

Capítulo 27

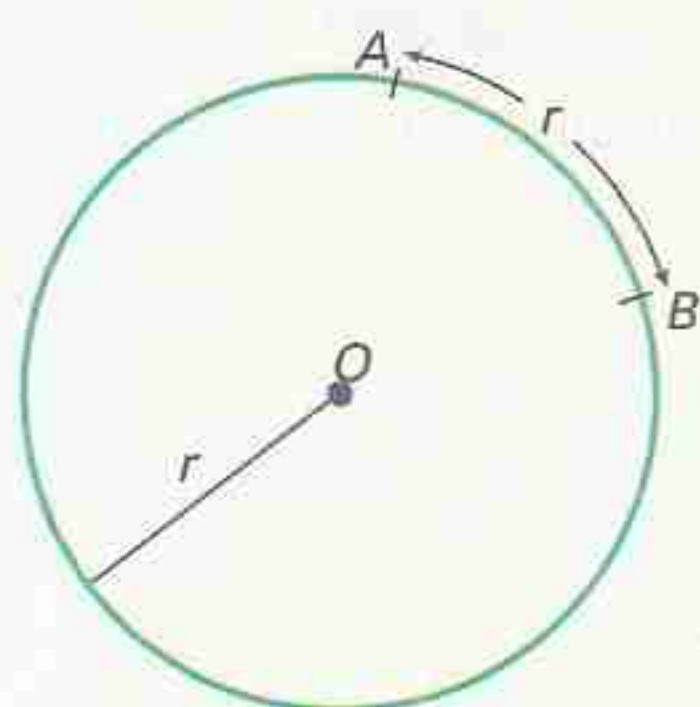
O SISTEMA TRIGONOMÉTRICO

1. O RADIANO, UNIDADE DE MEDIDA DE ARCO E ÂNGULO

Até aqui utilizamos apenas o **grau** como unidade de medida de ângulo. Neste capítulo vamos estudar uma outra unidade: o **radiano**.

Consideremos um arco \widehat{AB} , contido numa circunferência de raio r , tal que o comprimento do arco \widehat{AB} seja igual a r .

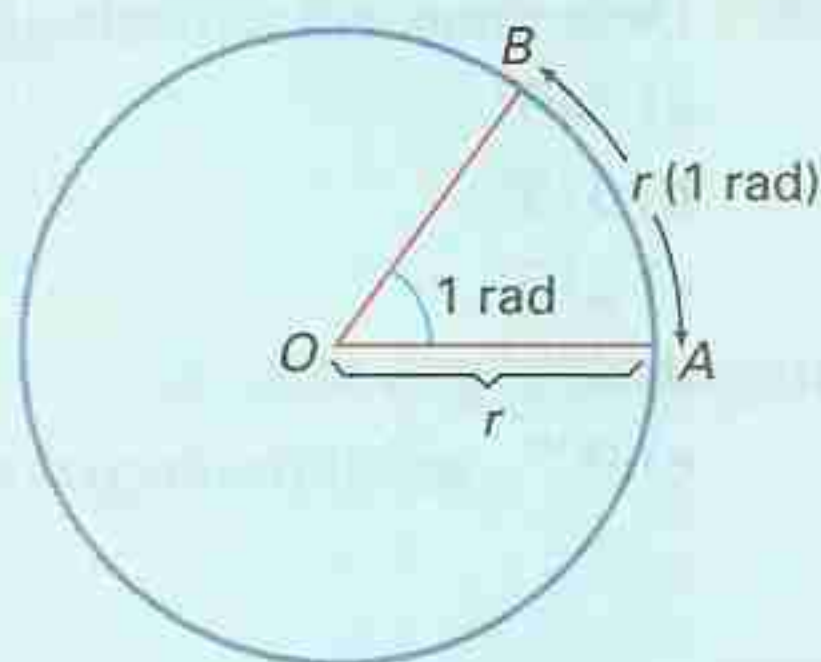
Dizemos que a medida do arco \widehat{AB} é 1 radiano (1 rad).



Definições

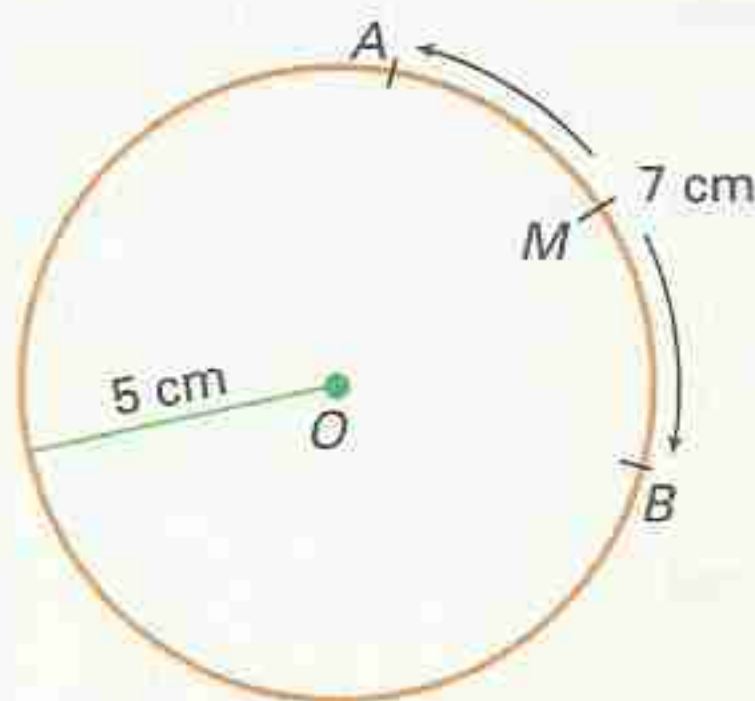
1. Um radiano (1 rad) é um arco cujo comprimento é igual ao do raio da circunferência que o contém.

2. Um ângulo \widehat{AOB} mede 1 rad se, e somente se, determina numa circunferência de centro O um arco de 1 rad.



EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.1 Determinar a medida do arco \widehat{AMB} , da figura, em radianos.



Resolução

Pela regra de três:

rad	cm
1	5
x	7

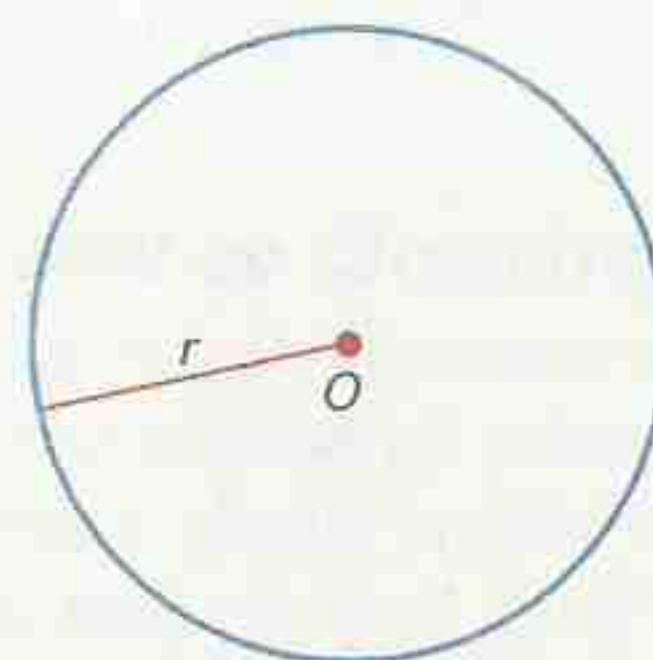
temos $x = \frac{7}{5}$ rad = 1,4 rad.

Logo, a medida do arco \widehat{AMB} é 1,4 rad.

2. A MEDIDA DA CIRCUNFERÊNCIA EM RADIANS

Sabemos que uma circunferência mede 360° . Qual será sua medida em radianos?

Pensemos...



O comprimento de uma circunferência de raio r , numa certa unidade u , é $2\pi r$. Logo, sendo x a medida da circunferência em radianos, temos, pela regra de três:

$$\begin{array}{ccc} \text{rad} & u & \\ 1 & r & \\ x & 2\pi r & \end{array} \quad \begin{array}{l} \therefore x = \frac{2\pi}{r} \text{ rad} \\ \therefore x = 2\pi \text{ rad} \end{array}$$

Assim, temos:

A medida de uma circunferência é 2π rad.

Como $\pi \approx 3,14$, a conclusão anterior nos diz que o comprimento da circunferência equivale a $2\pi \approx 6,28$ raios dessa circunferência.

3. TRANSFORMAÇÕES DE UNIDADES

Dizemos que uma medida em radianos é equivalente a uma medida em graus se são medidas de um mesmo arco, por exemplo, 2π rad é equivalente a 360° , pois ambas são medidas de um arco de uma volta completa. Consequentemente, temos:

π rad é equivalente a 180°

Essa equivalência nos permite transformar unidades, ou seja, dada a medida de um arco em graus, podemos obter a medida desse arco em radianos e vice-versa.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.2 Determinar, em radianos, a medida equivalente a 120° .

Resolução

Lembrando que π rad equivalem a 180° , basta resolvermos a regra de três:

$$\begin{array}{ccc} \text{rad} & \text{graus} & \\ \pi & 180 & \therefore 180x = 120\pi \\ x & 120 & \therefore x = \frac{120\pi}{180} \text{ rad} \\ & & \therefore x = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \end{array}$$

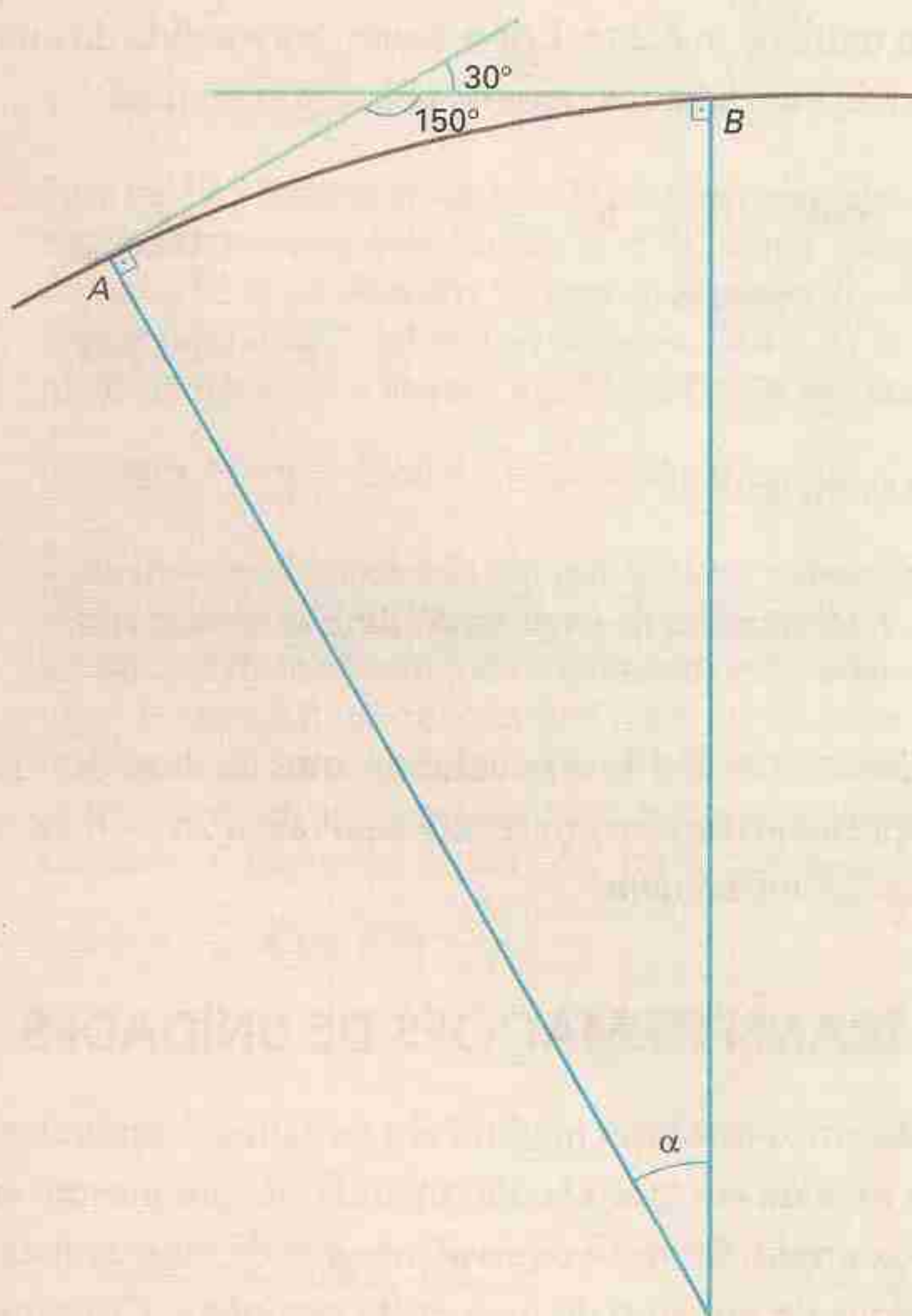
R.3 Determinar, em graus, a medida equivalente a $\frac{\pi}{6}$ rad.

