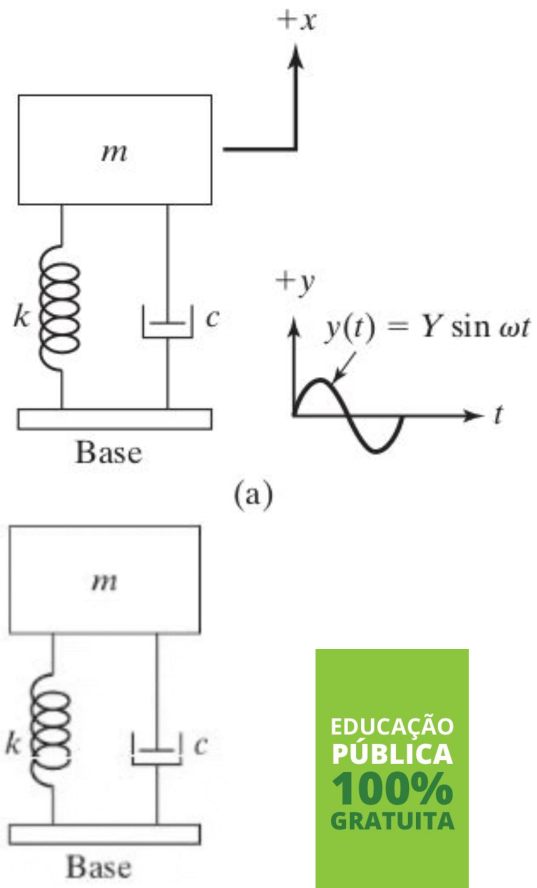
Vibrações Sob Excitação Harmônica - Resposta de um sistema amortecido a movimento harmônico de base

Alexsander Furtado Carneiro

Resposta de um sistema amortecido a movimento harmônico de base

Às vezes, a base ou o suporte de um sistema mola-massa-amortecedor sofre movimento harmônico, como mostrado na Figura.

Seja y(t) o deslocamento da base e x(t) o deslocamento da massa de sua posição de equilíbrio estático no tempo t.



EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

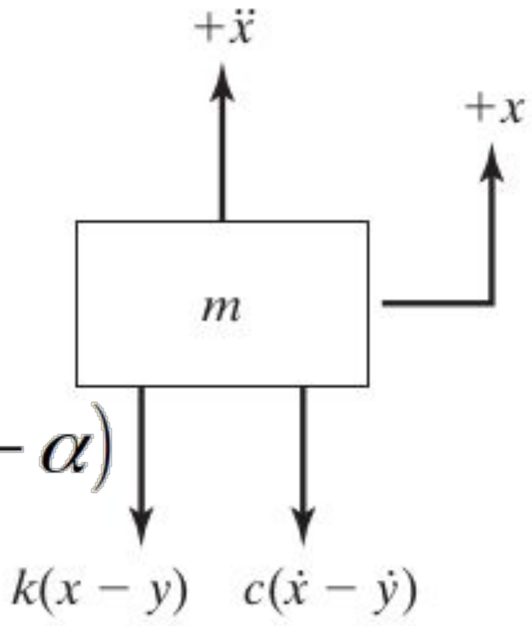
Resposta de um sistema amortecido a movimento harmônico de base

Então, o alongamento líquido da mola é (x - y) e a velocidade relativa entre as duas extremidades do amortecedor é a derivadas de x e y. A partir do diagrama de corpo livre mostrado na Figura, obtemos a equação do movimento:

$$m\ddot{x}+c(\dot{x}-\dot{y})+k(x-y)=0$$

$$y(t)=Y\,\text{sen}\,\omega t$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=ky+c\dot{y}=kY\,\text{sen}\,\omega t+c\,\omega Y\cos\omega t=A\,\text{sen}(\omega t-\alpha)$$

