

Inequações

Objetivos de aprendizagem

- Inequações lineares com uma variável.
- Solução de inequações com valor absoluto.
- Solução de inequações quadráticas.
- Aproximação de soluções para inequações.

Esses tópicos suprem alguns fundamentos das técnicas de álgebra e mostram a utilidade das representações gráficas para resolver inequações.

Inequações lineares com uma variável

Inequações são todas as sentenças matemáticas expressas por uma desigualdade. As inequações, assim como as equações, podem ter uma ou mais incógnitas.

Os sinais que representam uma desigualdade são: $>$ (maior), $<$ (menor), \geq (maior ou igual), \leq (menor ou igual) e \neq (diferente).

Usamos essas desigualdades para descrever, por exemplo, a ordem dos números sobre a reta dos números reais.

DEFINIÇÃO Inequação linear em x

Uma **inequação linear em x** pode ser escrita nas seguintes formas:

$$ax + b < 0, ax + b \leq 0, ax + b > 0 \text{ ou } ax + b \geq 0,$$

onde a e b são números reais com $a \neq 0$.

Achar as soluções de uma inequação em x significa encontrar todos os valores de x para os quais a inequação é verdadeira. O conjunto de todas as soluções de uma inequação é o que chamamos de **conjunto solução**. Observe a seguir a lista de propriedades que usamos para **resolver inequações**.

Propriedades das inequações

Sejam u , v , w e z números reais, variáveis ou expressões algébricas, e c um número real.

- 1. Transitiva** Se $u < v$ e $v < w$, então $u < w$.
- 2. Adição** Se $u < v$, então $u + w < v + w$.
Se $u < v$ e $w < z$, então $u + w < v + z$.
- 3. Multiplicação** Se $u < v$ e $c > 0$, então $uc < vc$.
Se $u < v$ e $c < 0$, então $uc > vc$.

Isso quer dizer que a multiplicação (ou divisão) de uma inequação por um número positivo preserva a desigualdade. Já a multiplicação (ou divisão) de uma inequação por um número negativo inverte a desigualdade.

As propriedades acima também são verdadeiras se o símbolo $<$ é substituído por \leq . Existem propriedades similares para $>$ e \geq .

O conjunto das soluções de uma inequação linear com uma variável forma um intervalo de números reais. Da mesma forma que resolvemos as equações lineares, podemos resolver uma inequação; basta transformá-la em uma *inequação equivalente*. Duas ou mais inequações são **equivalentes** quando elas têm o mesmo conjunto solução.

As propriedades das inequações citadas no quadro descrevem operações que transformam uma inequação em outra equivalente.

EXEMPLO 1 Resolução de uma inequação linear

Resolva $3(x - 1) + 2 \leq 5x + 6$.

SOLUÇÃO

$$3(x - 1) + 2 \leq 5x + 6$$

$$3x - 3 + 2 \leq 5x + 6$$

Propriedade distributiva

$$3x - 1 \leq 5x + 6$$

Simplificação

$$3x \leq 5x + 7$$

Adição de 1

$$-2x \leq 7$$

Subtração de $5x$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2x) \geq \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 7$$

Multiplicação por $-\frac{1}{2}$ (desigualdade inverte)

$$x \geq -3,5$$

Nesse caso, o conjunto solução da desigualdade é o conjunto de todos os números reais maiores ou iguais a $-3,5$. Em notação de intervalo, o conjunto solução é $[-3,5, +\infty[$.

Podemos apresentar o conjunto solução por meio da representação gráfica da reta real, pelo fato de ele ser um intervalo de números reais, como mostrado no Exemplo 2.

EXEMPLO 2 Resolução de uma inequação linear e representação gráfica do conjunto solução

Resolva a inequação e represente graficamente seu conjunto solução.

$$\frac{x}{3} + \frac{1}{2} > \frac{x}{4} + \frac{1}{3}$$

SOLUÇÃO

O mínimo múltiplo comum dos denominadores das frações é 12.

$$\frac{x}{3} + \frac{1}{2} > \frac{x}{4} + \frac{1}{3}$$

$$12 \cdot \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right) > 12 \cdot \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{3}\right)$$

Multiplicando pelo mínimo múltiplo comum 12

$$4x + 6 > 3x + 4$$

Simplificando

$$x + 6 > 4$$

Subtraindo por $3x$

$$x > -2$$

Subtraindo por 6

O conjunto solução é o intervalo $]-2, +\infty[$. Sua representação gráfica é:

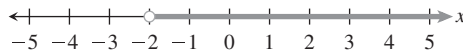


Figura 6.1 Gráfico do conjunto solução da inequação do Exemplo 2.

Às vezes, duas inequações são combinadas em uma **inequação dupla**, que são inequações com duas desigualdades simultâneas. Para resolver esse tipo de inequação, basta isolar x como termo central. O conjunto solução é a desigualdade dupla que obtemos. O Exemplo 3 ilustra isso.

EXEMPLO 3 Resolução de uma inequação dupla

Resolva a inequação e represente graficamente seu conjunto solução.

$$-3 < \frac{2x + 5}{3} \leq 5$$

SOLUÇÃO

$$-3 < \frac{2x + 5}{3} \leq 5$$

$$-9 < 2x + 5 \leq 15 \quad \text{Multiplicação por 3}$$

$$-14 < 2x \leq 10 \quad \text{Subtração por 5}$$

$$-7 < x \leq 5 \quad \text{Divisão por 2}$$

O conjunto solução é o conjunto de todos os números reais maiores do que -7 e menores ou iguais a 5 . Em notação de intervalo, a solução é o conjunto $]-7, 5]$. Sua representação gráfica é mostrada a seguir.

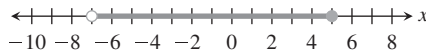


Figura 6.2 Gráfico do conjunto solução da inequação dupla do Exemplo 3.

Solução de inequações com valor absoluto

O **valor absoluto** de um número indica a distância desse número à origem da reta real. Uma inequação que contém o valor absoluto de uma variável é chamada **inequação com valor absoluto**. Observem duas regras básicas que aplicamos para resolver inequações com valor absoluto.

Solução de inequações com valor absoluto

Seja u uma expressão algébrica em x e a um número real com $a \geq 0$.