Resolução

$$\begin{array}{ccc} \text{rad} & \text{graus} & \\ \pi & 180 & \therefore x = \frac{180 \cdot \frac{\pi}{6}}{\pi} \text{ graus} \\ \frac{\pi}{6} & x & \therefore x = 30^\circ \end{array}$$

O comprimento de uma curva

No projeto de uma estrada, um engenheiro prevê que uma curva terá o formato de um arco de circunferência de raio 500 m. Desde o ponto A, início da curva, até o ponto B, final da curva, a estrada muda sua direção em 30° . Observe como o profissional calcula o comprimento que terá a curva:



Cálculo da medida α do ângulo central:

$$150^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \alpha = 360^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

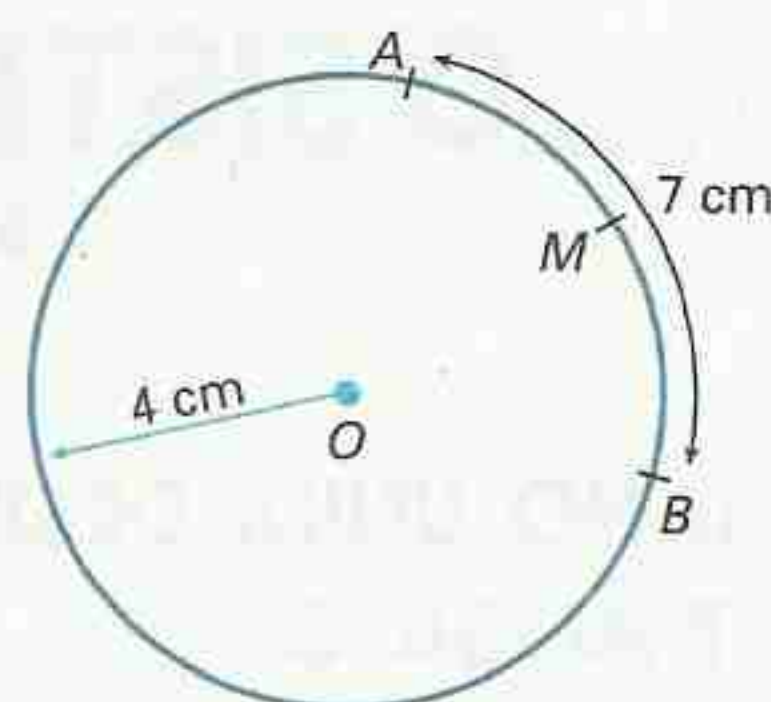
Regra de três usada no cálculo do comprimento x da curva:

$$\begin{array}{ccc} 360^\circ & 2 \cdot \pi \cdot 500 \text{ m} \\ 30^\circ & x \\ \therefore x \approx 261,7 \text{ m} \end{array}$$

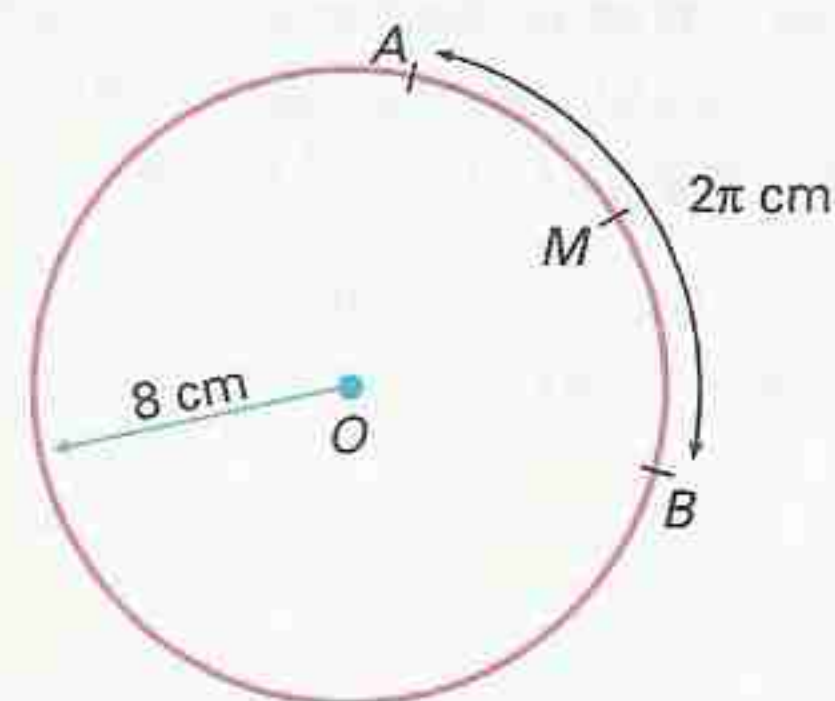


EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Determine, em radianos, a medida do arco \widehat{AMB} .



B.2 Determine, em graus, a medida do arco \widehat{AMB} , da figura abaixo.



B.3 Determine, em radianos, a medida equivalente a:

- | | |
|----------------|----------------|
| a) 240° | f) 270° |
| b) 315° | g) 30° |
| c) 210° | h) 300° |
| d) 45° | i) 20° |
| e) 90° | j) 40° |

B.4 Expresse, em graus, a medida equivalente a:

- $\frac{\pi}{5}$ rad
- $\frac{5\pi}{6}$ rad
- $\frac{3\pi}{4}$ rad
- $\frac{7\pi}{4}$ rad
- $\frac{2\pi}{3}$ rad
- $\frac{\pi}{2}$ rad
- $\frac{4\pi}{3}$ rad
- $\frac{5\pi}{9}$ rad
- $\frac{11\pi}{6}$ rad
- 1 rad
- 1,5 rad
- 0,7 rad

Sugestão. Para os itens j, k e l, substitua π , na regra de três, por um valor aproximado. Por exemplo, no item j:

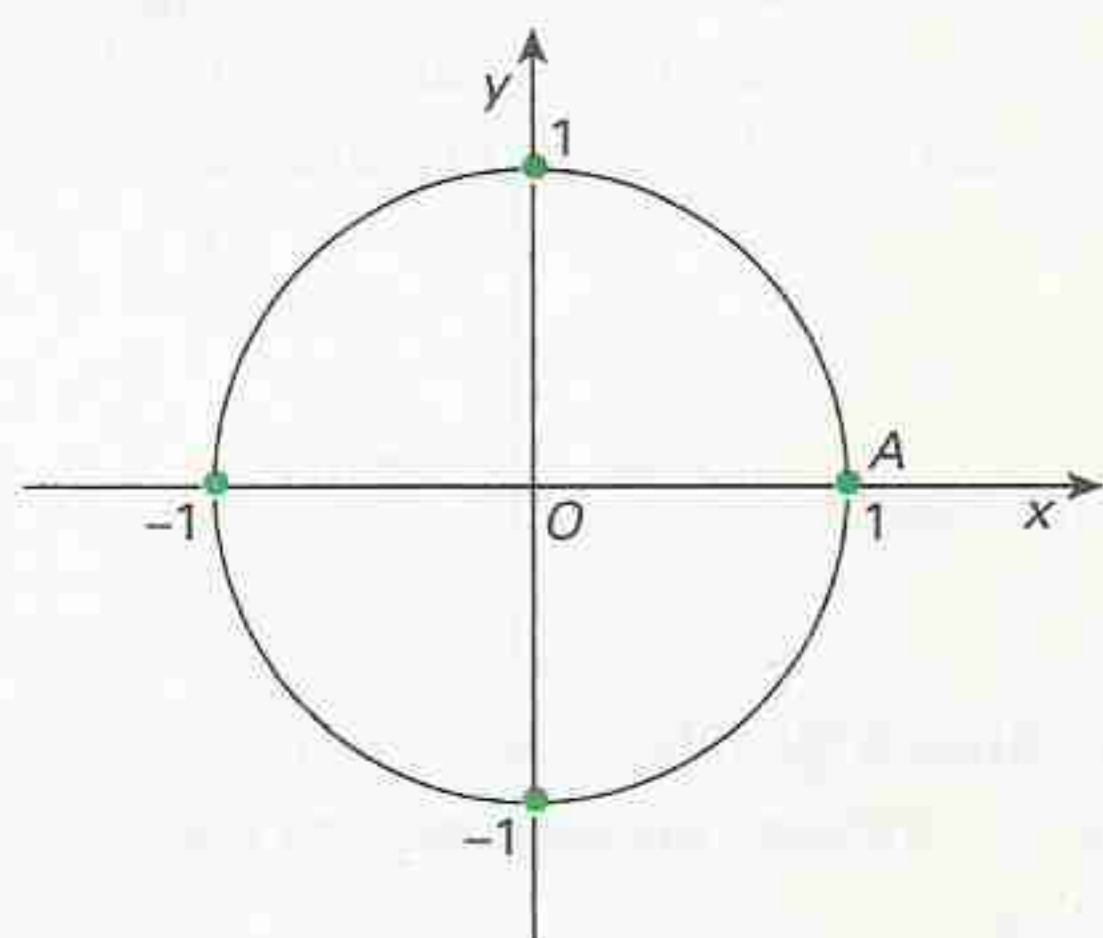
rad	graus
3,14	180
1	x

Exercícios complementares de C.1 a C.3

4. CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Até aqui, definimos seno, co-seno e tangente somente para ângulos agudos. Vamos estender esses conceitos para ângulos não-agudos. Para isso é necessária a construção de um sistema chamado **circunferência trigonométrica**.

Consideremos uma circunferência de raio unitário ($r = 1$), cujo centro coincide com a origem de um sistema cartesiano ortogonal.



Essa estrutura, juntamente com as convenções a seguir, é chamada de circunferência trigonométrica.

