

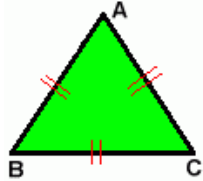
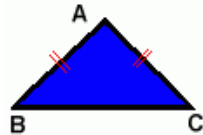
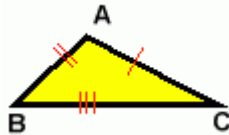
ESTUDO DOS TRIÂNGULOS – Uma Breve Revisão

• Triângulos – Definição:

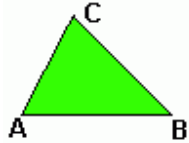
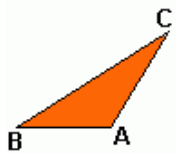
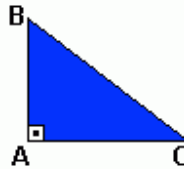
São polígonos com três lados.

Os triângulos podem ser classificados quanto aos seus **lados** ou quanto aos seus **ângulos**. Observe os quadros a seguir:

Classificação dos triângulos quanto ao tamanho dos LADOS

Triângulo Equilátero	Os três lados têm medidas iguais (e três ângulos iguais de 60°). $d(A,B) = d(B,C) = d(C,A)$	
Triângulo Isósceles	Dois lados têm a mesma medida (e dois ângulos iguais ou congruentes). $d(A,B) = d(A,C) \neq d(B,C)$	
Triângulo Escaleno	Todos os três lados têm medidas diferentes (e três ângulos diferentes). $d(A,B) \neq d(B,C) \neq d(C,A)$	

Classificação dos triângulos quanto às medidas dos ÂNGULOS INTERNOS

Triângulo Acutângulo	Todos os ângulos internos são agudos, isto é, as medidas dos ângulos são menores do que 90° .	
Triângulo Obtusângulo	Um ângulo interno é obtuso (\hat{A}), isto é, possui um ângulo com medida maior do que 90° .	
Triângulo Retângulo	Possui um ângulo interno reto (\hat{A}), isto é, com 90° .	

Ângulos internos de um triângulo:

Lembre-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180° . Os ângulos internos podem ser:

→ **Ângulo Reto:** ângulo de 90°

→ **Ângulo Agudo:** ângulo menor que 90° (e maior que 0°) → $0 < \alpha < 90^\circ$

→ **Ângulo Obtuso:** ângulo maior que 90° (e menor que 180°) → $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

• Triângulo Retângulo

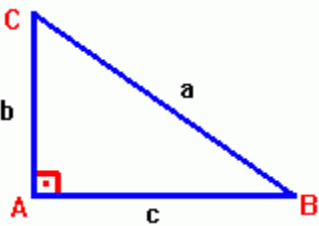
Como visto anteriormente, um triângulo retângulo possui um ângulo interno reto. Devido a sua aplicabilidade, faremos o seu estudo em particular.

Lados de um Triângulo Retângulo:

Nomenclatura: Os lados de um triângulo retângulo recebem nomes especiais. Estes nomes são dados de acordo com a posição em relação ao ângulo reto. O lado oposto ao ângulo reto é a **hipotenusa**. Os lados que formam o ângulo reto (adjacentes a ele) são os **catetos**.

Termo	Origem da palavra
Cateto	Cathetós: (perpendicular)
Hipotenusa	Hypoteinusa: Hypó (por baixo) + teino (eu estendo)

Para padronizar o estudo da Trigonometria, adotam-se as seguintes notações:

Letra	Lado	Triângulo	Vértice / Ângulo	Medida
a	Hipotenusa		A → Ângulo reto	A = 90°
b	Cateto		B → Ângulo agudo	B < 90°
c	Cateto		C → Ângulo agudo	C < 90°

Teorema de Pitágoras:

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Então, podemos escrever: **(hip)² = (cat)² + (cat)²**