1. Se $|u| < a$, então u está no intervalo $] -a, a[$, isto é,

$$|u| < a \text{ se, e somente se, } -a < u < a.$$

2. Se $|u| > a$, então u está no intervalo $] -\infty, -a[$ ou $] a, +\infty[$, isto é,

$$|u| > a \text{ se, e somente se, } u < -a \text{ ou } u > a.$$

As desigualdades $<$ e $>$ podem ser substituídas por \leq e \geq , respectivamente. Veja a Figura 6.3.

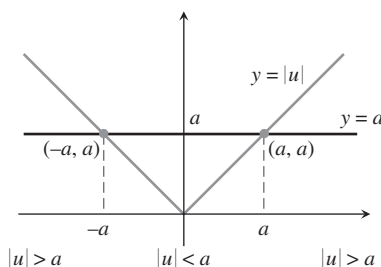


Figura 6.3 Gráficos de $y = a$ e $y = |u|$.

A solução de $|u| < a$ está representada pela parte do eixo horizontal correspondente à região onde os valores de x do gráfico de $y = |u|$ estão abaixo do gráfico de $y = a$. Na Figura 6.3, essa solução está no intervalo $] -a, a[$.

A solução de $|u| > a$ está representada pela parte do eixo horizontal correspondente à região onde os valores de x dos pontos do gráfico de $y = |u|$ estão acima do gráfico de $y = a$. Na mesma figura, essa solução está no intervalo $] -\infty, -a[$ ou $] a, +\infty[$.

EXEMPLO 4 Resolução de uma inequação com valor absoluto

Resolva $|x - 4| < 8$.

SOLUÇÃO

$$|x - 4| < 8$$

$$-8 < x - 4 < 8$$

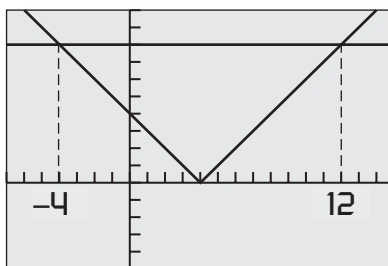
Inequação dupla equivalente

$$-4 < x < 12$$

Adição de 4

A solução é dada pelo intervalo $] -4, 12[$.

Na Figura 6.4, concluímos que os pontos sobre o gráfico de $y = |x - 4|$ que estão abaixo do gráfico de $y = 8$ são aqueles em que os valores de x estão entre -4 e 12 .



$[-7, 15]$ por $[-5, 10]$

Figura 6.4 Gráficos de $y = |x - 4|$ e $y = 8$.

EXEMPLO 5 Resolução de outra inequação com valor absoluto

Resolva $|3x - 2| \geq 5$.

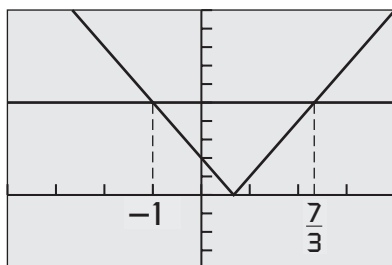
SOLUÇÃO

A resolução dessa inequação com valor absoluto consiste nas soluções das duas desigualdades.

$$\begin{array}{llll}
 3x - 2 \leq -5 & \text{ou} & 3x - 2 \geq 5 & \\
 3x \leq -3 & \text{ou} & 3x \geq 7 & \text{Adição de 2} \\
 x \leq -1 & \text{ou} & x \geq \frac{7}{3} & \text{Divisão por 3}
 \end{array}$$

A solução dessa inequação é dada pela união, representada por “ \cup ”, dos dois intervalos encontrados: $]-\infty, -1]$ e $[\frac{7}{3}, +\infty[$, a qual pode ser escrita como $]-\infty, -1] \cup [\frac{7}{3}, +\infty[$.

A Figura 6.5 mostra que os pontos do gráfico de $y = |3x - 2|$ que estão acima ou sobre os pontos do gráfico de $y = 5$ são tais que os valores de x são menores ou iguais a -1 , como também são maiores ou iguais a $\frac{7}{3}$.



$[-4, 4]$ por $[-4, 10]$

Uma observação: a união de dois conjuntos A e B , denotada por $A \cup B$, é o conjunto de todos os elementos que pertencem a A , a B ou a ambos.

Figura 6.5 Gráficos de $y = |3x - 2|$ e $y = 5$.

Solução de inequações quadráticas

As inequações quadráticas são as do tipo:

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0, \quad ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{ou} \quad ax^2 + bx + c \geq 0,$$

onde a , b e c são números reais com $a \neq 0$

Para resolver uma inequação quadrática, tal como $x^2 - x - 12 > 0$, substituímos a desigualdade pelo sinal de igual e resolvemos a equação quadrática $x^2 - x - 12 = 0$.

Então, determinamos os valores de x para os quais o gráfico de $y = x^2 - x - 12$ está acima do eixo horizontal x (pelo fato de a desigualdade ser “maior do que zero”). Vejamos a seguir:

EXEMPLO 6 Resolução de uma inequação quadrática

Resolva $x^2 - x - 12 > 0$.

SOLUÇÃO

Em primeiro lugar, resolvemos a equação correspondente $x^2 - x - 12 = 0$.

$$x^2 - x - 12 = 0$$

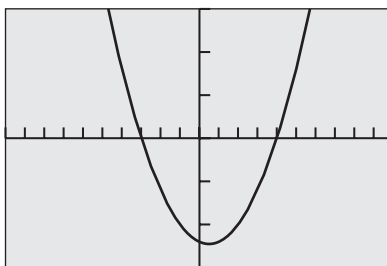
$$(x - 4)(x + 3) = 0$$

$$x - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 3 = 0$$

$$x = 4 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

As soluções obtidas da equação do segundo grau são -3 e 4 , porém, essas não são as soluções da inequação original, porque, ao substituímos esses resultados na inequação, chegamos à conclusão $0 > 0$, o que é falso.

A Figura 6.6 mostra que os pontos do gráfico de $y = x^2 - x - 12$ que estão acima do eixo horizontal x são os valores de x que estão à esquerda de -3 ou à direita de 4 . A solução da inequação original é $]-\infty, -3[\cup]4, +\infty[$.



$[-10, 10]$ por $[-15, 15]$

Figura 6.6 Gráfico de $y = x^2 - x - 12$ que cruza o eixo x em $x = -3$ e $x = 4$.

No Exemplo 7, a inequação quadrática envolve o símbolo \leq . Nesse caso, as soluções da correspondente equação quadrática são também soluções da inequação.