Convenções

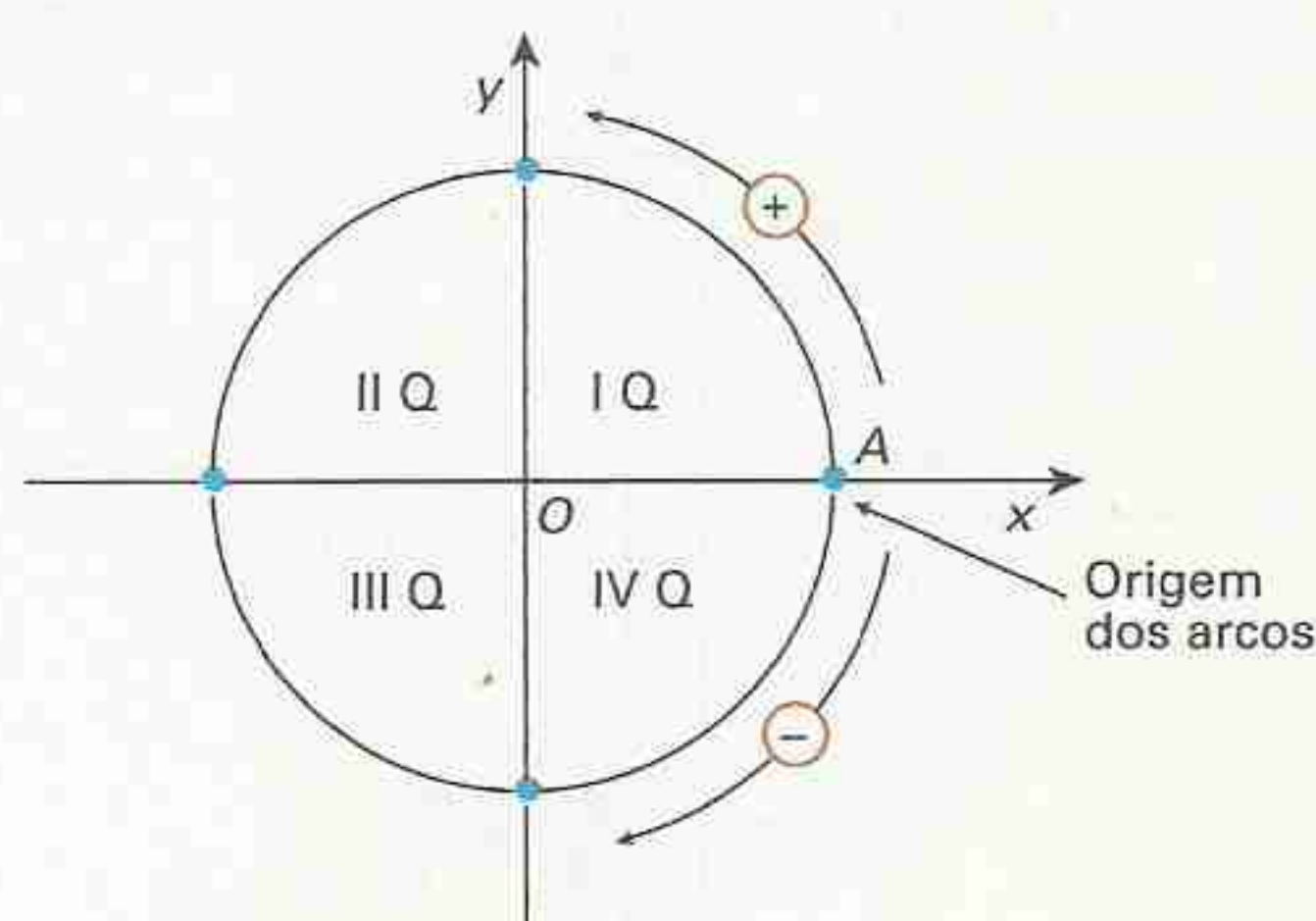
I. O ponto $A(1, 0)$ é a origem de todos os arcos a serem medidos na circunferência.

II. Se um arco for medido no **sentido horário**, então a essa medida será atribuído o sinal **negativo** ($-$).

III. Se um arco for medido no sentido **anti-horário**, então a essa medida será atribuído o sinal **positivo** ($+$).

IV. Os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em quatro regiões chamadas **quadrantes**; esses quadrantes são contados no sentido anti-horário, a partir do ponto A.

Em resumo:

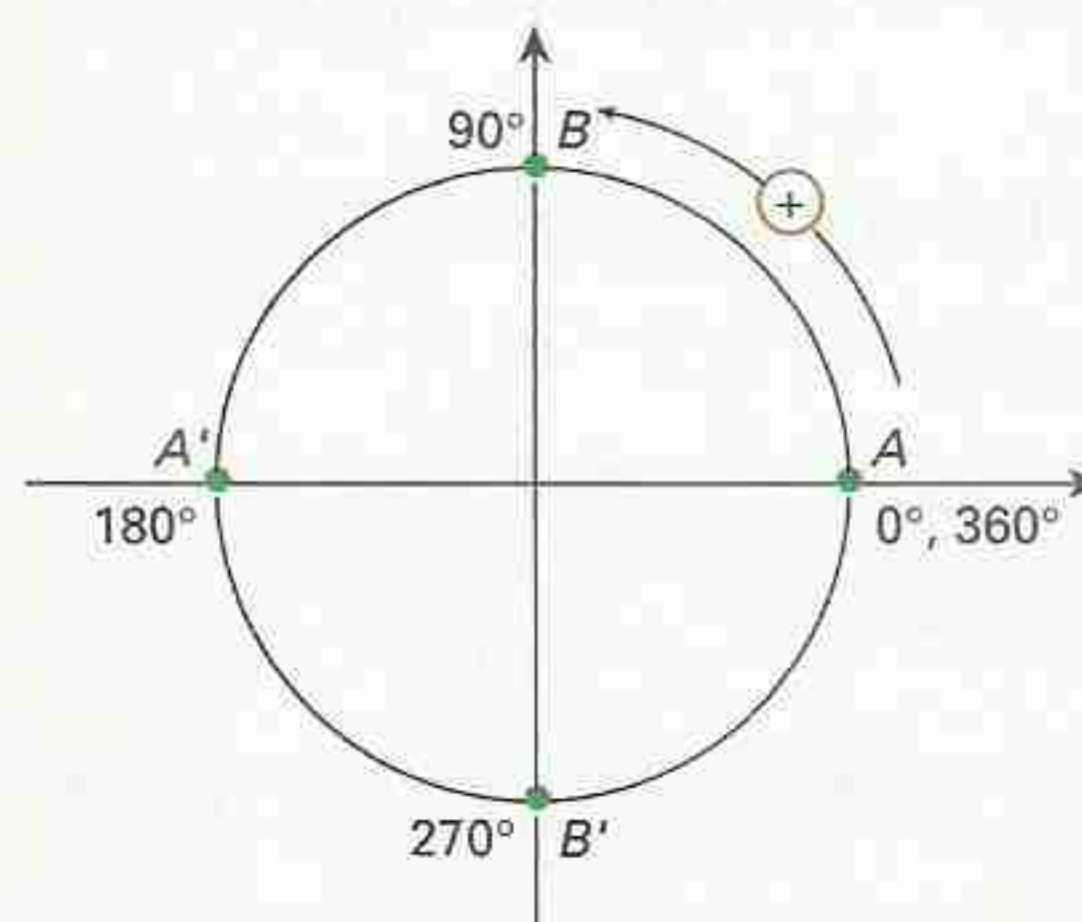


5. ARCOS TRIGONOMÉTRICOS

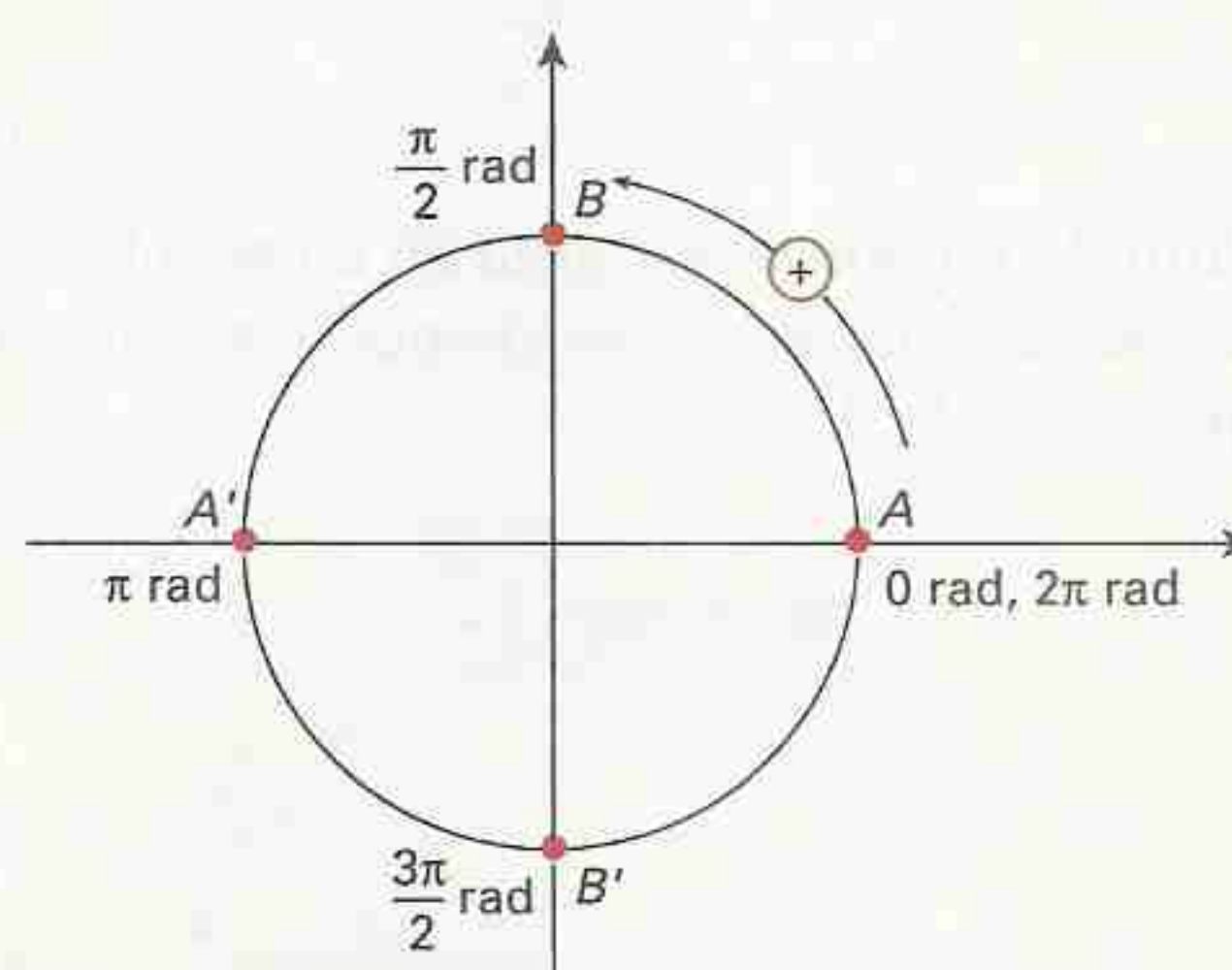
A cada ponto M da circunferência trigonométrica associamos medidas em graus ou radianos do arco \widehat{AM} .