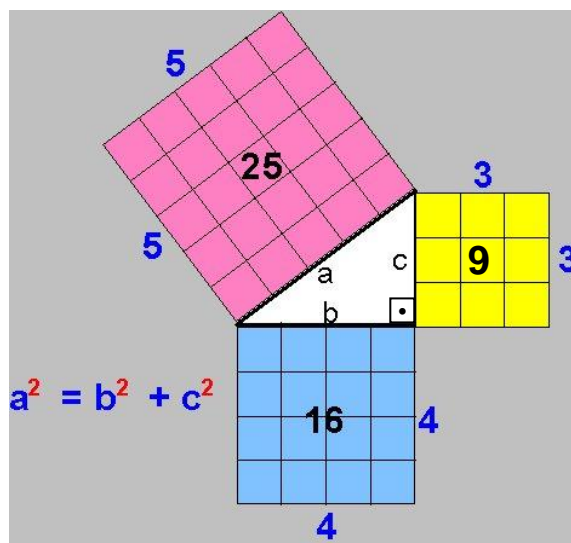
Ou ainda, utilizando a simbologia do quadro acima:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ao lado, uma ilustração do teorema em questão:

Observando os **quadrados** sobre os lados do triângulo retângulo, poderíamos enunciar o teorema assim:

“O **quadrado** da hipotenusa é igual
à soma dos **quadrados** dos catetos”

**Observação:**

Dado um triângulo qualquer, podemos identificá-lo, quanto aos ângulos, sem mesmo conhecê-los. Para isto, devemos conhecer as medidas dos seus lados e então aplicarmos o teorema de Pitágoras. Assim:

Se $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$ teremos um triângulo retângulo [$\hat{A} = 90^\circ$]

Se $a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow$ teremos um triângulo acutângulo [$\hat{A} < 90^\circ$]

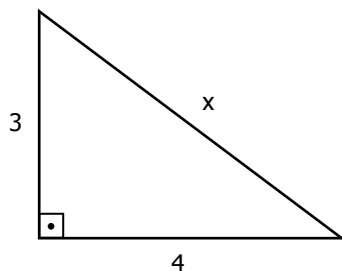
Se $a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow$ teremos um triângulo obtusângulo [$\hat{A} > 90^\circ$]

Importante:

Vale lembrar que “a” é a medida da hipotenusa e sempre será o maior lado de um triângulo retângulo. Porém, para os dois últimos casos (Acutângulo e Obtusângulo) essa nomenclatura não é válida, todavia o valor de “a” está associado ao maior lado destes triângulos.

Exemplos:

1) No triângulo retângulo abaixo, determine o valor de "x":

**Resolução:**

O triângulo em questão é retângulo de hipotenusa "x". Logo, podemos aplicar o teorema de Pitágoras. Então:

$$(\text{hip})^2 = (\text{cat})^2 + (\text{cat})^2$$

$$x^2 = 3^2 + 4^2$$

$$x^2 = 9 + 16 = 25$$

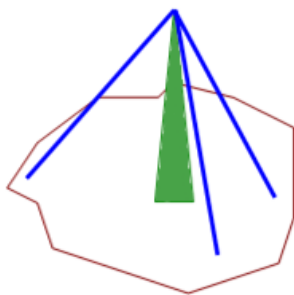
$$x = \sqrt{25} \quad \therefore \quad x = 5 \text{ uc}$$

Observação 1: uc → unidades de comprimento.

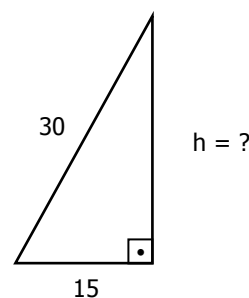
Observação 2: O triângulo em questão é conhecido como um dos "Triângulos Pitagóricos", pois as medidas dos seus lados correspondem a números inteiros.

2) Do topo de uma torre, três cabos de aço estão ligados ao solo por meio de ganchos, dando sustentabilidade à torre. Sabendo que o comprimento de cada cabo é de 30 metros e que a distância dos ganchos até o centro da base da torre é de 15 metros, determine a altura desta torre.

Representação Esquemática do Problema:



Representação Matemática do Problema:

**Resolução:**

O triângulo do problema é um triângulo retângulo de hipotenusa "30". Assim sendo, podemos aplicar o teorema de Pitágoras. Então:

$$(\text{hip})^2 = (\text{cat})^2 + (\text{cat})^2$$

$$30^2 = 15^2 + h^2$$

$$900 = 225 + h^2$$

$$h^2 = 900 - 225$$

$$h = \sqrt{675} \quad \therefore \quad h \approx 25,98 \text{ m}$$

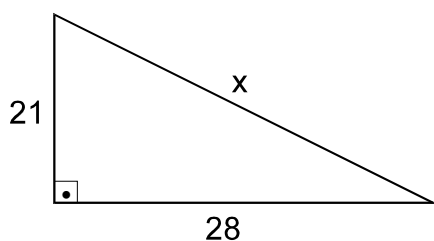
Solução:

A altura da torre é de, aproximadamente, **26 metros**.

