



INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense

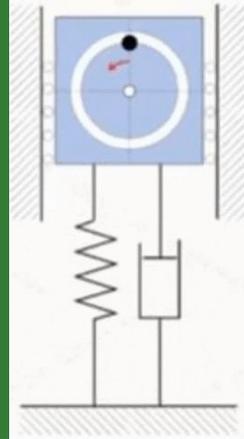
Câmpus
Passo Fundo

EDUCAÇÃO
PÚBLICA
100%
GRATUITA

Vibrações Sob Excitação Harmônica - Resposta de um sistema amortecido ao Desbalanceamento Rotativo

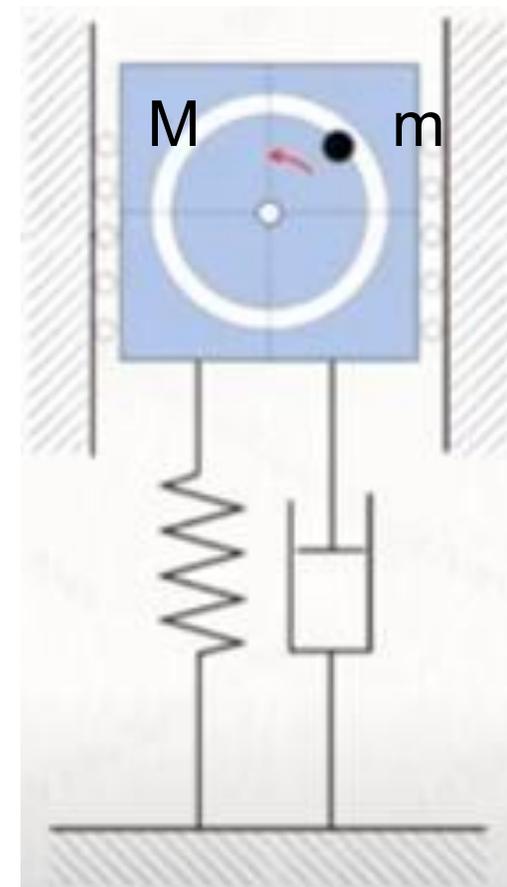
Alexsander Furtado Carneiro

Resposta de um sistema amortecido ao Desbalanceamento Rotativo

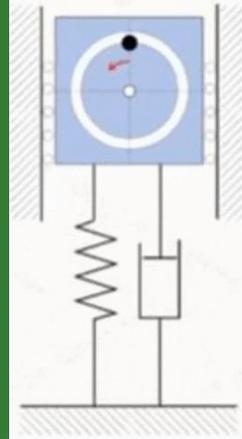


O desbalanceamento de máquinas rotativas é uma das principais causas de vibração.