Exemplos

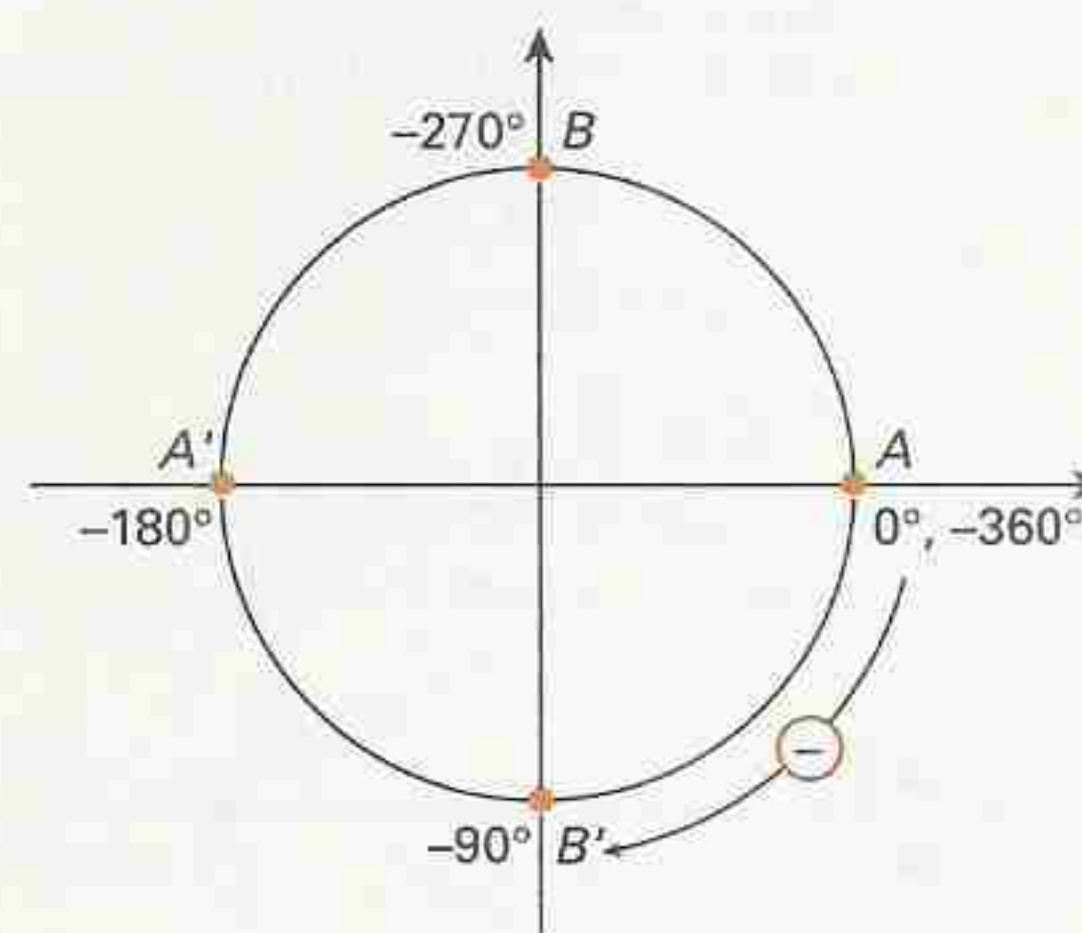
a) Partindo do ponto A e girando uma volta completa no sentido anti-horário, associamos as seguintes medidas aos pontos A, B, A' e B':



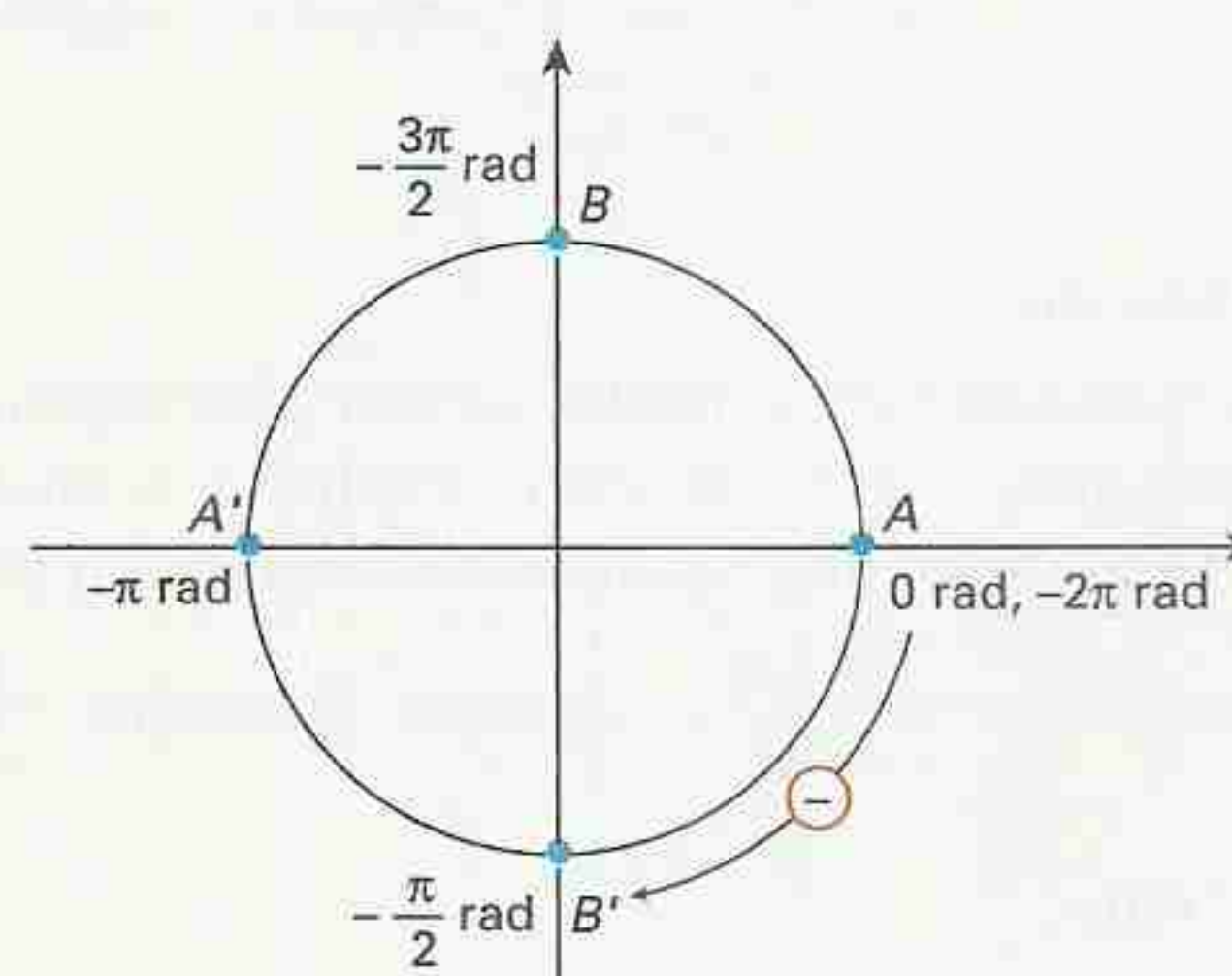
ou



b) Partindo do ponto A e girando uma volta completa no sentido horário, associamos as seguintes medidas aos pontos A, B, A' e B':



ou



Arcos c4ngruos

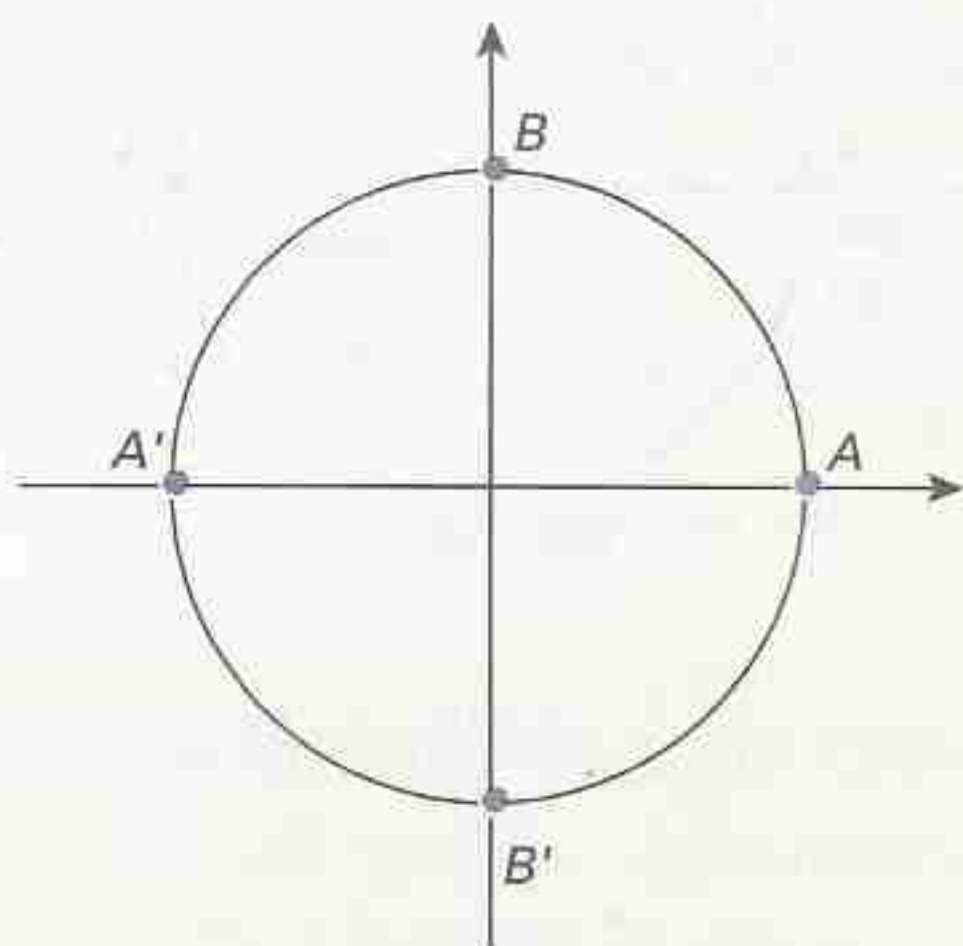
Defini44o

Dois arcos trigonom4tricos \widehat{AM} e \widehat{AN} s4o **c4ngruos** se, e somente se, as extremidades M e N coincidem.