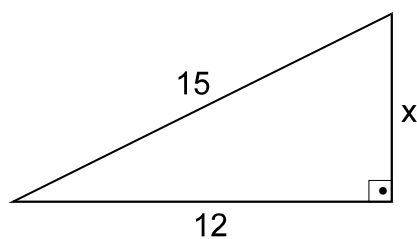
EXERCÍCIOS – Teorema de Pitágoras

1) Aplicando o Teorema de Pitágoras, calcule os valores de "x" para cada caso:

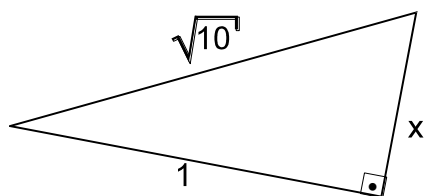
a)



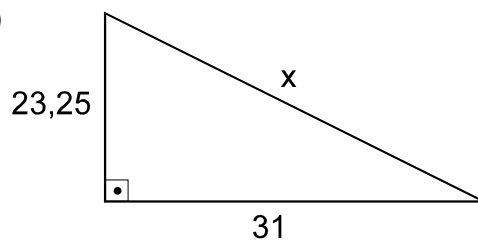
b)



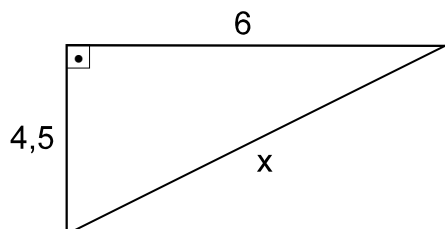
c)



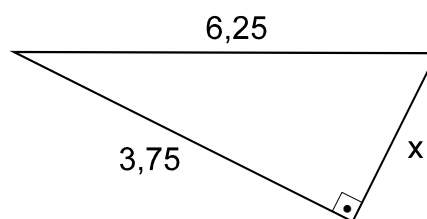
d)



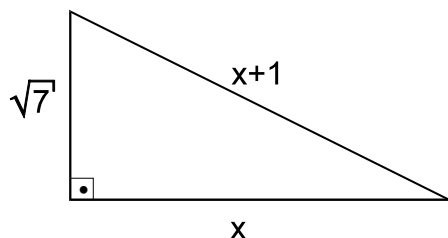
e)



f)

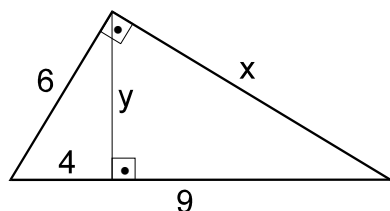


g)

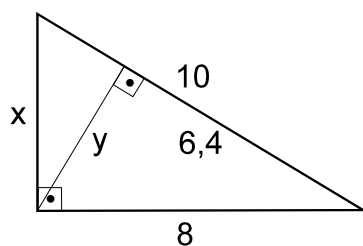


2) Usando o teorema de Pitágoras, calcule os valores de "x" e "y" nas figuras:

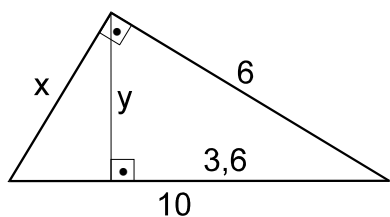
a)



b)



c)

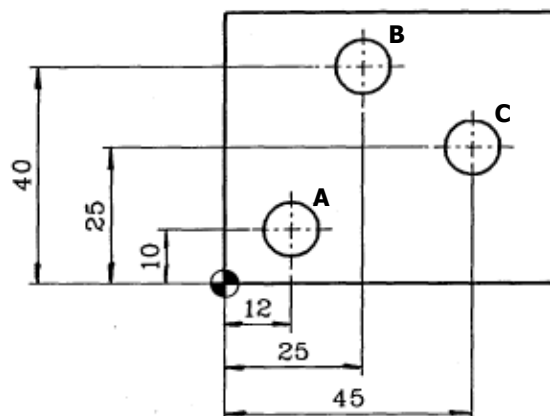


→ Desenho fora de proporção!

3) Uma escada de 25 dm de comprimento se apóia num muro vertical do qual seu pé dista 7 dm. Se o pé da escada se afasta mais 8 dm do muro, determine o deslocamento verificado pela extremidade superior da escada.