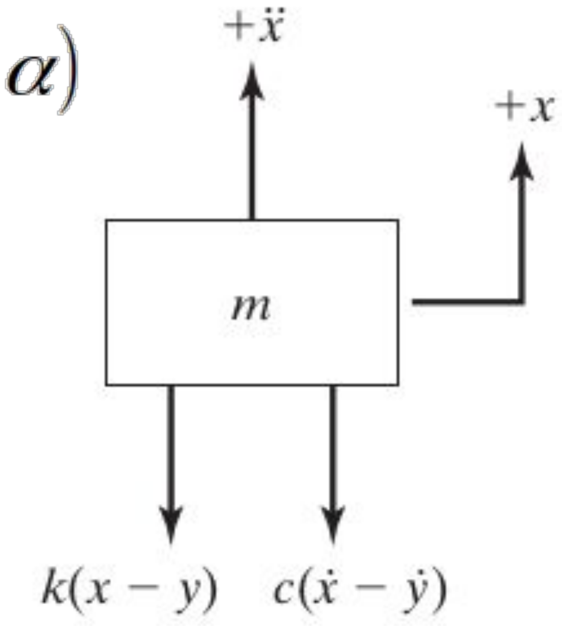


Resposta de um sistema amortecido a movimento harmônico de base

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=ky+c\dot{y}=kY\,\mathrm{sen}\,\omega t+c\,\omega Y\cos\omega t=A\,\mathrm{sen}(\omega t-\alpha)$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=A\,\mathrm{sen}(\omega t-\alpha)$$

$$A=Y\sqrt{k^2+(c\,\omega)^2}\qquad \alpha=\tan^{-1}\left[-\frac{c\,\omega}{k}\right]$$



EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

Resposta de um sistema amortecido a movimento harmônico de base

Isso mostra que ao aplicar uma excitação na base, é equivalente a aplicar uma força harmônica de magnitude A à massa. Usando a solução indicada para a resposta de um sistema com amortecimento, a resposta de regime permanente da massa, $x_p(t)$, pode ser expressa como:

$$x_p = X\, sen(\omega t - \phi)$$

$$X = \frac{Y\sqrt{k^2 + (c\,\omega)^2}}{\sqrt{[(k - m\,\omega^2)^2 + (c\,\omega)^2]}} \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{mc\,\omega^3}{k(k - m\,\omega^2) + (\omega c)^2}\right)$$

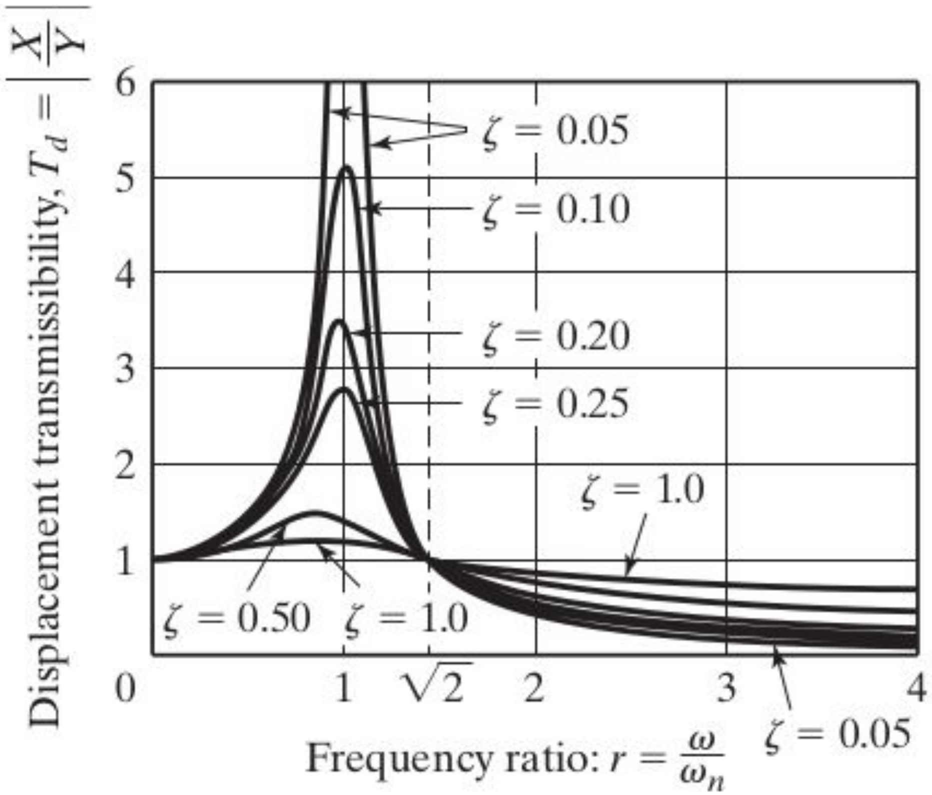
Resposta de um sistema amortecido a movimento harmônico de base