EXEMPLO 7 Resolução de uma inequação quadrática

Resolva $2x^2 + 3x \leq 20$.

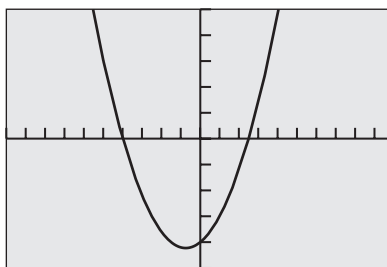
SOLUÇÃO

Em primeiro lugar, subtraímos 20 dos dois lados da inequação para obter $2x^2 + 3x - 20 \leq 0$. Depois, resolvemos a correspondente equação quadrática $2x^2 + 3x - 20 = 0$.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x - 20 &= 0 \\ (x + 4)(2x - 5) &= 0 \\ x + 4 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 5 &= 0 \\ x = -4 \quad \text{ou} \quad x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

As soluções da correspondente equação quadrática são -4 e $\frac{5}{2} = 2,5$, que são também soluções da inequação.

A Figura 6.7 mostra que os pontos do gráfico de $y = 2x^2 + 3x - 20$ que estão abaixo do eixo horizontal x são os valores de x que estão entre -4 e $2,5$. Portanto, a solução da inequação original é dada pelo intervalo $[-4; 2,5]$. Usamos o intervalo fechado, pois -4 e $2,5$ também são soluções da inequação.



$[-10, 10]$ por $[-25, 25]$

Figura 6.7 Gráfico de $y = 2x^2 + 3x - 20$, cuja parte que está abaixo do eixo x são os pontos cujos respectivos valores de x obedecem à inequação dupla $-4 < x < 2,5$.

Pode ocorrer de o extremo de algum intervalo não ser um número inteiro. Caso isso aconteça, podemos deixar na forma fracionária ou aproximar o valor, utilizando decimal com duas casas após a vírgula.

EXEMPLO 8 Resolução somente gráfica de uma inequação quadrática

Resolva $x^2 - 4x + 1 \geq 0$ graficamente.

SOLUÇÃO

Podemos utilizar os gráficos de $y = x^2 - 4x + 1$, na Figura 6.8, para verificar que as soluções da equação $x^2 - 4x + 1 = 0$ são aproximadamente 0,27 e 3,73. Assim, a solução da inequação original é $]-\infty; 0,27] \cup [3,73; +\infty[$. Usamos os intervalos fechado à direita no primeiro caso e fechado à esquerda no segundo porque as soluções da equação quadrática são da inequação, embora tenhamos usado aproximação para seus valores.

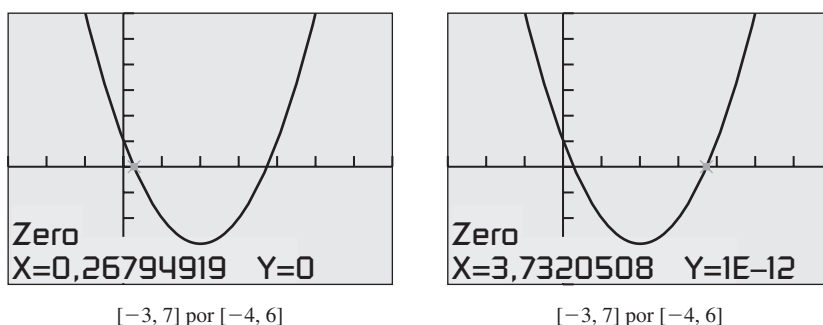


Figura 6.8 Esta figura sugere que $y = x^2 - 4x + 1$ é zero para $x \cong 0,27$ e $x \cong 3,73$.

EXEMPLO 9 Inequação quadrática sem solução

Resolva $x^2 + 2x + 2 < 0$.

SOLUÇÃO

A Figura 6.9 mostra que o gráfico de $y = x^2 + 2x + 2$ está acima do eixo horizontal x para todos os valores de x . Dessa forma, a inequação $x^2 + 2x + 2 < 0$ *não* tem solução, pois nenhum valor desse gráfico é menor do que zero. Portanto, ela é dada por um conjunto vazio.

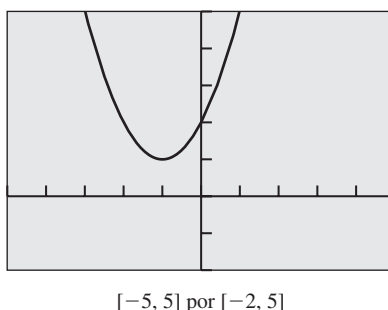


Figura 6.9 Os valores de $y = x^2 + 2x + 2$ não são negativos.

Se pensarmos agora na inequação $x^2 + 2x + 2 > 0$, vemos na Figura 6.9 que as soluções são todos os números reais. Além dos dois tipos de soluções apresentados nesse exemplo — que são inequações sem solução ou cuja solução são todos os números reais —, há inequações quadráticas com apenas uma solução.

Aproximação de soluções para inequações

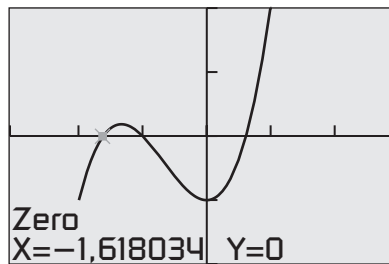
Para resolver uma inequação tal como no Exemplo 10, estimamos as raízes do correspondente gráfico. Então, determinamos os valores de x para os quais o gráfico está acima ou sobre o eixo horizontal x .

EXEMPLO 10 Resolução de uma inequação cúbica

Resolva $x^3 + 2x^2 - 1 \geq 0$ graficamente.

SOLUÇÃO

Podemos usar o gráfico de $y = x^3 + 2x^2 - 1$ como na Figura 6.10 para mostrar que as soluções da correspondente equação $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$ são aproximadamente $-1,62$, -1 e $0,62$. Os pontos do gráfico de $y = x^3 + 2x^2 - 1$, que estão sobre e acima do eixo horizontal x , são aqueles cujos valores x estão entre $-1,62$ e -1 (incluindo os extremos), e também à direita de $0,62$ (incluindo o extremo). A solução da inequação é $[-1,62; -1] \cup [0,62; +\infty[$. Vale observar que as soluções da equação também fazem parte das soluções da inequação, pois a desigualdade dessa inequação é maior ou igual.