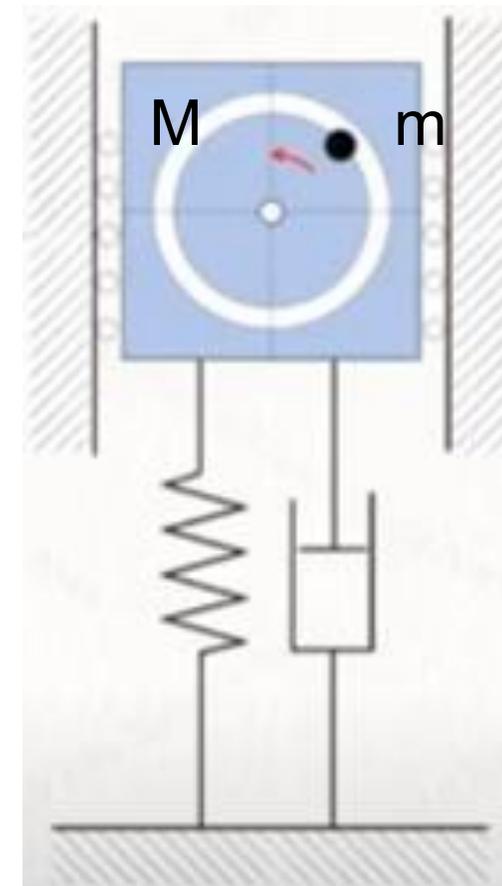
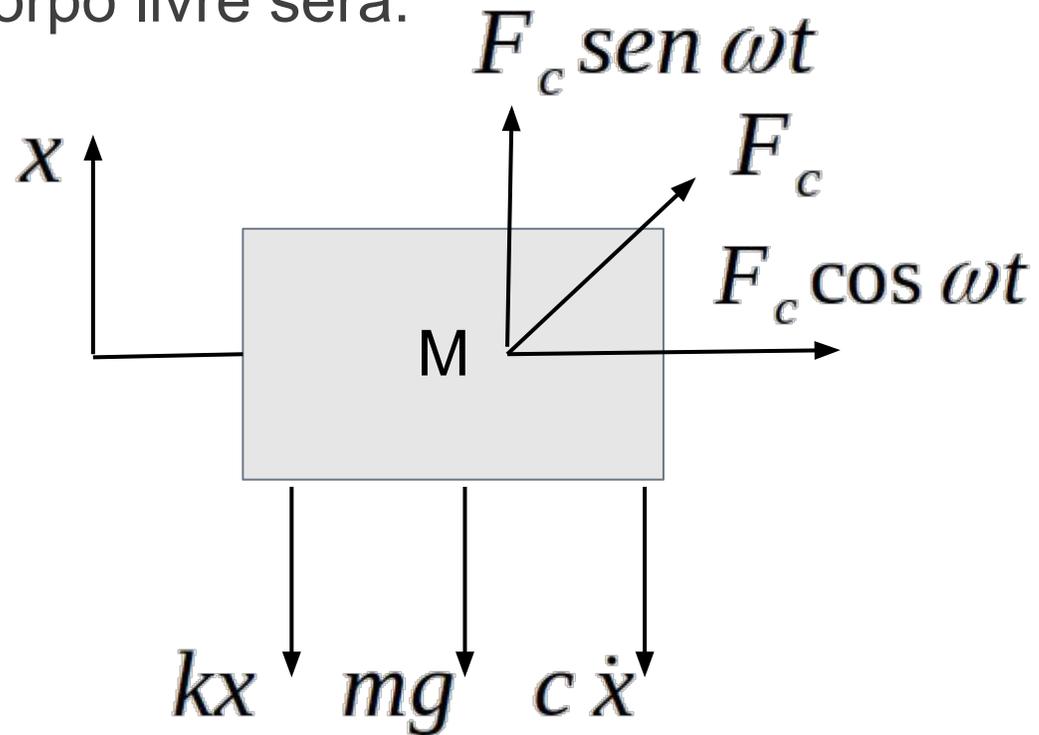
Considere o sistema apresentado ao lado. Ele é formado por uma massa M , a mola e o amortecedor. Temos uma massa m , que causa um desbalanceamento nesta máquina. Essa massa, m está localizada a um raio e , chamado raio de excentricidade.



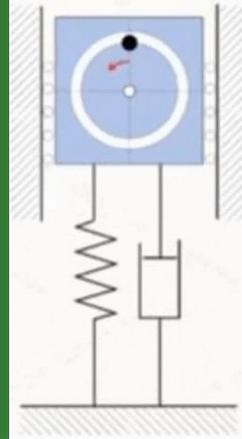
Resposta de um sistema amortecido ao Desbalanceamento Rotativo



O diagrama de corpo livre será:



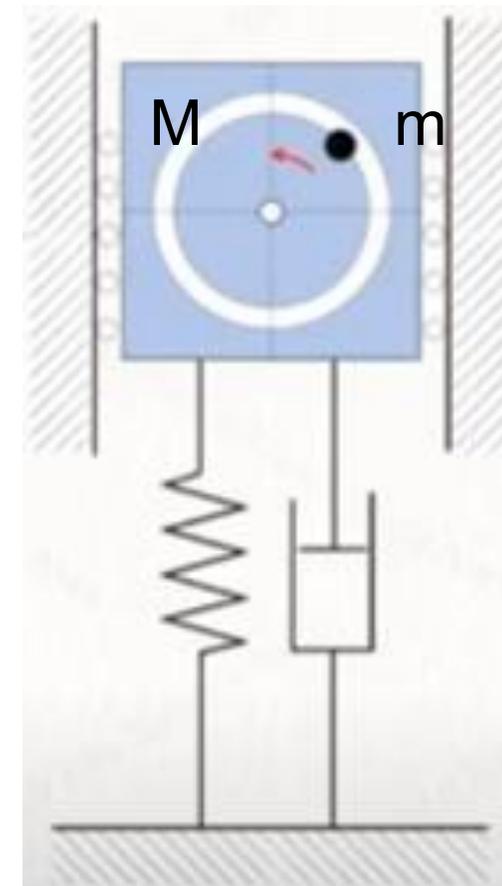
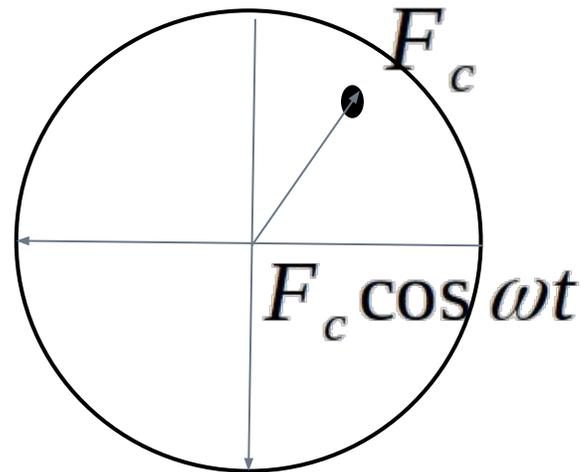
Resposta de um sistema amortecido ao Desbalanceamento Rotativo



A força centrífuga será:

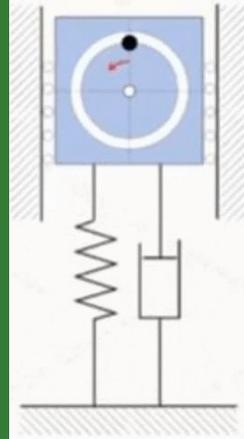
$$F_c = m e \omega^2$$

$$F_c \sin \omega t$$

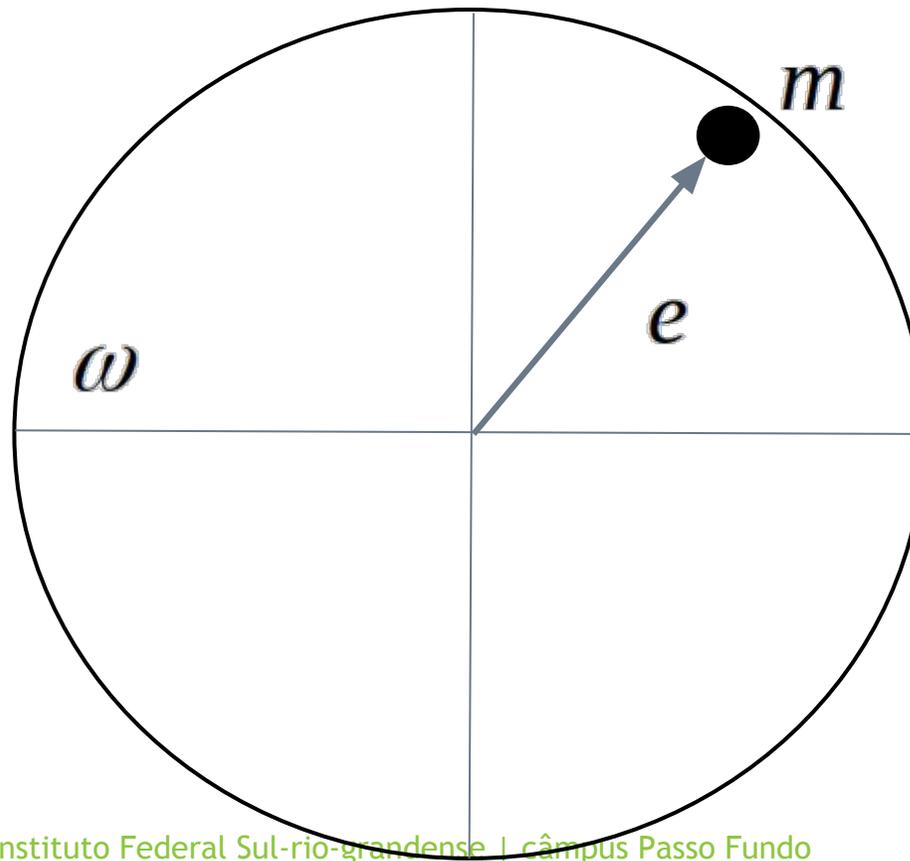


Como estamos analisando somente um grau de liberdade, somente se utiliza a componente com seno.

Resposta de um sistema amortecido ao Desbalanceamento Rotativo



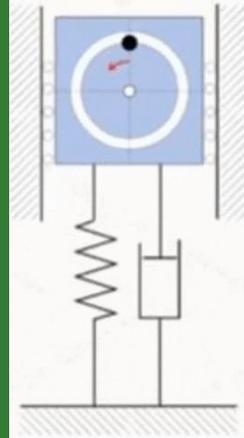
ω é a velocidade angular em que o equipamento está girando.



m será a massa que está causando o desbalanceamento

e é o raio formado entre a massa e o centro do equipamento.

Resposta de um sistema amortecido ao Desbalanceamento Rotativo



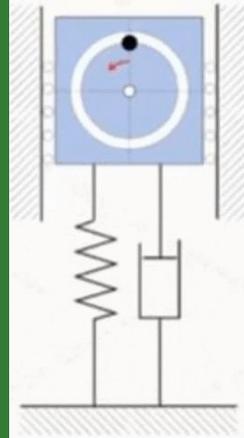
A equação do movimento para o desbalanceamento rotativo será:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = me \omega^2 \text{sen } \omega t$$

A solução particular para essa equação será:

$$x_p(t) = X \text{sen}(\omega t - \phi)$$

Resposta de um sistema amortecido ao Desbalanceamento Rotativo

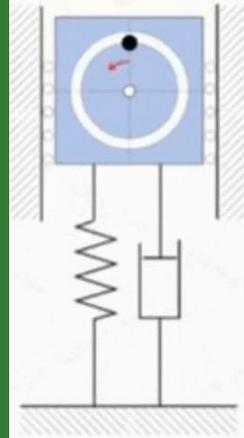


$$x_p(t) = X \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$$

$$X = \frac{m e \omega^2}{\sqrt{(k - M \omega^2)^2 + (c \omega)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{c \omega}{k - M \omega^2} \right)$$

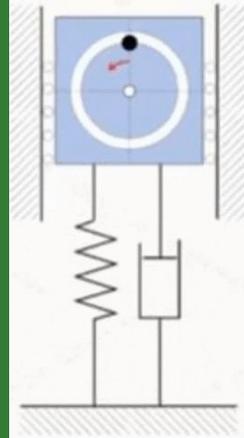
Resposta de um sistema amortecido ao Desbalanceamento Rotativo