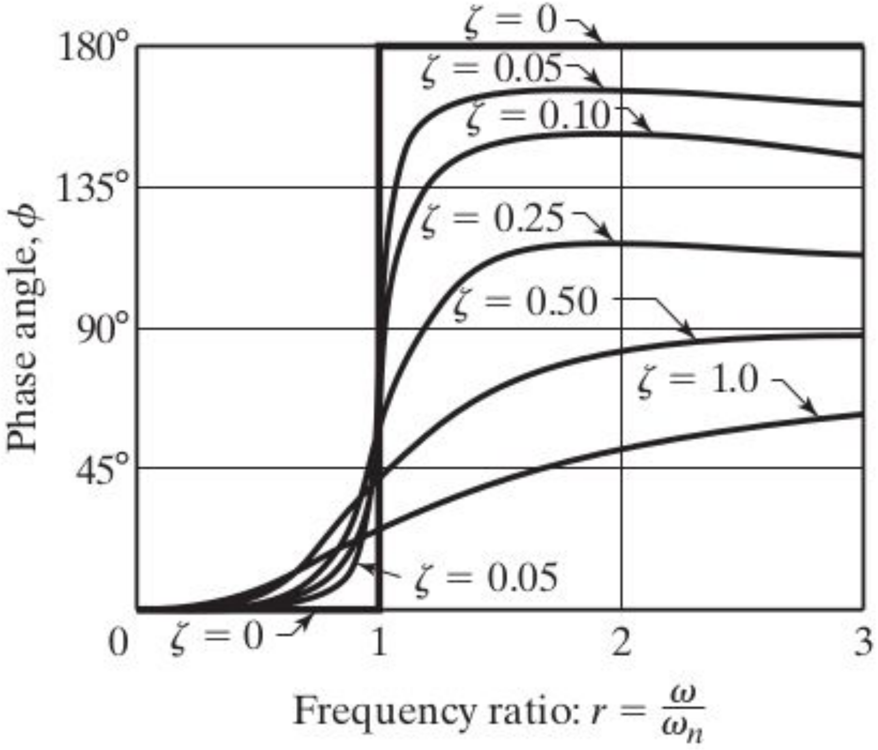
A razão entre a amplitude da resposta $x_p(t)$ e a amplitude do movimento da base $y(t)$, X/Y, é chamada de ***transmissibilidade de deslocamento***.

$$\frac{X}{Y}=\sqrt{\frac{k^2+(c\,\omega)^2}{(k-m\,\omega^2)^2+(c\,\omega)^2}} \qquad \frac{X}{Y}=\sqrt{\frac{1+(2\,\xi r)^2}{(1-r^2)^2+(2\,\xi r)^2}}$$

A transmissibilidade de deslocamento pode ser chamada de $\mathbf{T_d}$.