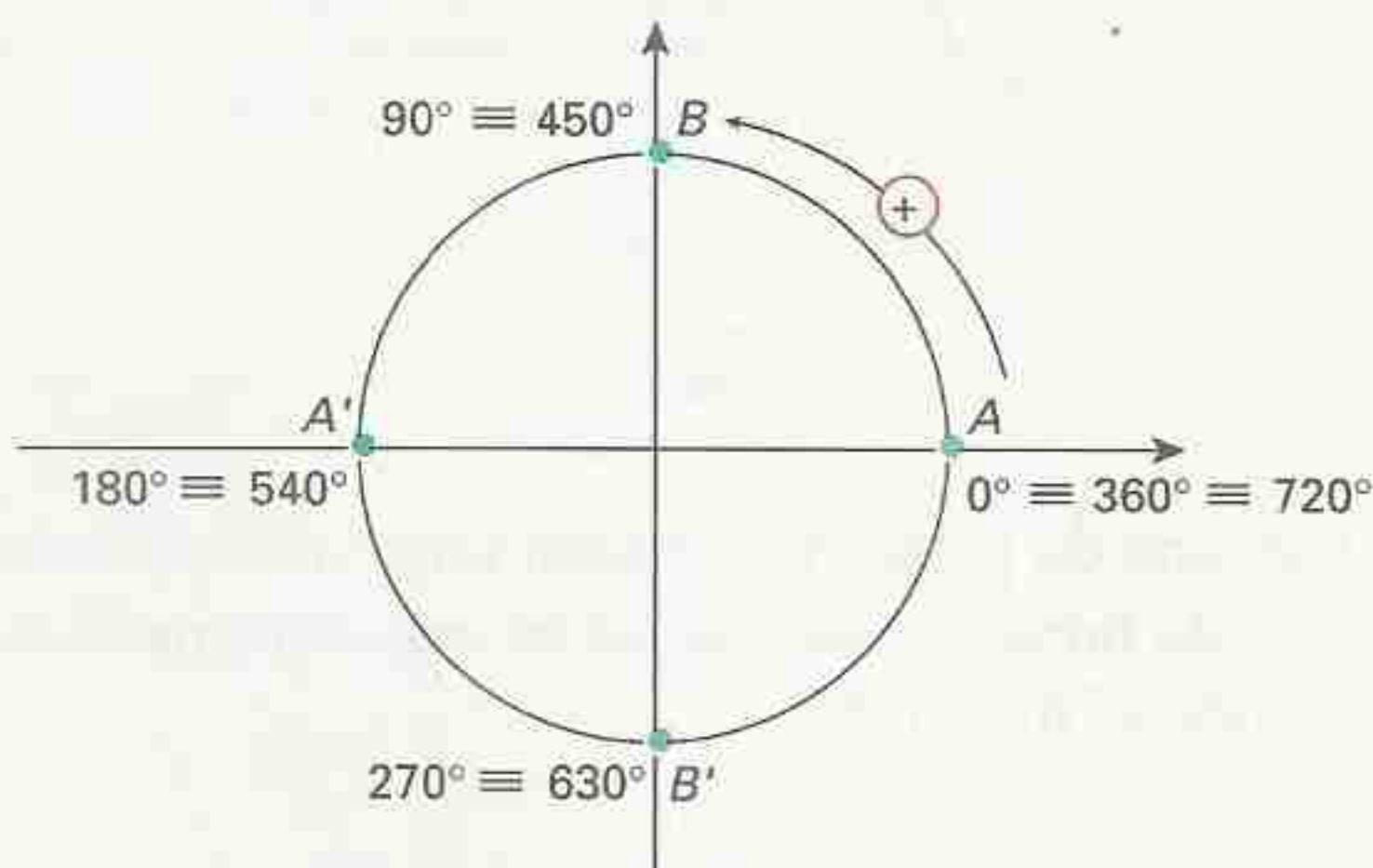
Indicaremos que α e β s4o medidas de arcos **c4ngruos** por $\alpha \equiv \beta$ (l4-se “ α 4 c4ngruo a β ”).

Exemplo

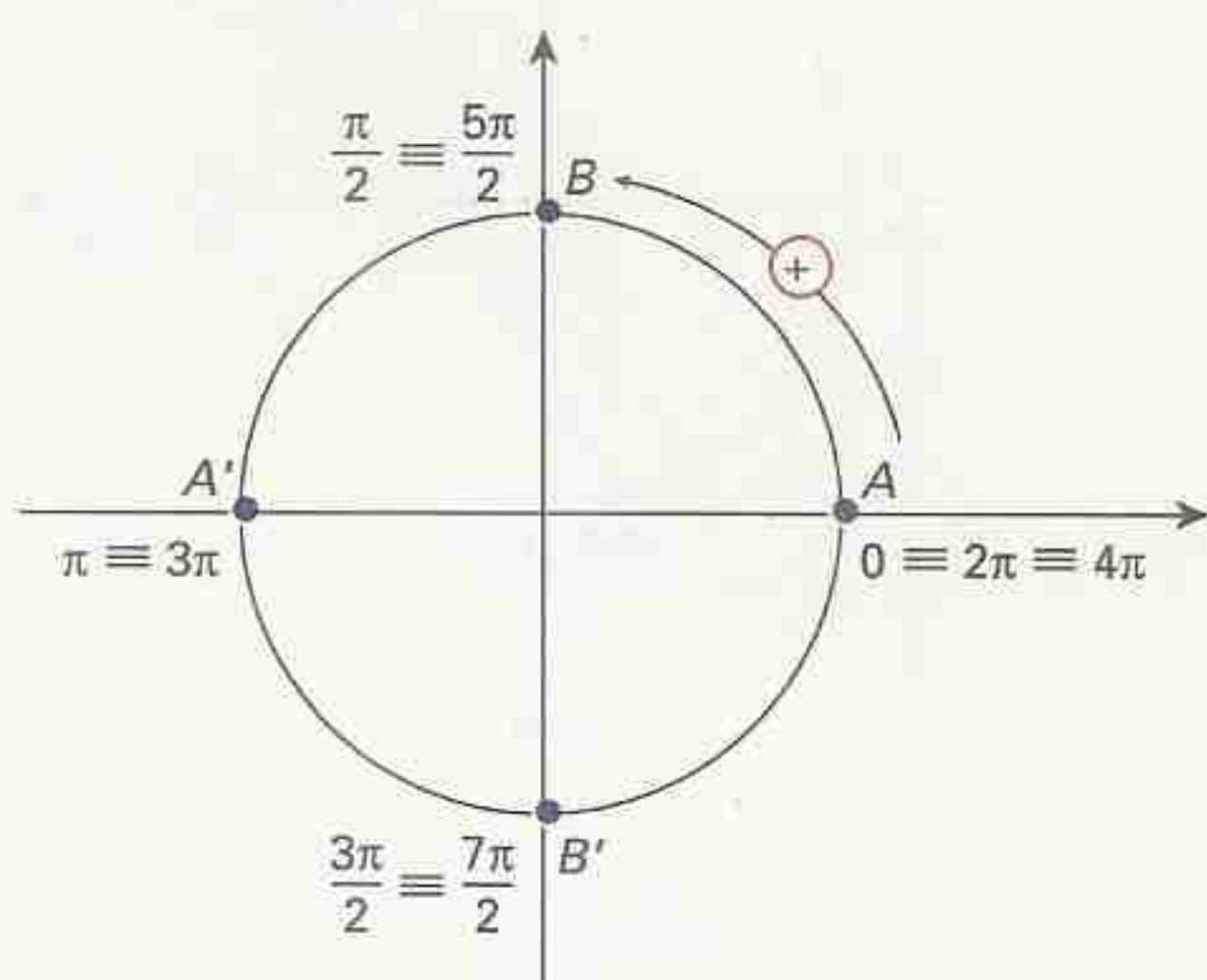
Consideremos a circunfer4ncia trigonom4trica:



Partindo do ponto A e girando duas voltas completas no sentido anti-hor4rio, associamos as seguintes medidas aos pontos A, B, A' e B' :



ou



Conven44o

Para indicarmos a medida de um arco trigonom4trico, em radianos, n4o 4 necess4rio explicitar a unidade **rad**. No exemplo anterior, quando associamos ao ponto B os valores $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{2}$, deve-se entender $\frac{\pi}{2}$ rad e

$\frac{5\pi}{2}$ rad.



EXERC4CIOS RESOLVIDOS

R.4 Determinar a medida x do arco da primeira volta positiva ($04 \leq x < 3604$) que possui a mesma extremidade do arco de 1.1104 .

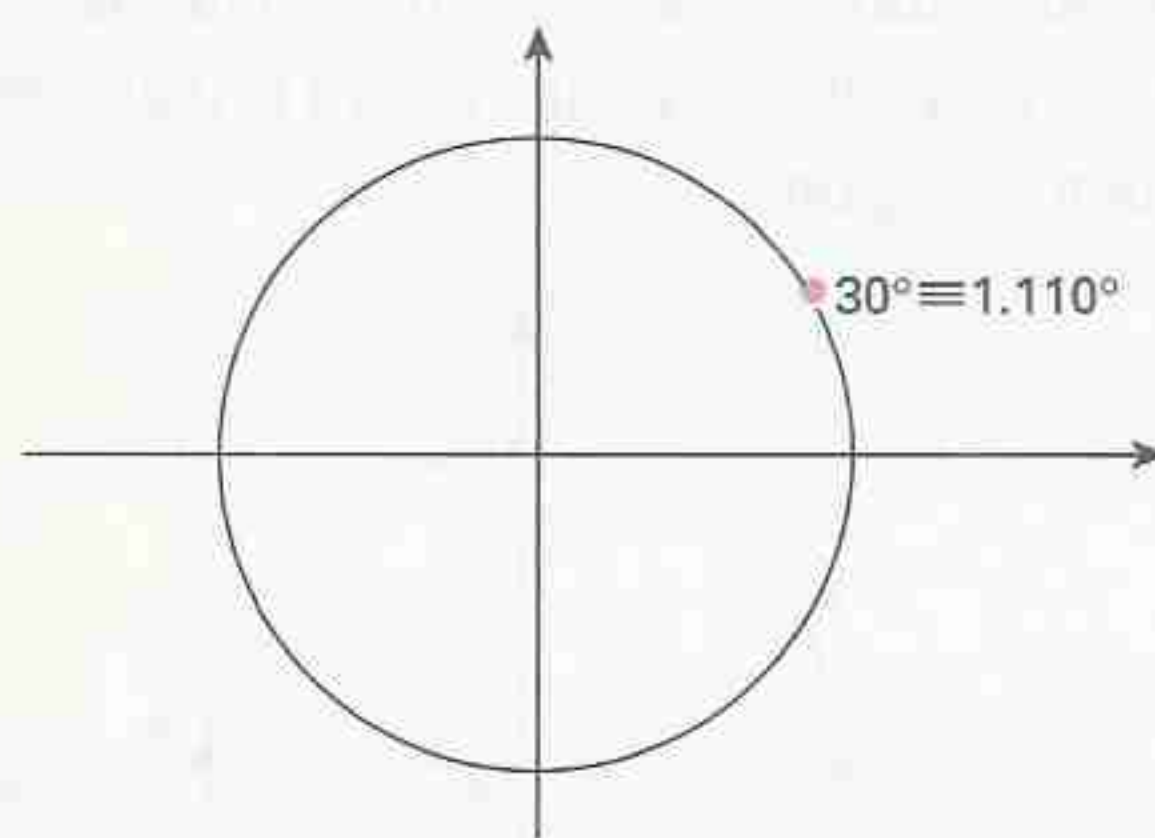
Resolu44o

Basta eliminarmos do arco de 1.1104 todas as suas voltas completas. Para isso, dividimos 1.1104 por 3604 :

$$\begin{array}{r} 1.1104 \\ 3604 \overline{) 3} \end{array}$$

Assim, $1.1104 = 3 \cdot 3604 + 304$.

O arco de 1.1104 possui tr4s voltas completas e mais 304 . Portanto $x = 304$. Dizemos que 304 4 c4ngruo a 1.1104 .