$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

Figura 6.10 O gráfico de $y = x^3 + 2x^2 - 1$ apresenta os pontos que estão acima do eixo horizontal x com seus valores de x entre dois números negativos ou à direita de um número positivo.

REVISÃO RÁPIDA

Nos exercícios de 1 a 3, resolva as equações ou as inequações.

1. $-7 < 2x - 3 < 7$

2. $5x - 2 \geq 7x + 4$

3. $|x + 2| = 3$

Nos exercícios de 4 a 6, fatore a expressão completamente.

4. $4x^2 - 9$

5. $x^3 - 4x$

6. $9x^2 - 16y^2$

Nos exercícios 7 e 8, simplifique a fração com termos de menores expoentes.

7. $\frac{z^2 - 25}{z^2 - 5z}$

8. $\frac{x^2 + 2x - 35}{x^2 - 10x + 25}$

Nos exercícios 9 e 10, faça a soma das frações e simplifique-as.

9. $\frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{3x-4}$

10. $\frac{2x-1}{x^2-x-2} + \frac{x-3}{x^2-3x+2}$

EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 4, encontre quais valores de x são soluções da inequação.

1. $2x - 3 < 7$
(a) $x = 0$ (b) $x = 5$ (c) $x = 6$
2. $3x - 4 \geq 5$
(a) $x = 0$ (b) $x = 3$ (c) $x = 4$
3. $-1 < 4x - 1 \leq 11$
(a) $x = 0$ (b) $x = 2$ (c) $x = 3$
4. $-3 \leq 1 - 2x \leq 3$
(a) $x = -1$ (b) $x = 0$ (c) $x = 2$

Nos exercícios de 5 a 12, resolva a inequação e represente o conjunto solução graficamente na reta real.

5. $x - 4 < 2$ 6. $x + 3 > 5$
7. $2x - 1 \leq 4x + 3$ 8. $3x - 1 \geq 6x + 8$
9. $2 \leq x + 6 < 9$ 10. $-1 \leq 3x - 2 < 7$
11. $2(5 - 3x) + 3(2x - 1) \leq 2x + 1$
12. $4(1 - x) + 5(1 + x) > 3x - 1$

Nos exercícios de 13 a 24, resolva a inequação.

13. $\frac{5x + 7}{4} \leq -3$ 14. $\frac{3x - 2}{5} > -1$
15. $4 \geq \frac{2y - 5}{3} \geq -2$ 16. $1 > \frac{3y - 1}{4} > -1$
17. $0 \leq 2z + 5 < 8$ 18. $-6 < 5t - 1 < 0$
19. $\frac{x - 5}{4} + \frac{3 - 2x}{3} < -2$
20. $\frac{3 - x}{2} + \frac{5x - 2}{3} < -1$
21. $\frac{2y - 3}{2} + \frac{3y - 1}{5} < y - 1$
22. $\frac{3 - 4y}{6} - \frac{2y - 3}{8} \geq 2 - y$
23. $\frac{1}{2}(x - 4) - 2x \leq 5(3 - x)$
24. $\frac{1}{2}(x + 3) + 2(x - 4) < \frac{1}{3}(x - 3)$

25. **Verdadeiro ou falso?** Analise a desigualdade $-6 > -2$ e verifique se é verdadeira ou falsa. Justifique a sua resposta.

26. **Verdadeiro ou falso?** Analise a desigualdade $2 \leq \frac{6}{3}$ e verifique se é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.

Nos exercícios de 27 a 34, resolva as inequações algebricamente. Escreva a solução com a notação de intervalo e faça a representação gráfica na reta real.

27. $|x + 4| \geq 5$ 28. $|2x - 1| > 3,6$
29. $|x - 3| < 2$ 30. $|x + 3| \leq 5$
31. $|4 - 3x| - 2 < 4$ 32. $|3 - 2x| + 2 > 5$
33. $\left| \frac{x + 2}{3} \right| \geq 3$ 34. $\left| \frac{x - 5}{4} \right| \leq 6$

Nos exercícios de 35 a 42, resolva as inequações. Inicie resolvendo as correspondentes equações.

35. $2x^2 + 17x + 21 \leq 0$ 36. $6x^2 - 13x + 6 \geq 0$
37. $2x^2 + 7x > 15$ 38. $4x^2 + 2 < 9x$
39. $2 - 5x - 3x^2 < 0$ 40. $21 + 4x - x^2 > 0$
41. $x^3 - x \geq 0$ 42. $x^3 - x^2 - 30x \leq 0$

Nos exercícios de 43 a 52, resolva as inequações graficamente.

43. $x^2 - 4x < 1$ 44. $12x^2 - 25x + 12 \geq 0$
45. $6x^2 - 5x - 4 > 0$ 46. $4x^2 - 1 \leq 0$
47. $9x^2 + 12x - 1 \geq 0$ 48. $4x^2 - 12x + 7 < 0$
49. $4x^2 + 1 > 4x$ 50. $x^2 + 9 \leq 6x$
51. $x^2 - 8x + 16 < 0$ 52. $9x^2 - 12x + 4 \geq 0$

Nos exercícios de 53 a 56, resolva as inequações cúbicas graficamente.

53. $3x^3 - 12x + 2 \geq 0$ 54. $8x - 2x^3 - 1 < 0$
55. $2x^3 + 2x > 5$ 56. $4 \leq 2x^3 + 8x$

57. Dê um exemplo de uma inequação quadrática com a solução indicada para cada caso.

- (a) Todos os números reais.
- (b) Nenhuma solução.
- (c) Exatamente uma solução.
- (d) $[-2, 5]$
- (e) $]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$
- (f) $]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$

58. Uma pessoa quer dirigir 105 km em não mais do que duas horas. Qual é a menor velocidade média que ela deve manter enquanto dirige?

59. Considere a coleção de todos os retângulos com um comprimento 2 cm menor do que duas vezes sua largura.

- (a) Encontre as possíveis larguras (em centímetros) desses retângulos, se seus perímetros são menores do que 200 cm.
- (b) Encontre as possíveis larguras (em centímetros) desses retângulos, se suas áreas são menores ou iguais a 1.200 centímetros quadrados.

60. Para certo gás, $P = \frac{400}{V}$, onde P é pressão e V é volume. Se $20 \leq V \leq 40$, qual a correspondente variação para P ?