Resposta de um sistema amortecido a movimento harmônico de base



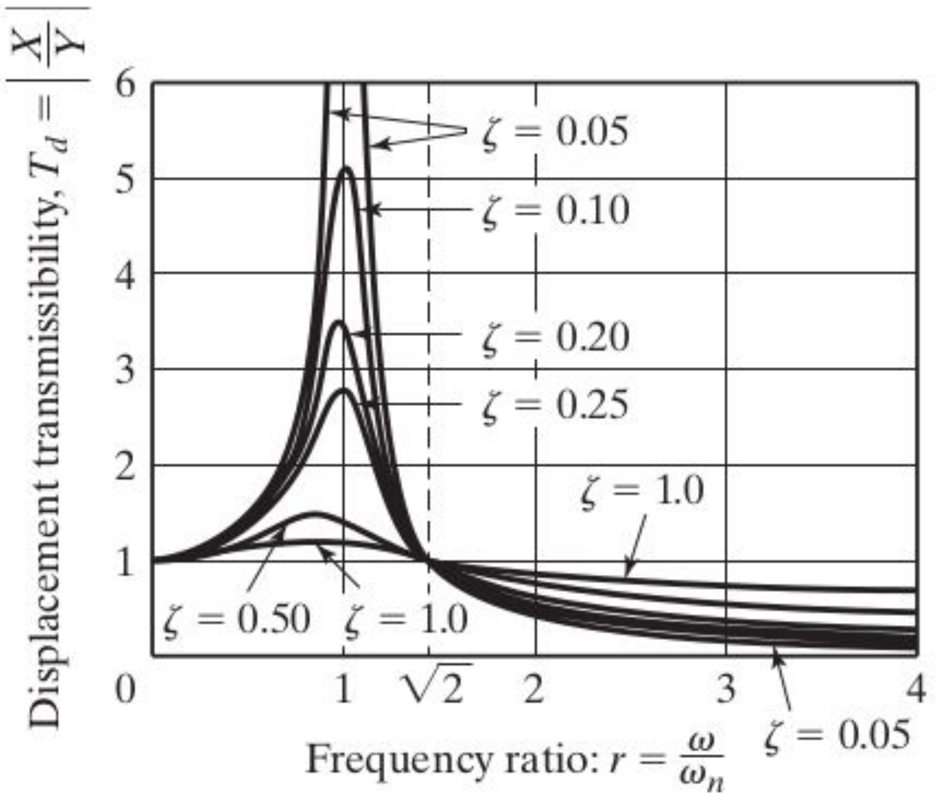


EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

Resposta de um sistema amortecido a movimento harmônico de base

Os seguintes aspectos da transmissibilidade de deslocamento, T_d = X/Y, podem ser observados na Figura:

1. O valor de T_d é unitário em r = 0 e próximo à unidade para pequenos valores de r.
2. Para um sistema não amortecido, Td →∞ em ressonância (r = 1).