4) Considerando a peça plana a seguir, determine a distância entre os furos:

- a) A e B
b) B e C



Observação: medidas em mm

RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS

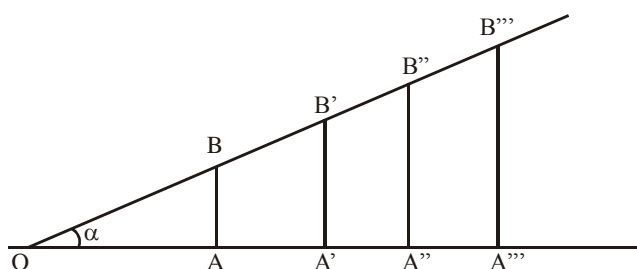
- 1a) 35 1b) 9 1c) 3 1d) 38,75 1e) 7,5 1f) 5 1g) 3 2a) $x = 3\sqrt{5}$, $y = 2\sqrt{5}$
2b) $x = 6$, $y = 4,8$ 2c) $x = 8$, $y = 4,8$ 3) 4 dm 4a) 32,70 mm 4b) 25 mm

Para refletir: Há quem passe pelo bosque e só veja lenha para fogueira. [Tolstoi]

Relações Trigonômétricas num Triângulo Retângulo

O Seno, o Cosseno e a Tangente de um ângulo Agudo:

Seja um ângulo agudo de medida α . Considere todos os infinitos triângulos retângulos com esse ângulo agudo α . Observe na figura abaixo alguns deles:



É possível perceber que os triângulos OAB , $OA'B'$, $OA''B''$ e $OA'''B'''$ são semelhantes. Daí segue que a razão entre dois lados quaisquer de um destes triângulos, necessariamente será igual à mesma razão nos outros triângulos.

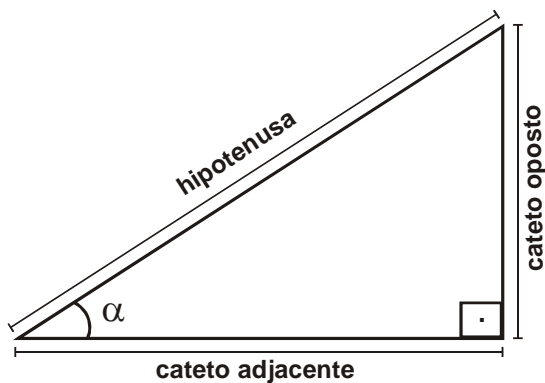
Veja as relações apresentadas ao lado:

$$\frac{AB}{OB} = \frac{A'B'}{OB'} = \frac{A''B''}{OB''} = \frac{A'''B'''}{OB'''} = k_1$$

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{OA''}{OB''} = \frac{OA'''}{OB'''} = k_2$$

$$\frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'} = \frac{A''B''}{OA''} = \frac{A'''B'''}{OA'''} = k_3$$

É perceptível que as constantes k_1 , k_2 e k_3 dependem com exclusividade da medida do ângulo α , e não das dimensões do triângulo para sua obtenção. Então, escolhendo um deles ao acaso, tem-se:



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{CO}{H}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{CA}{H}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}} = \frac{CO}{CA}$$

**RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS
num Triângulo Retângulo**

Onde $\operatorname{sen} \alpha$, $\cos \alpha$ e $\operatorname{tg} \alpha$ [lê-se: seno de α , cosseno de α e tangente de α] são respectivamente as constantes k_1 , k_2 e k_3 conhecidas como razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Como os valores são constantes, podemos tê-los tabelados, conforme abaixo, ou mesmo numa calculadora científica:

	0°	30°	45°	60°	90°
Seno	0	$\frac{1}{2} \approx 0,500$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$	1
Cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$	$\frac{1}{2} \approx 0,500$	0
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577$	1	$\sqrt{3} \approx 1,732$	\nexists

Observações importantes:

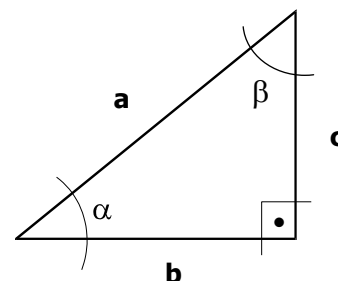
- Para nosso estudo de triângulos, a utilização das colunas de 0° e 90° será muito rara.
- Numa calculadora científica podemos obter o seno, o cosseno e a tangente de qualquer ângulo (com certas restrições). Veremos mais adiante como surgem tais valores.