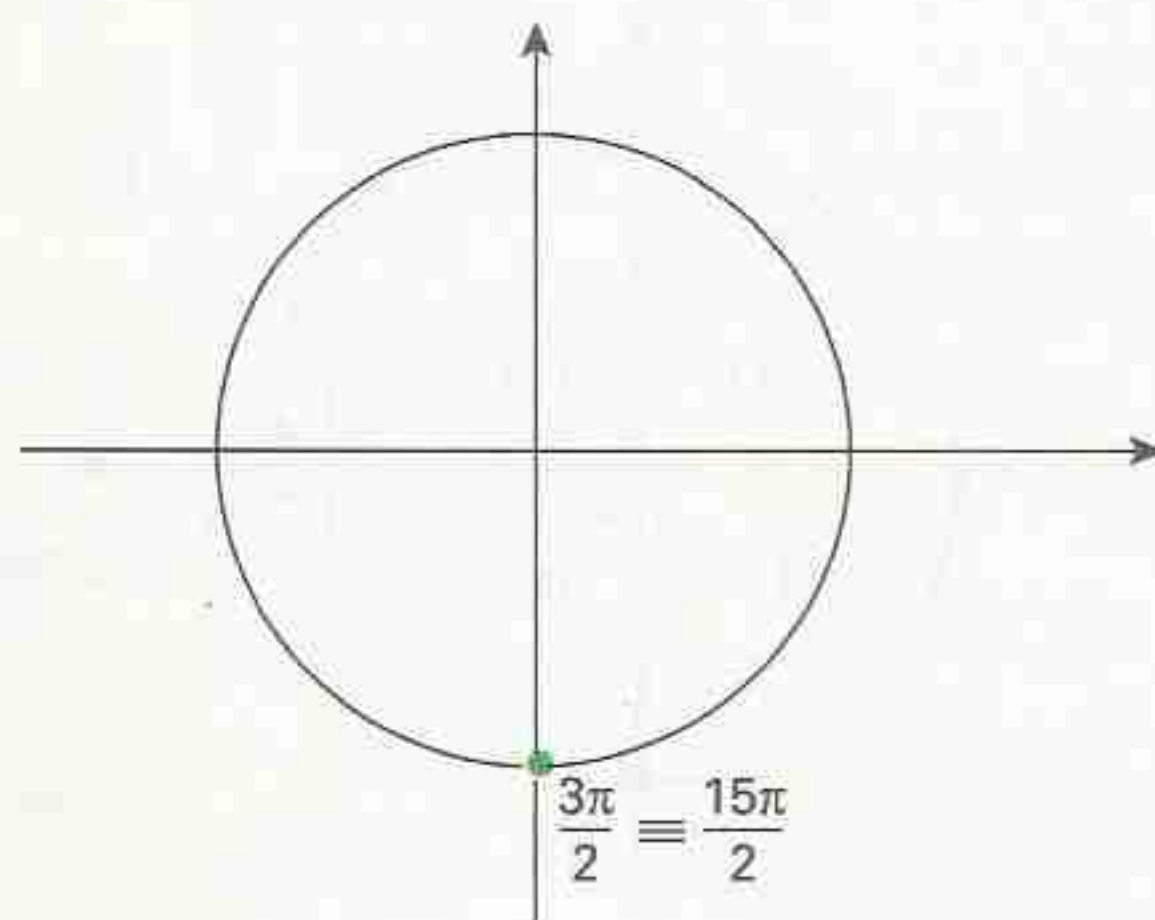
R.5 Determinar a medida x do arco da primeira volta positiva ($0 \leq x < 2\pi$) que possui a mesma extremidade do arco de $\frac{15\pi}{2}$ rad.

Resolu44o

Como no exerc4cio anterior, vamos eliminar as voltas completas de $\frac{15\pi}{2}$ rad. Para isso vamos transformar esse arco numa soma de dois outros tal que um deles seja o total de voltas completas contidas em $\frac{15\pi}{2}$ rad.

$$\text{Isto 4, } \frac{15\pi}{2} = \underbrace{\frac{12\pi}{2}}_{\text{tr4s voltas completas}} + \frac{3\pi}{2}$$

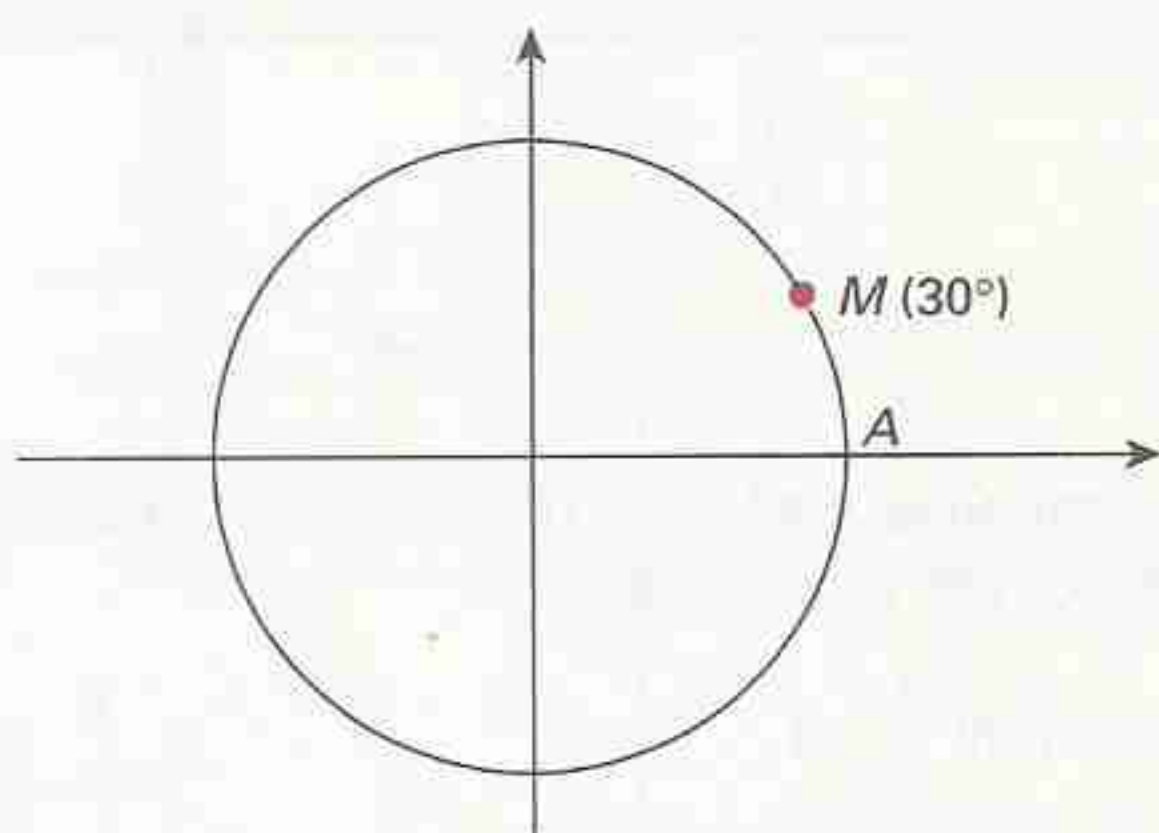
Logo, $x = \frac{3\pi}{2}$. Dizemos que $\frac{3\pi}{2}$ 4 c4ngruo a $\frac{15\pi}{2}$.



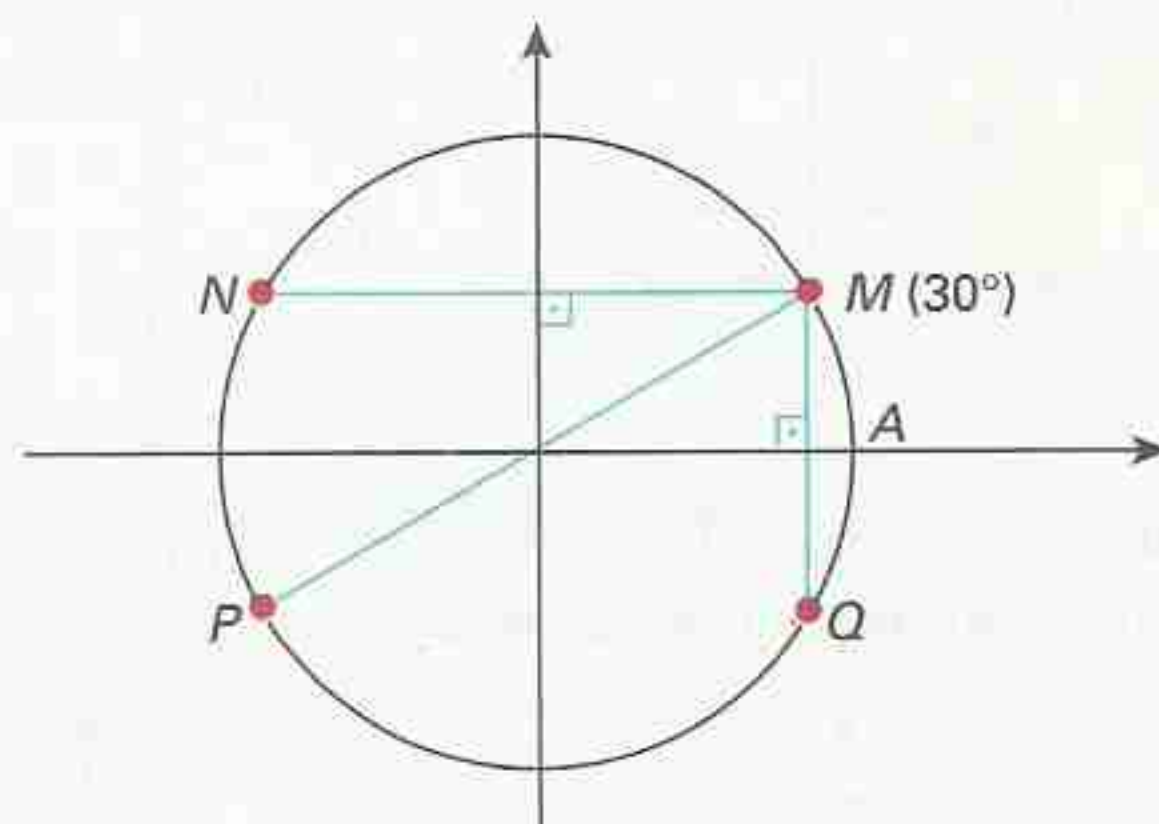
6. SIMETRIAS

É muito útil sabermos relacionar medidas de arcos trigonométricos com extremidades simétricas em relação a um dos eixos coordenados ou à origem do sistema cartesiano, pois isso nos ajudará, mais adiante, a calcular os senos e os co-senos desses arcos.

Consideremos, por exemplo, o ponto M da figura abaixo associado à medida 30° .