61. **Verdadeiro ou falso?** A inequação com valor absoluto $|x - a| < b$, onde a e b são números reais, sempre tem ao menos uma solução. Justifique sua resposta.

62. **Verdadeiro ou falso?** Todo número real é a solução da inequação com valor absoluto $|x - a| \geq 0$, em que a é um número real. Justifique sua resposta.

63. **Múltipla escolha** Qual das seguintes alternativas é a solução da inequação $|x - 2| < 3$?

- (a) $x = -1$ ou $x = 5$
- (b) $[-1, 5]$
- (c) $] -1, 5[$
- (d) $] -\infty, -1[\cup] 5, +\infty[$
- (e) $] -1, 5[$

64. **Múltipla escolha** Qual das seguintes alternativas é a solução da inequação $x^2 - 2x + 2 \geq 0$?

- (a) $[0, 2]$ (b) $] -\infty, 0[\cup] 2, +\infty[$
- (c) $] -\infty, 0] \cup [2, \infty[$
- (d) Todos os números reais.
- (e) Não existe solução.

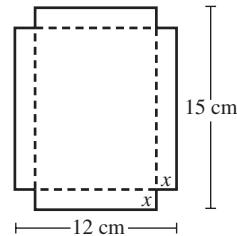
65. **Múltipla escolha** Qual das seguintes alternativas é a solução da inequação $x^2 > x$?

- (a) $] -\infty, 0[\cup] 1, +\infty[$
- (b) $] -\infty, 0] \cup [1, \infty[$
- (c) $] 1, \infty[$
- (d) $] 0, +\infty[$
- (e) Não existe solução.

66. **Múltipla escolha** Qual das seguintes alternativas é a solução da inequação $x^2 \leq 1$?

- (a) $] -\infty, 1]$ (b) $] -1, 1[$
- (c) $] 1, +\infty[$ (d) $] -1, 1]$

67. **Construindo uma caixa sem tampa** Uma caixa aberta é formada por um retângulo sem pequenos quadrados nos cantos, de modo que seja feita dobra nos pontilhados.



- (a) Qual o valor de x para que a caixa tenha um volume de 125 centímetros cúbicos?
- (b) Qual o valor de x para que a caixa tenha um volume maior do que 125 centímetros cúbicos?

Nos exercícios 68 e 69, use uma combinação de técnicas algébrica e gráfica para resolver as inequações.

68. $|2x^2 + 7x - 15| < 10$

69. $|2x^2 + 3x - 20| \geq 10$

2. $5x - 2 \geq 7x + 4$

$-2x \geq 6$

$x \leq -3$

3. $|x + 2| = 3$

$x + 2 = 3$ ou $x + 2 = -3$

$x = 1$ ou $x = -5$

4. $4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$

5. $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$

6. $9x^2 - 16y^2 = (3x - 4y)(3x + 4y)$

7. $\frac{z^2 - 25}{z^2 - 5z} = \frac{(z - 5)(z + 5)}{z(z - 5)} = \frac{z + 5}{z}$

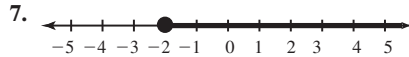
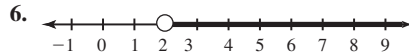
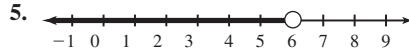
8. $\frac{x^2 + 2x - 35}{x^2 - 10x + 25} = \frac{(x + 7)(x - 5)}{(x - 5)(x - 5)} = \frac{x + 7}{x - 5}$

9. $\frac{x}{x - 1} + \frac{x + 1}{3x - 4}$
 $= \frac{x(3x - 4)}{(x - 1)(3x - 4)} + \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)(3x - 4)}$
 $= \frac{4x^2 - 4x - 1}{(x - 1)(3x - 4)}$

10. $\frac{2x - 1}{(x - 2)(x + 1)} + \frac{x - 3}{(x - 2)(x - 1)}$
 $= \frac{(2x - 1)(x - 1) + (x - 3)(x + 1)}{(x - 2)(x + 1)(x - 1)}$
 $= \frac{(2x^2 - 3x + 1) + (x^2 - 2x - 3)}{(x - 2)(x + 1)(x - 1)}$
 $= \frac{3x^2 - 5x - 2}{(x - 2)(x + 1)(x - 1)}$
 $= \frac{(3x + 1)(x - 2)}{(x - 2)(x + 1)(x - 1)}$
 $= \frac{(3x + 1)}{(x + 1)(x - 1)}, \text{ se } x \neq 2.$

Exercícios

1. (a): $2(0) - 3 = 0 - 3 = -3 < 7$. No entanto, substituindo $x = 5$ resulta 7 (não é menor que 7); substituindo $x = 6$ resulta 9.
 2. (b) e (c): $3(3) - 4 = 9 - 4 = 5 \geq 5$ e $3(4) - 4 = 12 - 4 = 8 \geq 5$
 3. (b) e (c): $4(2) - 1 = 8 - 1 = 7$ e $-1 < 7 \leq 11$, e também $4(3) - 1 = 12 - 1 = 11$ e $-1 < 11 \leq 11$. No entanto, substituindo $x = 0$ resulta -1 (não é maior que -1).
 4. (a), (b) e (c): $1 - 2(-1) = 1 + 2 = 3$ e $-3 \leq 3$; $1 - 2(0) = 1 - 0 = 1$ e $-3 \leq 1 \leq 3$; $1 - 2(2) = 1 - 4 = -3$ e $-3 \leq -3 \leq 3$.