Lei Angular de Tales:

“Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares”.

Assim: Se $\alpha + \beta = 90^\circ$, então: $\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$ e $\operatorname{sen} \beta = \cos \alpha$.

Do exposto acima, tem-se então o quadro a seguir:



ângulos	sen	cos	tan
α	$\operatorname{sen} \alpha = \frac{c}{a}$	$\cos \alpha = \frac{b}{a}$	$\tan \alpha = \frac{c}{b}$
β	$\operatorname{sen} \beta = \frac{b}{a}$	$\cos \beta = \frac{c}{a}$	$\tan \beta = \frac{b}{c}$

De maneira geral podemos escrever:

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

“O seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do seu complementar e vice-versa”

Veja os exemplos:

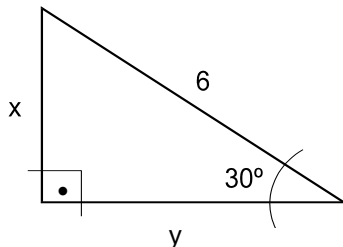
- $\operatorname{sen} 30^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) \rightarrow \operatorname{sen} 30^\circ = \cos 60^\circ$
- $\operatorname{sen} 40^\circ = \cos(90^\circ - 40^\circ) \rightarrow \operatorname{sen} 40^\circ = \cos 50^\circ$
- $\operatorname{sen} 14^\circ = \cos(90^\circ - 14^\circ) \rightarrow \operatorname{sen} 14^\circ = \cos 76^\circ$

Existem outras razões trigonométricas que são conhecidas como: **secante** [sec], **cosecante** [cosec], e **cotangente** [cotg], que nada mais são do que razões inversas, oriundas das mencionadas anteriormente e que têm grandes aplicações em áreas específicas do conhecimento.

Cada valor trigonométrico, que foi pré-estabelecido e tabelado, é facilmente “encontrado” nas calculadoras científicas disponíveis atualmente. Através do estudo do círculo trigonométrico, que faremos mais a seguir, entenderemos melhor tais valores.

Exemplos:

1) No triângulo retângulo da figura abaixo, determine as medidas indicadas.



Dados:

- $\left\{ \begin{array}{l} 6 \rightarrow \text{hipotenusa} \\ x \rightarrow \text{cateto oposto [CO] ao ângulo de } 30^\circ \\ y \rightarrow \text{cateto adjacente [CA] ao ângulo de } 30^\circ \end{array} \right.$

Resolução [Cálculo do valor de “x”]:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{CO}{H} \Rightarrow \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{x}{6}$$

Substituindo $\operatorname{sen} 30^\circ$ pelo seu valor (tabelado), temos:

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{6} \Rightarrow 2x = 6 \quad \therefore x = 3 \text{ uc}$$

Resolução [Cálculo do valor de “y”]:

$$\cos 30^\circ = \frac{CA}{H} \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{y}{6}$$

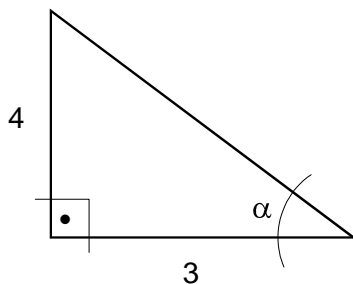
Substituindo $\cos 30^\circ$ pelo seu valor (tabelado), temos:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{6} \Rightarrow 2y = 6\sqrt{3} \quad \therefore y = 3\sqrt{3} \text{ uc}$$

Nota: Poderíamos calcular o valor de y de outras formas [**Experimente**]:

- Aplicando o teorema de **Pitágoras**, pois calculamos anteriormente o valor de x e assim temos dois lados conhecidos do triângulo retângulo [a hipotenusa e um dos catetos].
- Aplicando a relação **tg 30°**, pois calculamos anteriormente x [que é o cateto oposto ao ângulo de 30°] e assim restando apenas a incógnita y [cateto adjacente ao ângulo de 30°] na relação com a tangente.