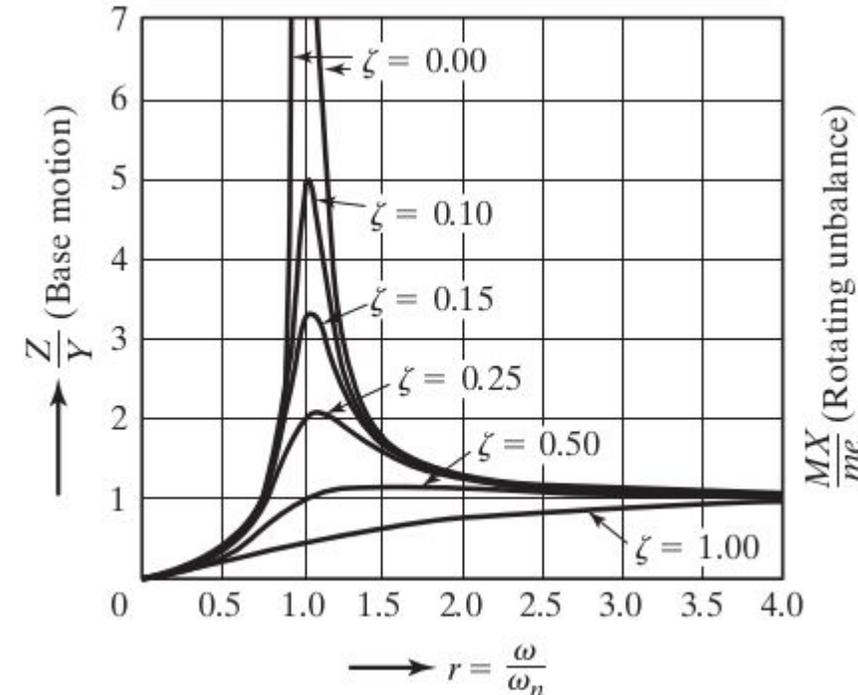
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad \zeta = \frac{c}{c_c} \quad c_c = 2M\omega_n$$

$$\frac{MX}{me} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$

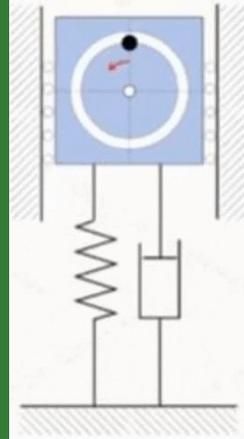
Resposta de um sistema amortecido ao Desbalanceamento Rotativo



- 1) Todas as curvas começam com amplitude zero. A amplitude perto da ressonância ($\omega = \omega_n$) é marcadamente afetada pelo amortecimento. Portanto, se a máquina deve funcionar perto da ressonância, o amortecimento deve ser introduzido propositalmente para evitar amplitudes perigosas.