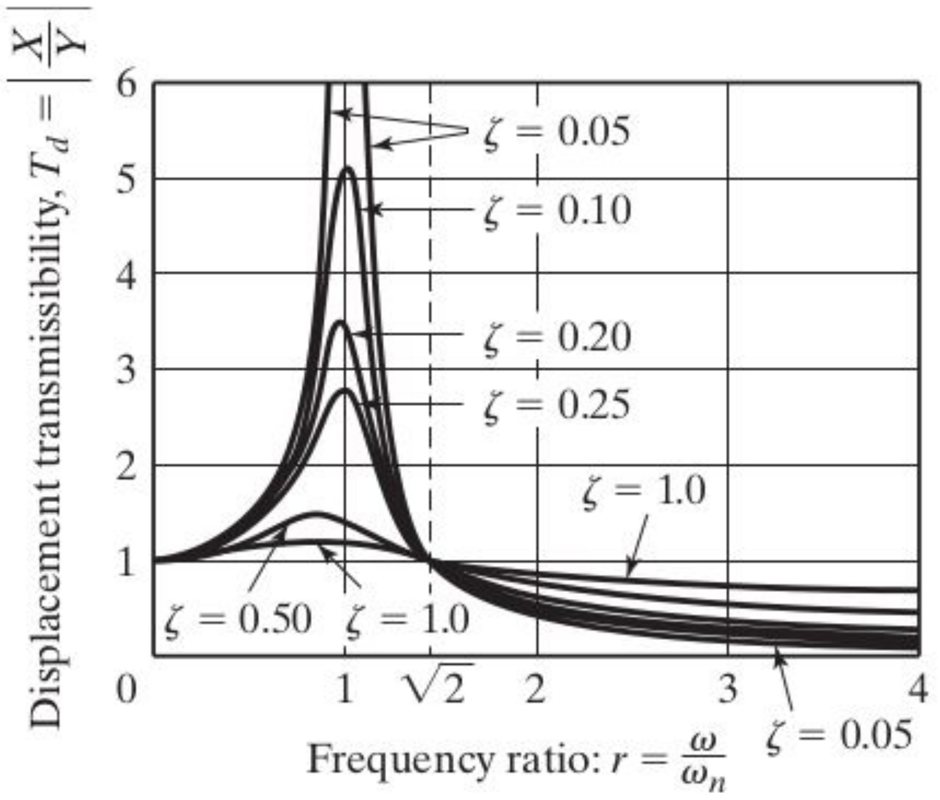


Resposta de um sistema amortecido a movimento harmônico de base

3. O valor de Td é menor que a unidade (Td < 1) para valores de $r > \sqrt{2}$.

4. O valor de Td = 1 para todos os valores de amortecimento em $r = \sqrt{2}$

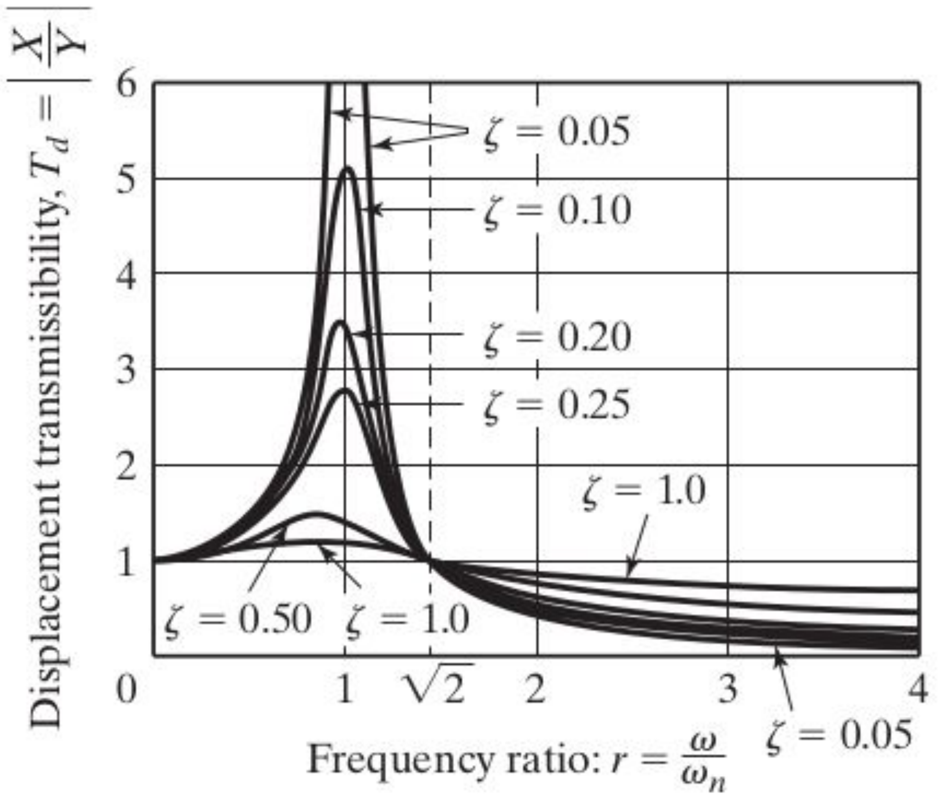
5. Para $r < \sqrt{2}$, fatores de amortecimento menores levam a valores maiores de T_d.



Resposta de um sistema amortecido a movimento harmônico de base

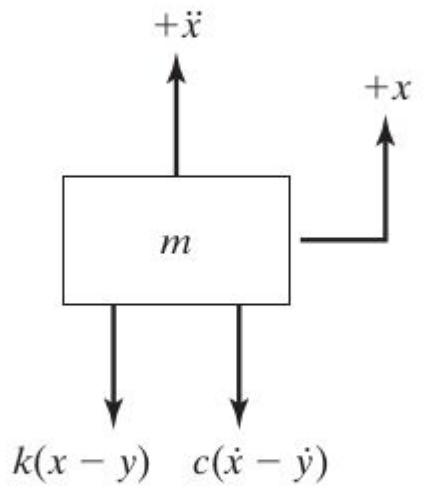
6. A transmissibilidade de deslocamento, T_d, atinge um máximo para $0<\zeta<1$ à razão de frequências $r = r_m < 1$ da por:

$$r_m=\frac{1}{2\zeta}\sqrt{\sqrt{1+8\zeta^2}-1}$$



Resposta de um sistema amortecido a movimento harmônico de base - Força transmitida

Pela Figura, podemos ver que uma força, F, é transmitida para a base ou suporte devido às reações da mola e do amortecedor.