2) No triângulo retângulo abaixo [desenho fora de proporção], determine a medida do ângulo α :



Resolução:

Primeiramente, deve-se escolher uma das relações trigonométricas [sen , \cos ou tg] para utilizar no cálculo do ângulo α . A escolha depende dos lados que “conhecemos” no triângulo. Como, no triângulo dado, temos apenas os **catetos** conhecidos, escolheremos a relação de **tangente**, pois ela envolve os dois catetos na sua relação. Assim:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CO}{CA} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{Para "isolar" o ângulo } \alpha, \text{ fazemos: } \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{4}{3} \right)$$

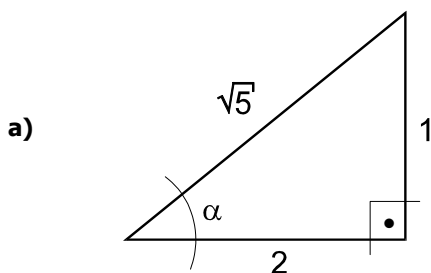
Escrevendo a expressão, utilizando um padrão americano de escrita [que encontramos na maioria das calculadoras], temos:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{4}{3} \right) \rightarrow \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{4}{3} \right) \therefore \alpha \cong 53,13^\circ \rightarrow [\text{valor obtido em calculadora científica}]$$

Nota: Calculando o ângulo α com as outras relações trigonométricas [*sen* ou *cos*], obviamente encontraremos o mesmo valor de $53,13^\circ$, entretanto, para a aplicação destas relações, devemos primeiramente calcular o valor da hipotenusa, que no exemplo anterior, pode-se verificar facilmente que é de 5 uc [aplicando o teorema de Pitágoras].

EXERCÍCIOS – Relações Trigonométricas num Triângulo Retângulo

1) Em cada caso, complete os valores solicitados:

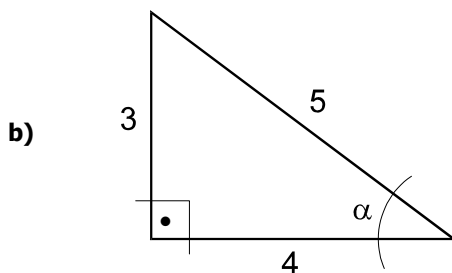


$$\operatorname{sen} \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

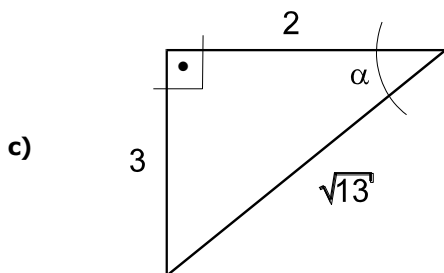


$$\operatorname{sen} \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$



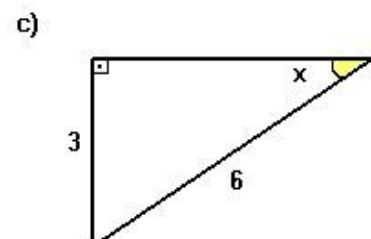
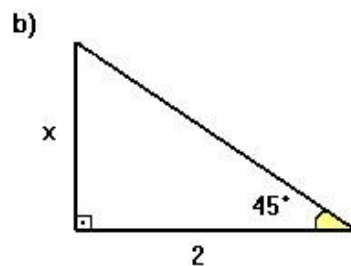
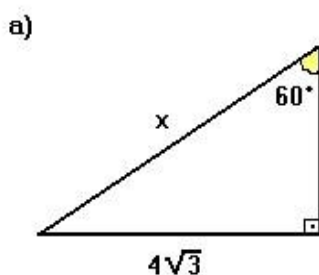
$$\operatorname{sen} \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

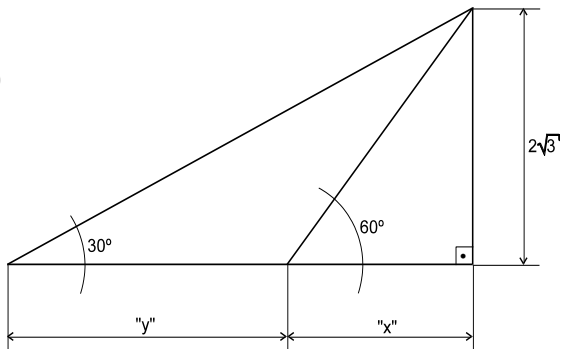
$$\operatorname{tg} \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

2) Encontre o valor de "x" em cada caso a seguir. As medidas estão em metros.