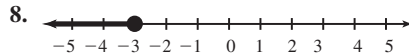


$2x - 1 \leq 4x + 3$

$2x \leq 4x + 4$

$-2x \leq 4$

$x \geq -2$

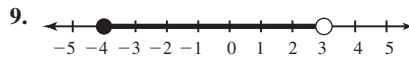


$3x - 1 \geq 6x + 8$

$3x \geq 6x + 9$

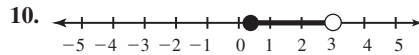
$-3x \geq 9$

$x \leq -3$



$2 \leq x + 6 < 9$

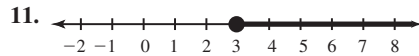
$-4 \leq x < 3$



$-1 \leq 3x - 2 < 7$

$1 \leq 3x < 9$

$\frac{1}{3} \leq x < 3$



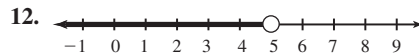
$10 - 6x + 6x - 3 \leq 2x + 1$

$7 \leq 2x + 1$

$6 \leq 2x$

$3 \leq x$

$x \geq 3$



$4 - 4x + 5 + 5x > 3x - 1$

$9 + x > 3x - 1$

$10 + x > 3x$

$10 > 2x$

$5 > x$

$x < 5$

13. $4\left(\frac{5x + 7}{4}\right) \leq 4(-3)$

$5x + 7 \leq -12$

$5x \leq -19$

$x \leq -\frac{19}{5}$

$$14. 5\left(\frac{3x-2}{5}\right) > 5(-1)$$

$$3x-2 > -5$$

$$3x > -3$$

$$x > -1$$

$$15. 3(4) \geq 3\left(\frac{2y-5}{3}\right) \geq 3(-2)$$

$$12 \geq 2y-5 \geq -6$$

$$17 \geq 2y \geq -1$$

$$\frac{17}{2} \geq y \geq -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{17}{2}$$

$$16. 4(1) > 4\left(\frac{3y-1}{4}\right) > 4(-1)$$

$$4 > 3y-1 > -4$$

$$5 > 3y > -3$$

$$\frac{5}{3} > y > -1$$

$$-1 < y < \frac{5}{3}$$

$$17. 0 \leq 2z+5 < 8$$

$$-5 \leq 2z < 3$$

$$-\frac{5}{2} \leq z < \frac{3}{2}$$

$$18. -6 < 5t-1 < 0$$

$$-5 < 5t < 1$$

$$-1 < t < \frac{1}{5}$$

$$19. 12\left(\frac{x-5}{4} + \frac{3+2x}{3}\right) < 12(-2)$$

$$3(x-5) + 4(3+2x) < -24$$

$$3x-15+12+8x < -24$$

$$-5x-3 < -24$$

$$-5x < -21$$

$$x > \frac{21}{5}$$

$$20. 6\left(\frac{3-x}{2} + \frac{5x-2}{3}\right) < 6(-1)$$

$$3(3-x) + 2(5x-2) < -6$$

$$9-3x+10x-4 < -6$$

$$7x+5 < -6$$

$$7x < -11$$

$$x < -\frac{11}{7}$$

$$21. 10\left(\frac{2y-3}{2} + \frac{3y-1}{5}\right) < 10(y-1)$$

$$5(2y-3) + 2(3y-1) < 10y-10$$

$$10y-15+6y-2 < 10y-10$$

$$16y-17 < 10y-10$$

$$16y < 10y+7$$

$$6y < 7$$

$$y < \frac{7}{6}$$

$$22. 24\left(\frac{3-4y}{6} - \frac{2y-3}{8}\right) \geq 24(2-y)$$

$$4(3-4y) - 3(2y-3) \geq 48-24y$$

$$12-16y-6y+9 \geq 48-24y$$

$$-22y+21 \geq 48-24y$$

$$-22 \geq 27-24y$$

$$2y \geq 27$$

$$y \geq \frac{27}{2}$$

$$23. 2\left[\frac{1}{2}(x-4) - 2x\right] \leq 2[5(3-x)]$$

$$x-4-4x \leq 10(3-x)$$

$$-3x-4 \leq 30-10x$$

$$-3x \leq 34-10x$$

$$7x \leq 34$$

$$x \leq \frac{34}{7}$$

$$24. 6\left[\frac{1}{2}(x+3) + 2(x-4)\right] < 6\left[\frac{1}{3}(x-3)\right]$$

$$3(x+3) + 12(x-4) < 2(x-3)$$

$$3x+9+12x-48 < 2x-6$$

$$15x-39 < 2x-6$$

$$15x < 2x+33$$

$$13x < 33$$

$$x < \frac{33}{13}$$

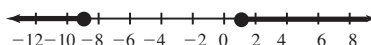
25. Falso.

26. Verdadeiro.

27. $(-\infty, -9] \cup [1, +\infty)$:

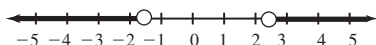
$$x+4 \geq 5 \quad \text{ou} \quad x+4 \leq -5$$

$$x \geq 1 \quad \quad \quad x \leq -9$$



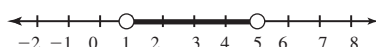
28. $]-\infty, -1,3[\cup]2,3, \infty[$:

$$\begin{array}{ll} 2x - 1 > 3,6 & \text{ou} & 2x - 1 < -3,6 \\ 2x > 4,6 & & 2x < -2,6 \\ x > 2,3 & & x < -1,3 \end{array}$$



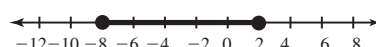
29. $]1, 5[$

$$-2 < x - 3 < 2 \quad 1 < x < 5$$



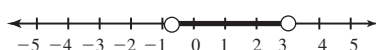
30. $[-8, 2]$

$$-5 \leq x + 3 < 5 \quad -8 \leq x \leq 2$$



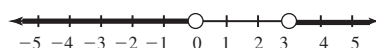
31. $\left] -\frac{2}{3}, \frac{10}{3} \right[$

$$\begin{array}{l} |4 - 3x| < 6 \\ -6 < 4 - 3x < 6 \\ -10 < -3x < 2 \\ \frac{10}{3} > x > -\frac{2}{3} \end{array}$$



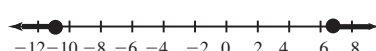
32. $]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$

$$\begin{array}{ll} |3 - 2x| > 3 \\ 3 - 2x > 3 & \text{ou} & 3 - 2x < 3 \\ -2x > 0 & & -2x < -6 \\ x < 0 & & x > 3 \end{array}$$



33. $]-\infty, -11[\cup]7, +\infty[$

$$\begin{array}{ll} \frac{x+2}{3} \leq -3 & \text{ou} & \frac{x+2}{3} \geq 3 \\ x+2 \leq -9 & & x+2 \geq 9 \\ x \leq -11 & & x \geq 7 \end{array}$$

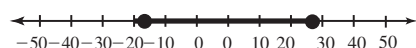


34. $[-19, 29]$

$$\left| \frac{x-5}{4} \right| \leq 6$$

$$-6 \leq \frac{x-5}{4} \leq 6$$

$$\begin{array}{l} -24 \leq x - 5 \leq 24 \\ -19 \leq x \leq 29 \end{array}$$



35. $2x^2 + 17x + 21 = 0$

$$(2x + 3)(x + 7) = 0$$

$$2x + 3 = 0 \text{ ou } x + 7 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \text{ ou } x = -7$$

O gráfico de $y = 2x^2 + 17x + 21$ está abaixo do eixo x para $-7 < x < -3/2$. Portanto, $[-7, -3/2]$ é a solução pois os extremos estão incluídos.