Resposta de um sistema amortecido ao Desbalanceamento Rotativo

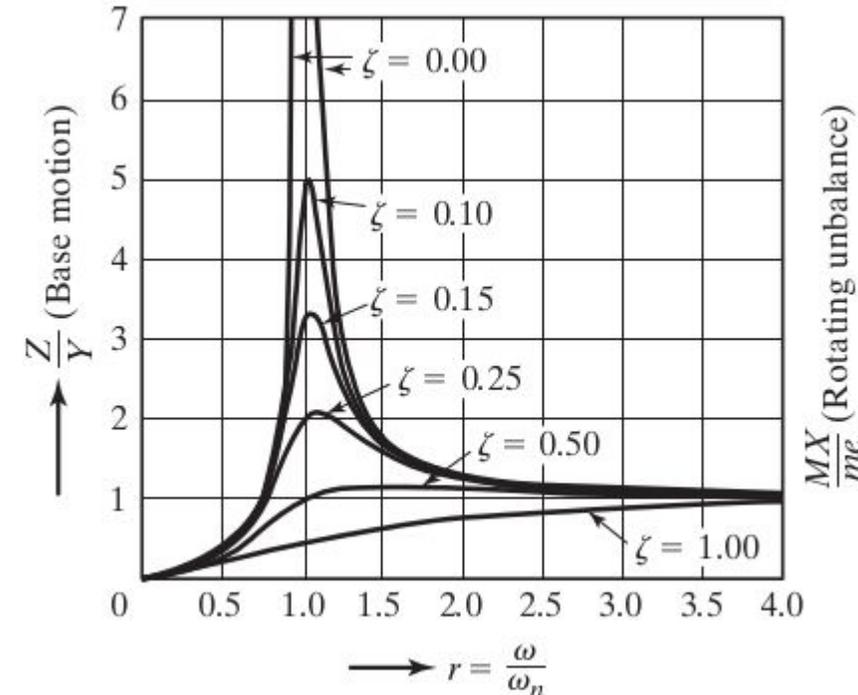


2) Em velocidades muito altas (ω grande), $\frac{MX}{me}$ é quase a unidade e o efeito do amortecimento é insignificante.

3) Para $0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ o máximo de $\frac{MX}{me}$ ocorre em:

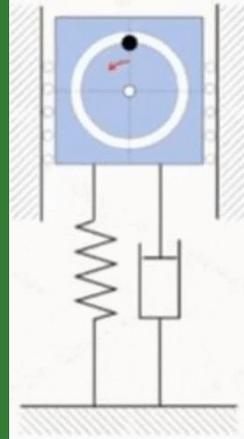
$$\left(\frac{MX}{me}\right)_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

o pico ocorre quando $r = 1$.



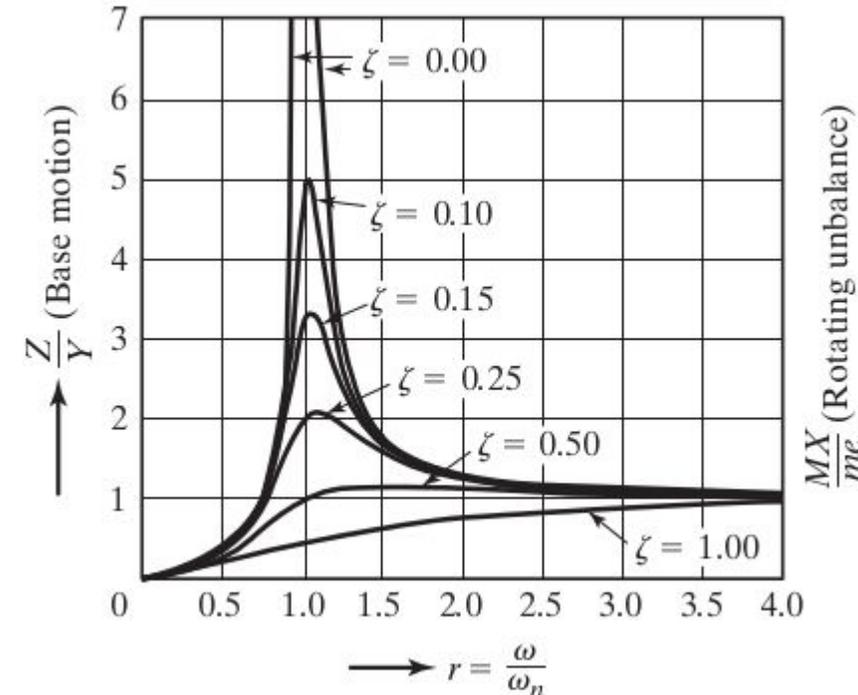
PUBLICA
100%
GRATUITA

Resposta de um sistema amortecido ao Desbalanceamento Rotativo

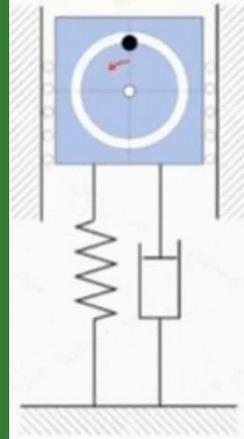


4) Para $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{MX}{me}$ não atinge o máximo. Seu

valor cresce de 0 em $r = 0$ para 1 em $r \rightarrow \infty$.