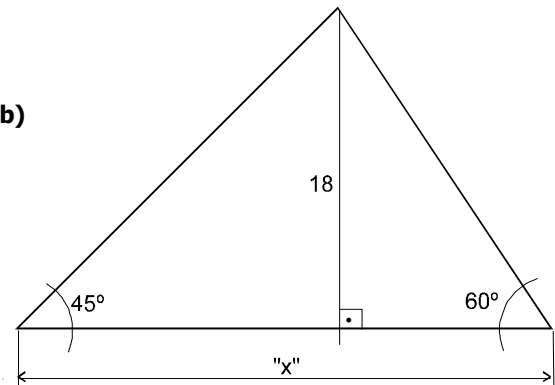


3) Nas figuras abaixo, determine os valores desconhecidos:

a)

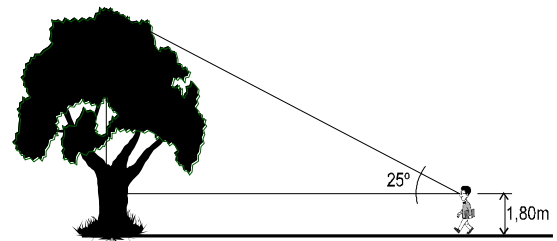


b)



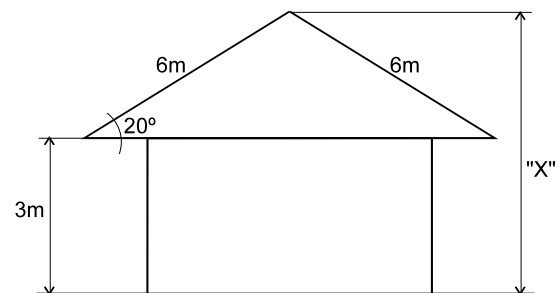
4) A distância de uma pessoa a uma árvore é de 45m. Essa pessoa tem 1,80m de altura e o ângulo de elevação segundo o qual ela vê o topo da árvore é de 25°. Determine a altura dessa árvore.

Dados: $\sin 25^\circ = 0,422$
 $\cos 25^\circ = 0,906$
 $\tan 25^\circ = 0,466$

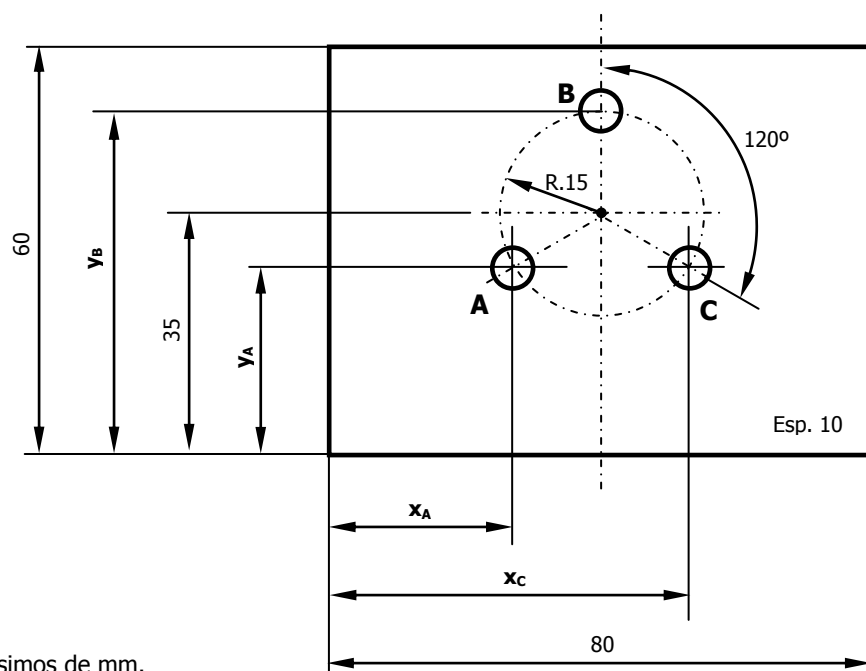


5) Na construção de um telhado foram usadas telhas francesas e o "caimento" do telhado é de 20° em relação ao plano horizontal. Sabendo que, em cada lado da casa, foram construídos 6m de telhado e que, até a laje do teto, a casa tem 3m de altura, determine a que altura se encontra o ponto mais alto do telhado dessa casa.