36. $6x^2 - 13x + 6 = 0$

$$(2x - 3)(3x - 2) = 0$$

$$2x - 3 = 0 \text{ ou } 3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = \frac{2}{3}$$

O gráfico de $y = 6x^2 - 13x + 6$ está acima do eixo x para $x < 2/3$ e para $x > 3/2$. Portanto, $]-\infty, 2/3[\cup]3/2, +\infty[$ é a solução pois os extremos estão incluídos.

37. $2x^2 + 7x - 15 = 0$

$$(2x - 3)(x + 5) = 0$$

$$2x - 3 = 0 \text{ ou } x + 5 = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -5$$

O gráfico de $y = 2x^2 + 7x - 15$ está acima do eixo x para $x < -5$ e para $x > 3/2$. Portanto, $]-\infty, -5[\cup]3/2, +\infty[$ é a solução.

38. $4x^2 - 9x + 2 = 0$

$$(4x - 1)(x - 2) = 0$$

$$4x - 1 = 0 \text{ ou } x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{4} \text{ ou } x = 2$$

O gráfico de $y = 4x^2 - 9x + 2$ está abaixo do eixo x para $1/4 < x < 2$. Portanto, $]1/4, 2[$ é a solução.

39. $2 - 5x - 3x^2 = 0$

$$(2 + x)(1 - 3x) = 0$$

$$2 + x = 0 \text{ ou } 1 - 3x = 0$$

$$x = -2 \text{ ou } x = \frac{1}{3}$$

O gráfico de $y = 2 - 5x - 3x^2$ está abaixo do eixo x para $x < -2$ e para $x > 1/3$. Portanto, $]-\infty, -2[\cup]1/3, +\infty[$ é a solução.

40. $21 + 4x - x^2 = 0$

$$(7 - x)(3 + x) = 0$$

$$7 - x = 0 \text{ ou } 3 + x = 0$$

$$x = 7 \text{ ou } x = -3$$

O gráfico de $y = 21 + 4x - x^2$ está acima do eixo x para $-3 < x < 7$. Portanto, $]-3, +7[$ é a solução, pois os extremos estão incluídos.

41. $x^3 - x = 0$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

$$x(x + 1)(x - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x + 1 = 0 \text{ ou } x - 1 = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = 1$$

O gráfico de $y = x^3 - x$ está acima do eixo x para $x > 1$ e para $-1 < x < 0$. Portanto, $[-1, 0] \cup [1, +\infty[$ é a solução, pois os extremos estão incluídos.

42. $x^3 - x^2 - 30x = 0$

$$x(x^2 - x - 30) = 0$$

$$x(x - 6)(x + 5) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x - 6 = 0 \text{ ou } x + 5 = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 6 \text{ ou } x = -5$$

O gráfico de $y = x^3 - x^2 - 30x$ está abaixo do eixo x para $x < -5$ e para $0 < x < 6$. Portanto, $]-\infty, -5] \cup [0, 6[$ é a solução, pois os extremos estão incluídos.

43. O gráfico de $y = x^2 - 4x - 1$ é zero para $x \cong -0,24$ e $x \cong 4,24$ e está abaixo do eixo x para $-0,24 < x < 4,24$. Portanto, $]-0,24; 4,24[$ é a solução aproximada.

44. O gráfico de $y = 12x^2 - 25x + 12$ é zero para $x = 4/3$ e $x = 3/4$ e está acima do eixo x para $x < 3/4$ e para $x > 4/3$. Portanto, $]-\infty, 3/4] \cup [4/3, +\infty[$ é a solução.

45. $6x^2 - 5x - 4 = 0$

$$(3x - 4)(2x + 1) = 0$$

$$3x - 4 = 0 \text{ ou } 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{4}{3} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

O gráfico de $y = 6x^2 - 5x - 4$ está acima do eixo x para $x < -1/2$ e para $x > 4/3$. Portanto, $]-\infty, -1/2[\cup]4/3, +\infty[$ é a solução.

46. $4x^2 - 1 = 0$

$$(2x + 1)(2x - 1) = 0$$

$$2x + 1 = 0 \text{ ou } 2x - 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

O gráfico de $y = 4x^2 - 1$ está abaixo do eixo x para $-1/2 < x < 1/2$. Portanto, $[-1/2, 1/2]$ é a solução, pois os extremos estão incluídos.

47. O gráfico de $y = 9x^2 + 12x - 1$ parece ser zero para $x \cong -1,41$ e $x \cong 0,08$ e está acima do eixo x para $x < -1,41$ e $x > 0,08$. Portanto, $]-\infty, -1,41] \cup [0,08, +\infty[$ é a solução aproximada, e os extremos estão incluídos.

48. O gráfico de $y = 4x^2 - 12x + 7$ parece ser zero para $x \cong 0,79$ e $x \cong 2,21$ e está abaixo do eixo x para $0,79 < x < 2,21$. Portanto, $]0,79, 2,21[$ é a solução aproximada.

49. $4x^2 - 4x + 1 = 0$

$$(2x - 1)(2x - 1) = 0$$

$$(2x - 1)^2 = 0$$

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

O gráfico de $y = 4x^2 - 4x + 1$ está totalmente acima do eixo x , exceto em $x = 1/2$. Portanto, $]-\infty, 1/2[\cup]1/2, +\infty[$ é a solução estabelecida.

50. $x^2 - 6x + 9 = 0$

$$(x - 3)(x - 3) = 0$$

$$(x - 3)^2 = 0$$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

O gráfico de $y = x^2 - 6x + 9$ está totalmente acima do eixo x , exceto em $x = 3$. Portanto, $\{3\}$ é a solução estabelecida.

51. $x^2 - 8x + 16 = 0$

$$(x - 4)(x - 4) = 0$$

$$(x - 4)^2 = 0$$

$$x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

O gráfico de $y = x^2 - 8x + 16$ está totalmente acima do eixo x , exceto em $x = 4$. Portanto, não há solução, isto é, a solução é dada por ϕ .