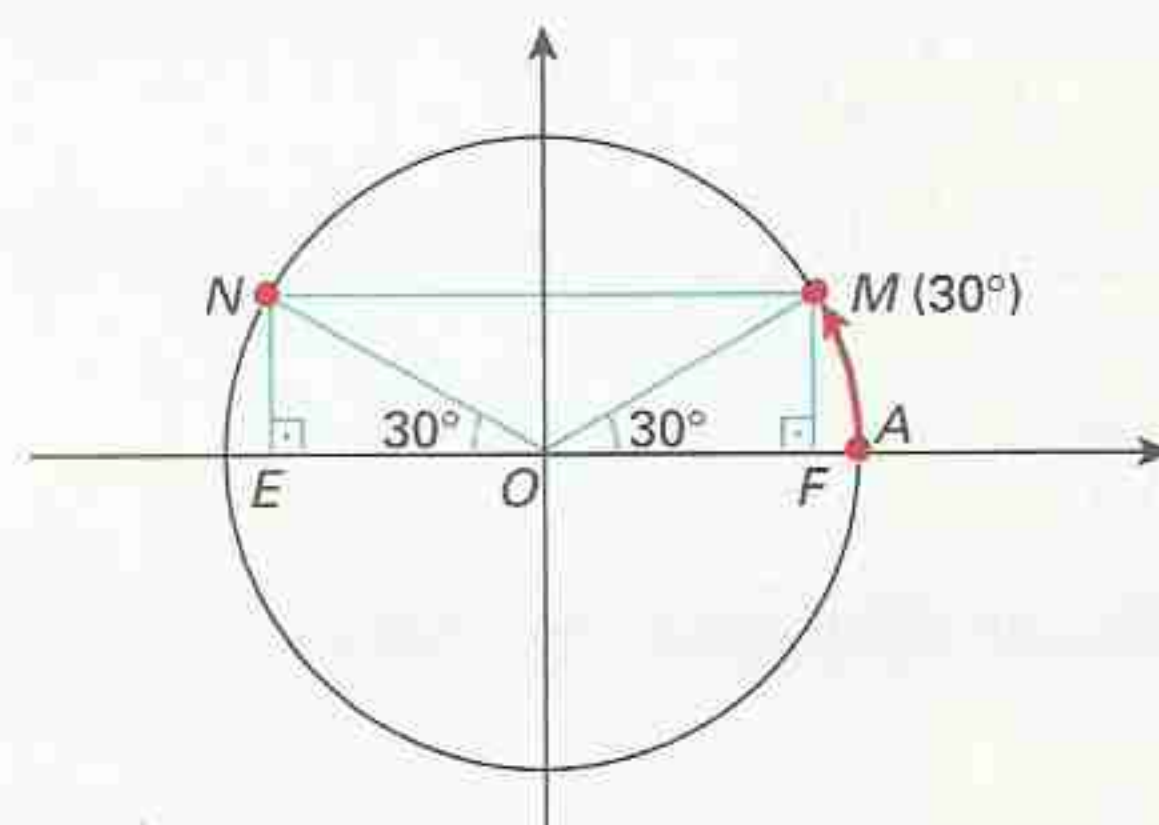


Pelo ponto M , tracemos três retas: a perpendicular ao eixo das ordenadas, a que passa pela origem do sistema e a perpendicular ao eixo das abscissas. Essas retas interceptam a circunferência nos pontos N , P e Q , respectivamente.

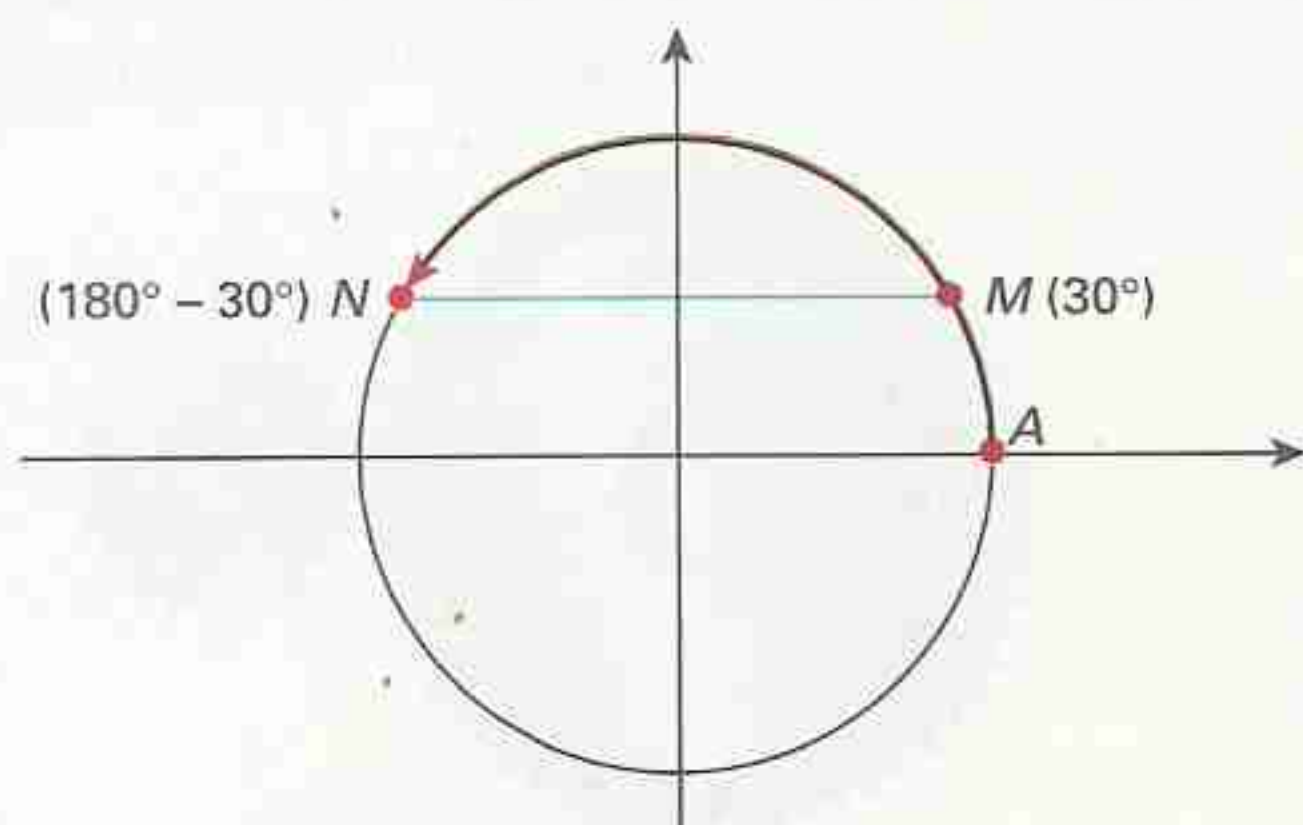


Os pontos N , P e Q são chamados de **simétricos** (ou correspondentes) do ponto M .

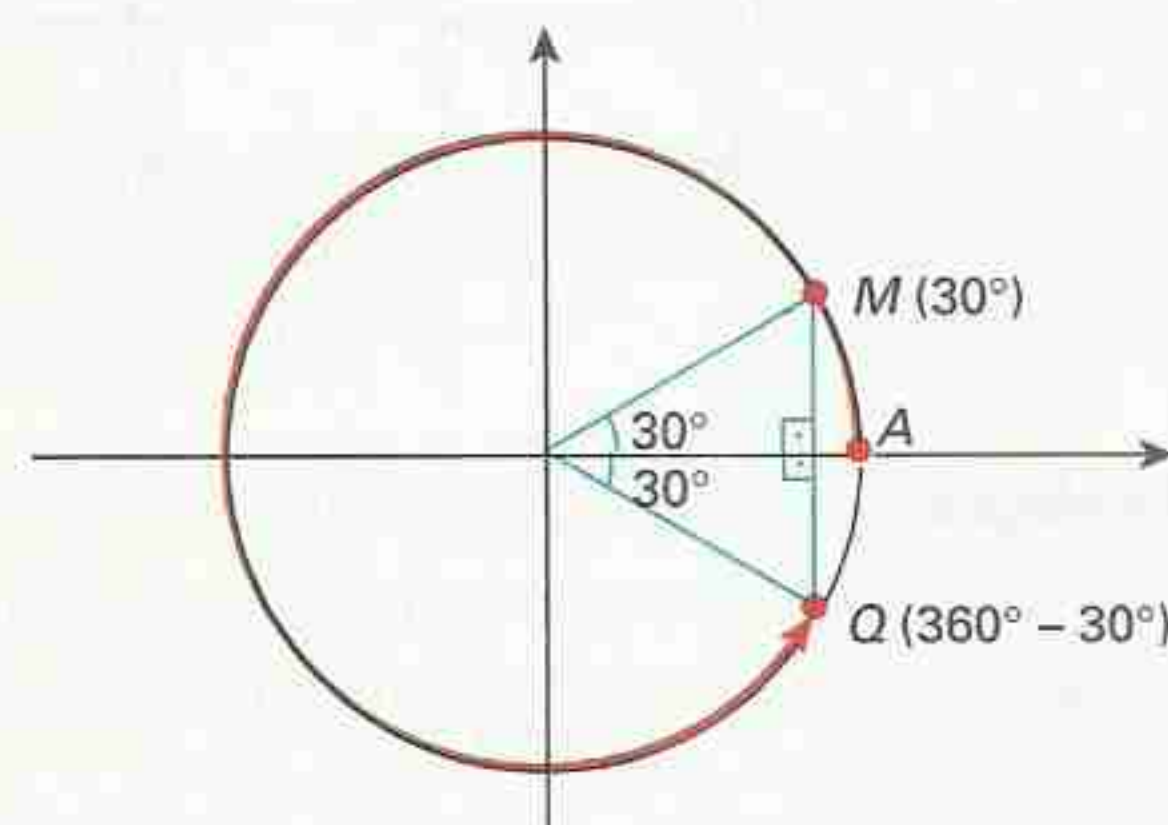
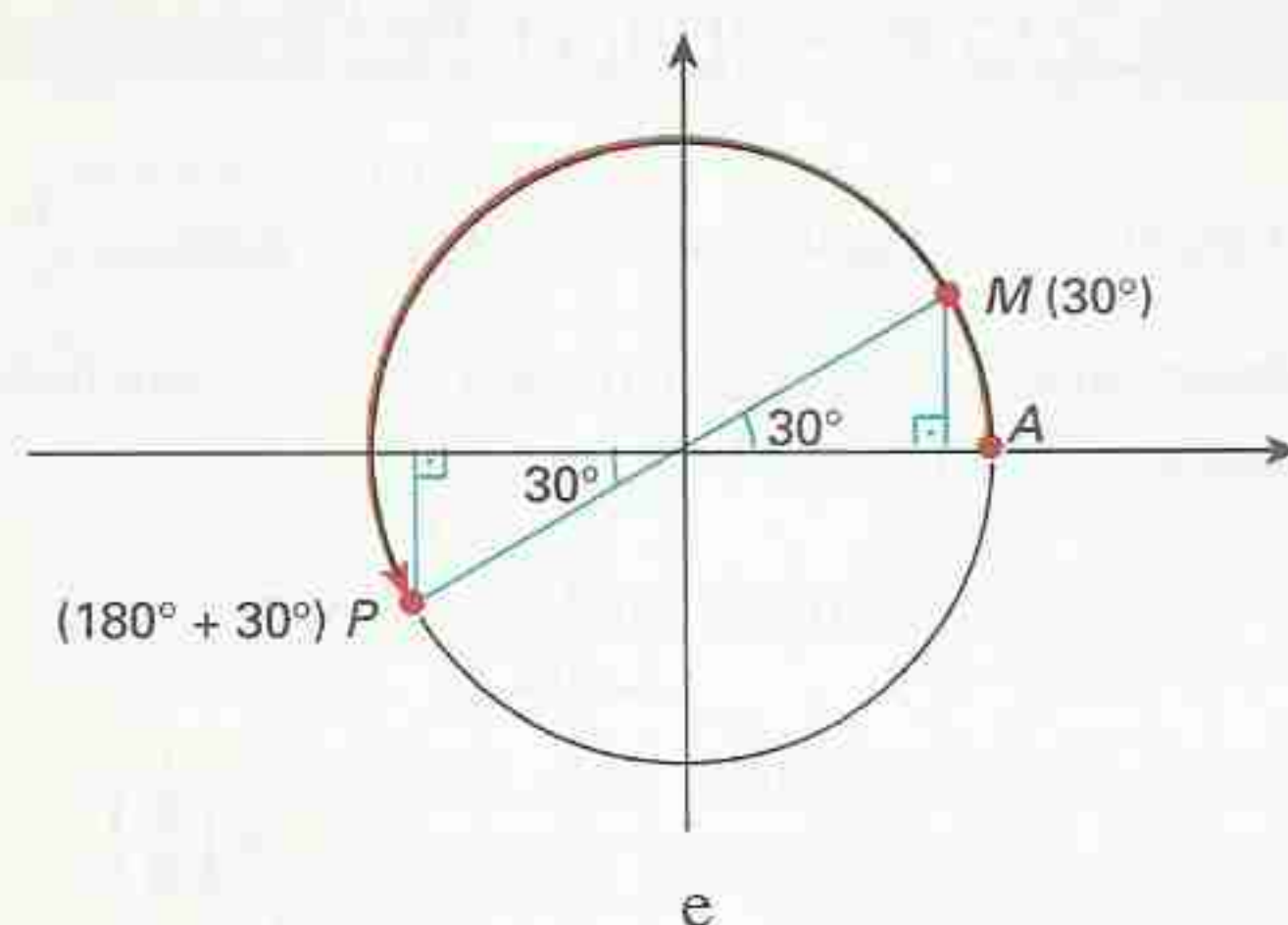
Determinemos as medidas x ($0^\circ \leq x < 360^\circ$) associadas aos pontos N , P e Q .