Essa força pode ser determinada como:

$$F = m\,\omega^2 X\, sen(\omega t - \phi) \qquad F = F_T\, sen(\omega t - \phi)$$

$$F_T = m\,\omega^2 X$$

Resposta de um sistema amortecido a movimento harmônico de base - Força transmitida

Da amplitude máxima (F_T) podemos fazer uma relação com a amplitude da força excitadora na base (Y) e a rigidez da mola (k). Essa relação (F_T/kY) é chamada de transmissibilidade de força e pode ser calculada por:

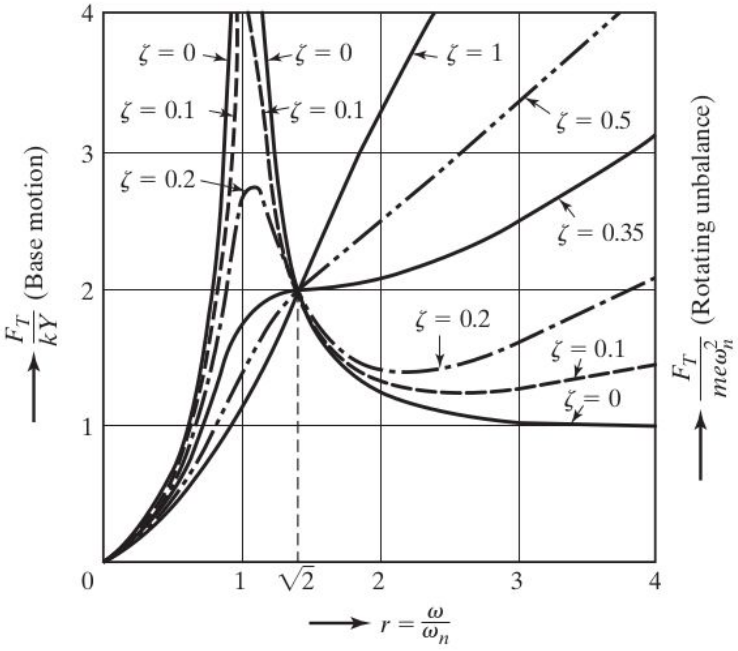
$$\frac{F_T}{kY} = r^2 \sqrt{\frac{1+(2\xi r)^2}{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

Resposta de um sistema amortecido a movimento harmônico de base - Força transmitida

Da amplitude máxima (F_T) existe uma relação com a amplitude da força excitadora na base (Y) e a rigidez da mola (k). Essa relação (F_T/kY) é chamada de **transmissibilidade de força** e pode ser calculada por:

$$\frac{F_T}{kY} = r^2 \sqrt{\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$



A figura apresenta a variação da transmissibilidade de força em função da razão das frequências

Resposta de um sistema amortecido a movimento harmônico de base - Movimento relativo

Se z = x - y denotar o movimento relativo da massa em relação à base. z(t) será dada por:

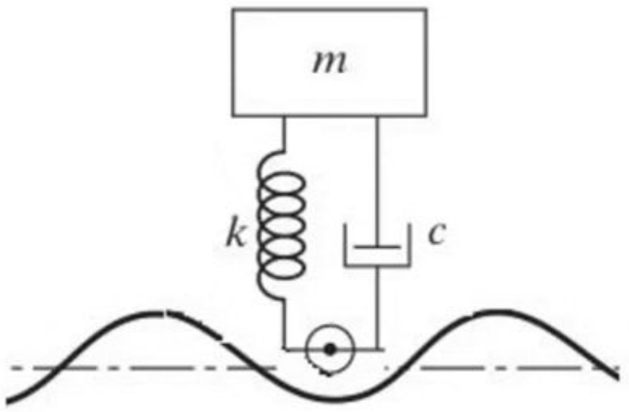
$$z(t) = Z \, sen(\omega t - \phi_1)$$

$$Z = \frac{m\omega^2 Y}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \qquad Z = Y \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

$$\phi_1 = tg^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) = tg^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right)$$

Resposta de um sistema amortecido a movimento harmônico de base

Exemplo (exercício 3.44): Um automóvel é modelado como um sistema com um grau de liberdade que vibra no sentido vertical e está percorrendo uma estrada na qual a variação da elevação é senoidal. A distância entre pico e vale é 0,2m e a distância entre picos ao longo da estrada é 35 m. Se a frequência natural do automóvel for 2 Hz e o fator de amortecimento dos amortecedores de choque for 0,15, determine a amplitude de vibração do automóvel a uma velocidade de 60 km/h.