52. $9x^2 + 12x + 4 = 0$

$$(3x + 2)(3x + 2) = 0$$

$$(3x + 2)^2 = 0$$

$$3x + 2 = 0$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

O gráfico de $y = 9x^2 + 12x + 4$ está totalmente acima do eixo x , exceto em $x = -2/3$. Portanto, todo número real satisfaz a inequação. A solução é $]-\infty, +\infty[$.

53. O gráfico de $y = 3x^3 - 12x + 2$ é zero para $x \cong -2,08$, $x \cong 0,17$ e $x \cong 1,91$ e está acima do eixo x para $-2,08 < x < 0,17$ e $x > 1,91$. Portanto, $[-2,08, 0,17] \cup [1,91, +\infty[$ é a solução aproximada.

- 54.** O gráfico de $y = 8x - 2x^3 - 1$ é zero para $x \cong -2,06$, $x \cong 0,13$ e $x \cong 1,93$ e está abaixo do eixo x para $-2,06 < x < 0,13$ e $x > 1,93$. Portanto, $]-2,06; 0,13[\cup]1,93; +\infty[$ é a solução aproximada.
- 55.** $2x^3 + 2x > 5$ é equivalente a $2x^3 + 2x - 5 > 0$. O gráfico de $y = 2x^3 + 2x - 5$ é zero para $x \cong 1,11$ e está acima do eixo x para $x > 1,11$. Assim, $]1,11; +\infty[$ é a solução aproximada.
- 56.** $4 \leq 2x^3 + 8x$ é equivalente a $2x^3 + 8x - 4 \geq 0$. O gráfico de $y = 2x^3 + 8x - 4$ é zero para $x \cong 0,47$ e está acima do eixo x para $x > 0,47$. Assim, $[0,47; +\infty[$ é a solução aproximada.
- 57.** As respostas podem variar. Algumas possibilidades são:
- (a) $x^2 > 0$
 (b) $x^2 + 1 < 0$
 (c) $x^2 \leq 0$
 (d) $(x + 2)(x - 5) \leq 0$
 (e) $(x + 1)(x - 4) > 0$
 (f) $x(x - 4) \geq 0$
- 58.** Seja x a velocidade média; então $105 < 2x$. Resolvendo a equação resulta $x > 52,5$, assim, a menor velocidade média é 52,5 km/h.
- 59. (a)** Seja $x > 0$ a largura de um retângulo então a altura é $2x - 2$ e o perímetro é $P = 2[x + (2x - 2)]$. Resolvendo $P < 200$ e $2x - 2 > 0$ resulta $1 \text{ cm} < x < 34 \text{ cm}$.
- $$2[x + (2x - 2)] < 200 \quad \text{e} \quad 2x - 2 > 0$$
- $$2(3x - 2) < 200 \quad 2x < 2$$
- $$6x - 4 < 200 \quad x > 1$$
- $$6x < 204$$
- $$x < 34$$
- (b) A área é $A = x(2x - 2)$. Já sabemos que $x > 1$ da parte (a). Resolver $A \leq 1200$.
- $$x(2x - 2) = 1200$$
- $$2x^2 - 2x - 1200 = 0$$
- $$x^2 - x - 600 = 0$$
- $$(x - 25)(x + 24) = 0$$
- $$x - 25 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 24 = 0$$
- $$x = 25 \quad \text{ou} \quad x = -24$$
- O gráfico de $y = 2x^2 - 2x - 1200$ está abaixo do eixo x para $1 < x < 25$. Assim, $A \leq 1200$ quando x está no intervalo $]1, 25[$.
- 60.** Substitua 20 e 40 na equação $P = 400/V$ para encontrar a imagem $P: P = 400/20$ e $P = 400/40 = 10$. A pressão pode variar de 10 a 20, ou $10 \leq P \leq 20$. De maneira alternativa, resolva graficamente: gráfico $y = 400/x$ em $[20, 40] \times [0, 30]$ e observe que todos os valores de y estão entre 10 e 20.
- 61.** Falso.
- 62.** Verdadeiro.
- 63.** $|x - 2| < 3$
 $-3 < x - 2 < 3$
 $-1 < x < 5$
 $] -1, 5[$
 A resposta é E.
- 64.** O gráfico de $y = x^2 - 2x + 2$ está totalmente acima do eixo x , assim, $x^2 - 2x + 2 \geq 0$ para todos os números reais de x . A resposta é D.
- 65.** $x^2 > x$ é verdadeira para todo x negativo ou para $x > 1$. Assim, a solução é $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. A resposta é A.
- 66.** $x^2 \leq 1$ implica $-1 \leq x \leq 1$, assim, a solução é $[-1, 1]$. A resposta é D.
- 67. (a)** Os comprimentos dos lados da caixa são x , $12 - 2x$ e $15 - 2x$, assim o volume é $x(12 - 2x)(15 - 2x)$. Resolver $x(12 - 2x)(15 - 2x) = 125$, gráfico $y = x(12 - 2x)(15 - 2x)$ e $y = 125$ e encontrar onde os gráficos se interseccionam: $x \cong 0,94$ polegadas ou $x \cong 3,78$ polegadas.
- (b) O gráfico de $y = x(12 - 2x)(15 - 2x)$ está acima do gráfico de $y = 125$ para $0,94 < y < 3,78$ (aproximadamente). Assim, escolhendo x no intervalo $]0,94; 3,78[$ resultará em uma caixa com o volume maior que 125 centímetros cúbicos.
- 68.** $2x^2 + 7x - 15 = 10$ ou $2x^2 + 7x - 15 = -10$
 $2x^2 + 7x - 25 = 0$ $2x^2 + 7x - 5 = 0$
 O gráfico de $y = 2x^2 + 7x - 25$ parece ser zero para $x \cong -5,69$ e $x \cong 2,19$
 O gráfico de $y = 2x^2 + 7x - 5$ parece ser zero para $x \cong -4,11$ e $x \cong 0,61$
- Olhe para os gráficos de $y = |2x^2 + 7x - 15|$ e $y = 10$. O gráfico de $y = |2x^2 + 7x - 15|$ está abaixo do gráfico de $y = 10$ quando $-5,69 < x < -4,11$ e quando $0,61 < x < 2,19$. Portanto, $]-5,69, -4,11[\cup]0,61; 2,19[$ é a solução aproximada.