Dados: $\sin 20^\circ = 0,342$
 $\cos 20^\circ = 0,939$
 $\tan 20^\circ = 0,363$



6) Na peça plana abaixo, encontre o valor das medidas faltantes e também a distância entre os (centros dos) furos A e B:



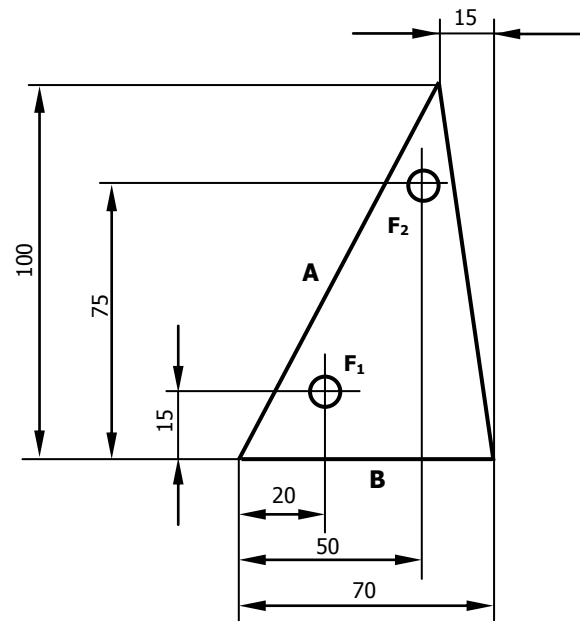
Observações:

- Medidas em mm.
- Precisão das medidas em centésimos de mm.

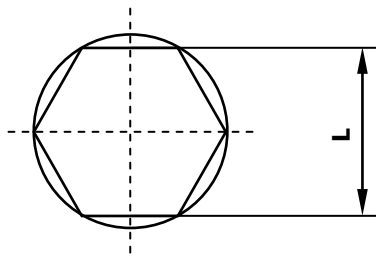
7) Considerando a peça plana triangular apresentada abaixo, determine:

- a) a distância entre os furos F_1 e F_2 ;
- b) o perímetro da peça;
- c) o ângulo interno formado entre os lados A e B.

Obs.: medidas em mm.

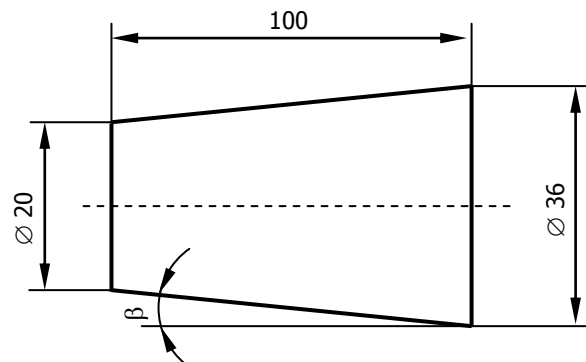


8) Determine a medida "L" sabendo que o raio da circunferência é 29,5 mm.



9) Determine o valor do ângulo no tronco de cone:

Observação: desenho fora de proporção.



10) Prove que, num triângulo retângulo que tem um dos ângulos agudos igual a 30° , a hipotenusa sempre tem o dobro da medida de um dos catetos.

RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS

1a) $\sin \alpha = 0,45$ / $\cos \alpha = 0,89$ / $\operatorname{tg} \alpha = 0,50$ / $\alpha = 26,57^\circ$

1b) $\sin \alpha = 0,60$ / $\cos \alpha = 0,80$ / $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$ / $\alpha = 36,87^\circ$

1c) $\sin \alpha = 0,83$ / $\cos \alpha = 0,55$ / $\operatorname{tg} \alpha = 1,50$ / $\alpha = 56,31^\circ$

2a) $x = 8$ m

2b) $x = 2$ m

2c) $x = 30^\circ$

3a) $x = 2$ uc e $y = 4$ uc

3b) $x = 28,39$ uc

4) 22,77 m

5) $x = 5,05$ m

6) $x_A = 27,01$ mm / $x_C = 52,99$ mm / $y_A = 27,5$ mm / $y_B = 50$ mm / $d(A,B) = 25,98$ mm

7a) 67,08 mm

7b) aprox. 285,25 mm

7c) $61,19^\circ$

8) $L = 51,10$ mm

9) $\beta = 4,57^\circ$

Para refletir:

Existe um paralelismo fiel entre o progresso social e a atividade matemática; os países socialmente atrasados são aqueles em que a atividade matemática é nula ou quase nula. [Jacques Chapellon]