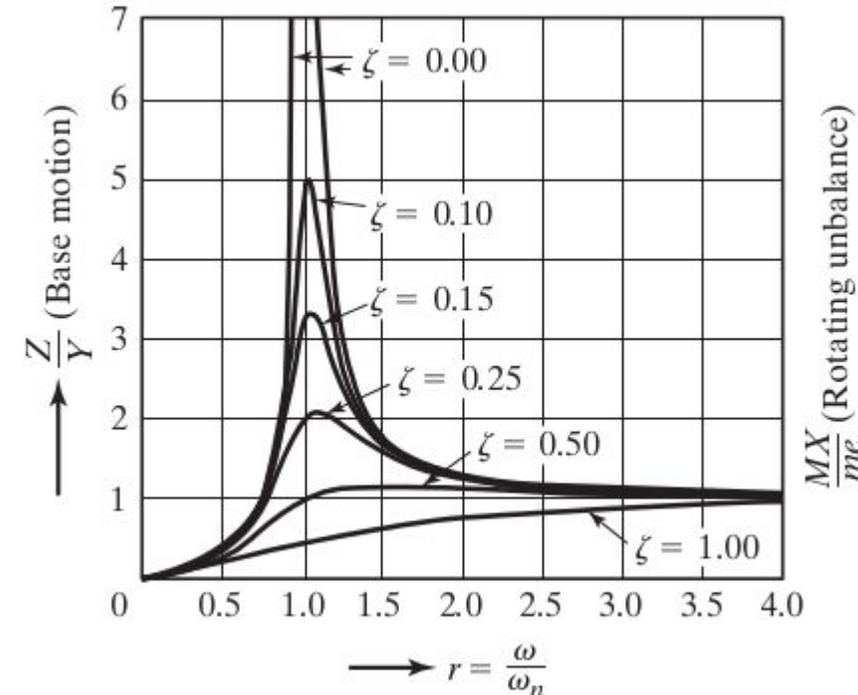


Resposta de um sistema amortecido ao Desbalanceamento Rotativo

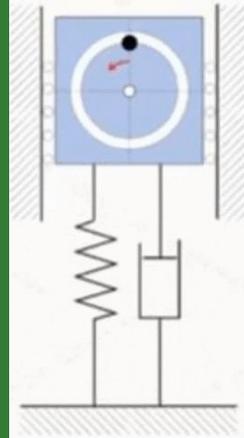


5) A força transmitida à fundação devido à força rotativa desequilibrada (F) pode ser encontrada como:

$$|F| = me \omega^2 \sqrt{\frac{1 + 4 \zeta^2 r^2}{(1 - r^2)^2 + 4 \zeta^2 r^2}}$$



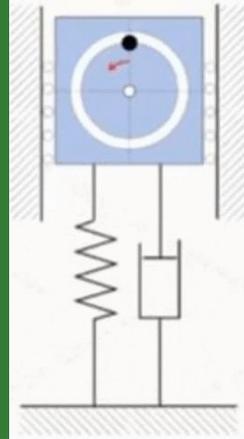
Resposta de um sistema amortecido ao Desbalanceamento Rotativo - Exemplo



Um motor elétrico de massa M , montado sobre uma fundação elástica, vibra com amplitude de $0,15$ m na ressonância. Sabe-se que a massa desbalanceada do motor é de 8% da massa do rotor devido às tolerâncias de fabricação utilizadas, e a relação de amortecimento da fundação é $\zeta = 0,025$. Determine o seguinte:

- a) a excentricidade ou localização radial da massa desequilibrada (e);
- b) a máxima amplitude de vibração;
- c) a massa adicional a ser adicionada uniformemente ao motor para reduzir a amplitude em ressonância para $0,1$ m.