Resposta de um sistema amortecido a movimento harmônico de base

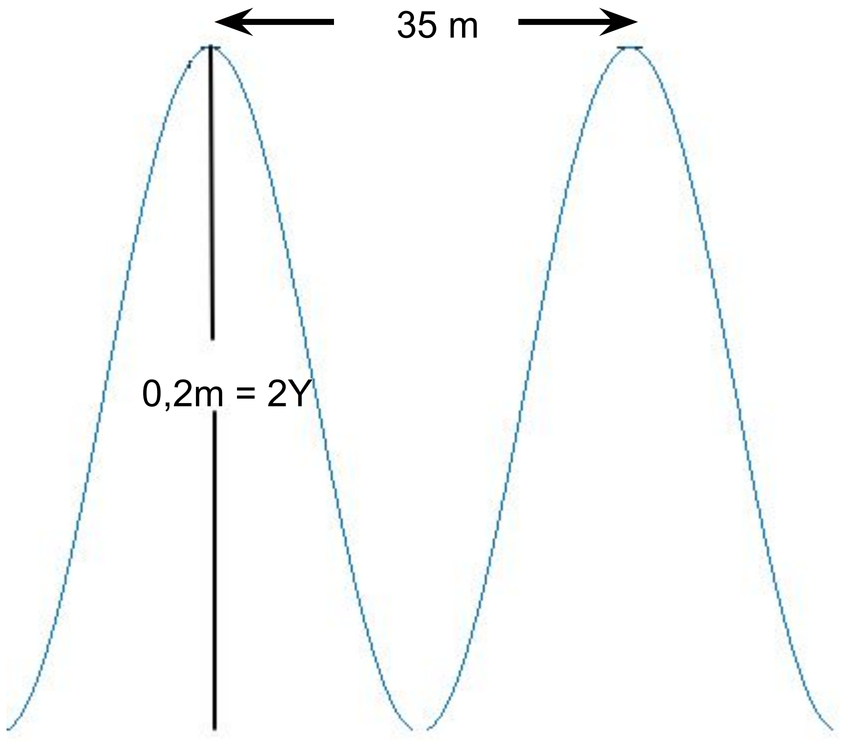
Primeiro passo, precisamos modelar o sinal y(t) que é baseado no caminho que está sendo realizado pelo automóvel.

$$y(t) = Y\, sen\, \omega t \qquad 2Y = 0{,}2\, m \quad Y = 0{,}1\, m$$

$$\tau = distânica / velocidade = \frac{35 * 3600}{60 * 1000} = 2{,}1\, s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2 * pi}{2{,}1} = 2{,}992\, rad/s$$

$$y(t) = 0{,}1 \cos(2{,}992\, t)\, m$$



Resposta de um sistema amortecido a movimento harmônico de base

$$\omega_n = 2\pi f = 2*3{,}1416*2 = 12{,}566\, rad/s$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2{,}992}{12{,}566} = 0{,}2381$$

$$X = Y\sqrt{\frac{1+(2\xi r)^2}{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}$$

$$X = 0{,}1*\sqrt{\frac{1+(2*0{,}15*0{,}2381)^2}{(1-0{,}2381^2)^2+(2*0{,}15*0{,}2381)^2}} = 0{,}105977\, m$$

REFERENCIAS

RAO, Singiresu. Vibrações mecânicas. 4.ed. São Paulo, SP: Pearson, c2009. 424 p. ISBN 9788576052005.

EDUCAÇÃO PÚBLICA 100% GRATUITA

MUITO
OBRIGADO

Alexsander Furtado Carneiro

Professor de Eletrotécnica

www.ifsul.edu.br
E-mail de contato
TELEFONE DE CONTATO