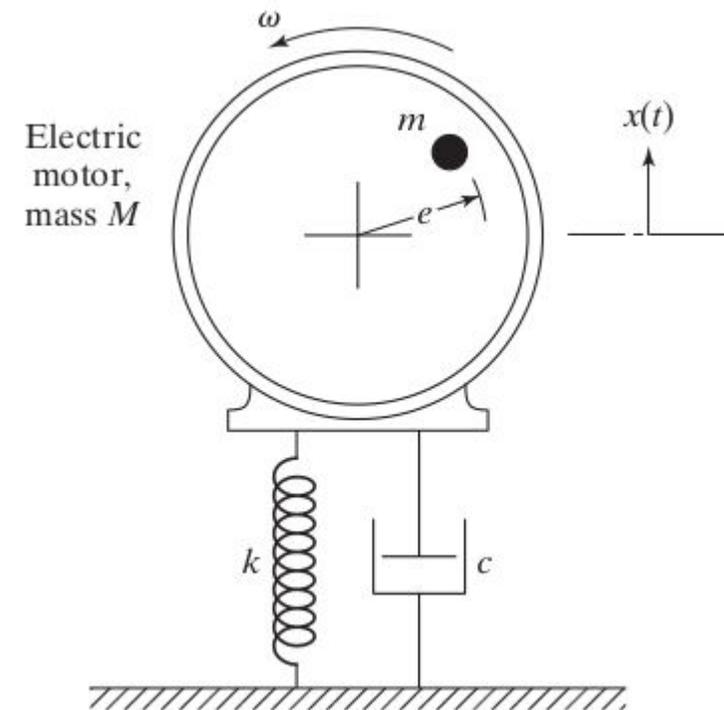
Resposta de um sistema amortecido ao Desbalanceamento Rotativo - Exemplo



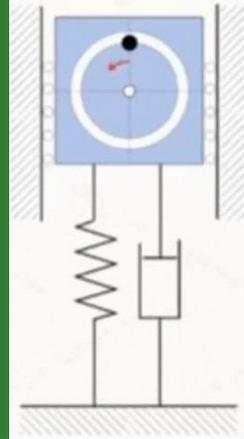
a) a excentricidade ou localização radial da massa desequilibrada (e);

$$r=1 \quad \frac{MX}{me} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad \frac{MX}{me} = \frac{1}{2\xi}$$

$$\frac{M*0,15}{e*(0,08*M)} = \frac{1}{2*0,025} \quad e = 0,09375 m$$



Resposta de um sistema amortecido ao Desbalanceamento Rotativo - Exemplo



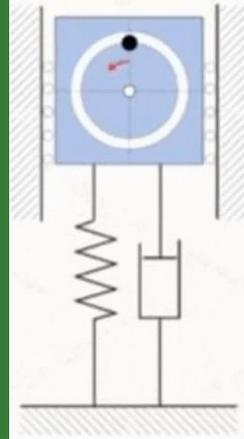
b) a máxima amplitude de vibração em ressonância;

$$\left(\frac{MX}{me}\right)_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\left(\frac{MX}{me}\right)_{max} = \frac{1}{2*0,025\sqrt{1-(0,025)^2}} = 20,0063 \quad X_{max} = \frac{20,0063 me}{M}$$

$$X_{max} = \frac{20,0063 * M * 0,08 * 0,09375}{M} = 0,150047 m$$

Resposta de um sistema amortecido ao Desbalanceamento Rotativo - Exemplo



c) a massa adicional a ser adicionada uniformemente ao motor para reduzir a amplitude em ressonância para 0,1 m.

$$\frac{MX}{me} = \frac{1}{2\xi} \quad \frac{MX}{me} = \frac{1}{2*0,025} = 20$$

$$M_a = 0,5 M$$

$$M_{new} = M + M_a$$

$$\frac{(M + M_a)(0,1)}{(0,08 M)(0,09375)} = 20$$

Para reduzir a amplitude de vibração para 0,1m na ressonância é necessário adicionar uma massa de 50% do valor da massa original.

REFERÊNCIAS

RAO, Singiresu. Vibrações mecânicas. 4.ed. São Paulo, SP: Pearson, c2009. 424 p.
ISBN 9788576052005.

MUITO
OBRIGADO

Alexander Furtado Carneiro

Professor de Eletrotécnica

www.ifsul.edu.br
E-mail de contato
TELEFONE DE CONTATO