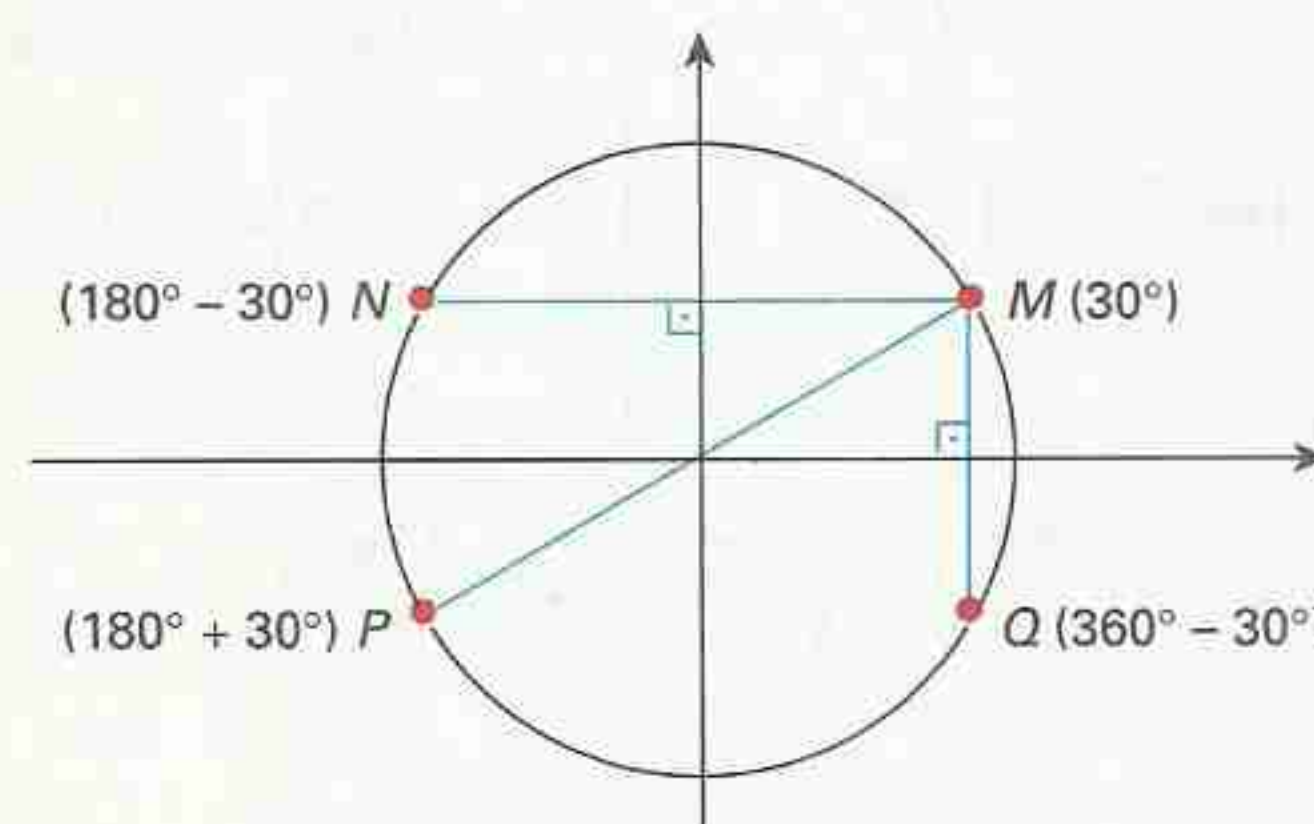
Os ângulos \widehat{NOE} e \widehat{MOF} têm a mesma medida (pois os triângulos NOE e MOF são congruentes). Logo, o arco trigonométrico \widehat{AN} mede $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.



Analogamente, temos:

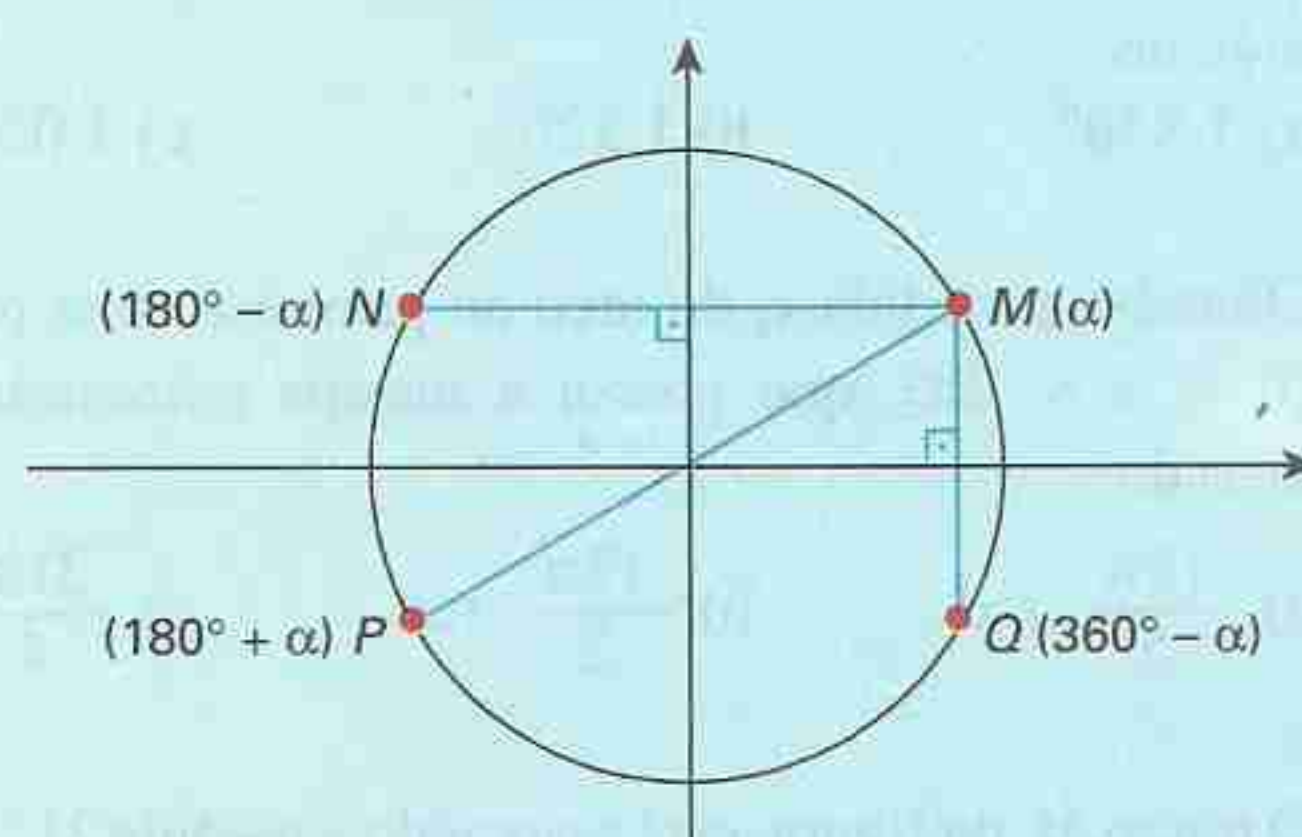


Resumindo:

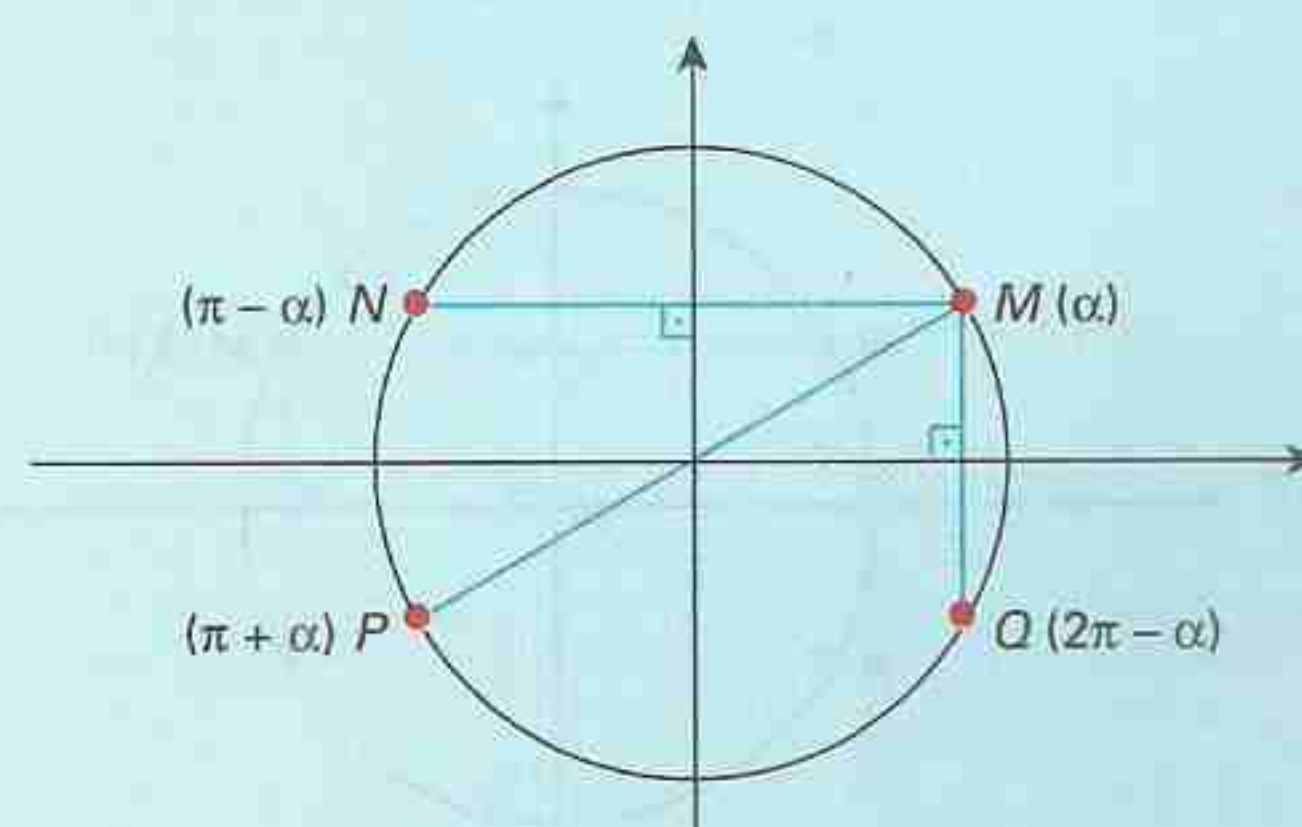


Generalizando o resultado anterior, temos:

I. Sendo α uma medida em graus:



II. Sendo α uma medida em radianos:

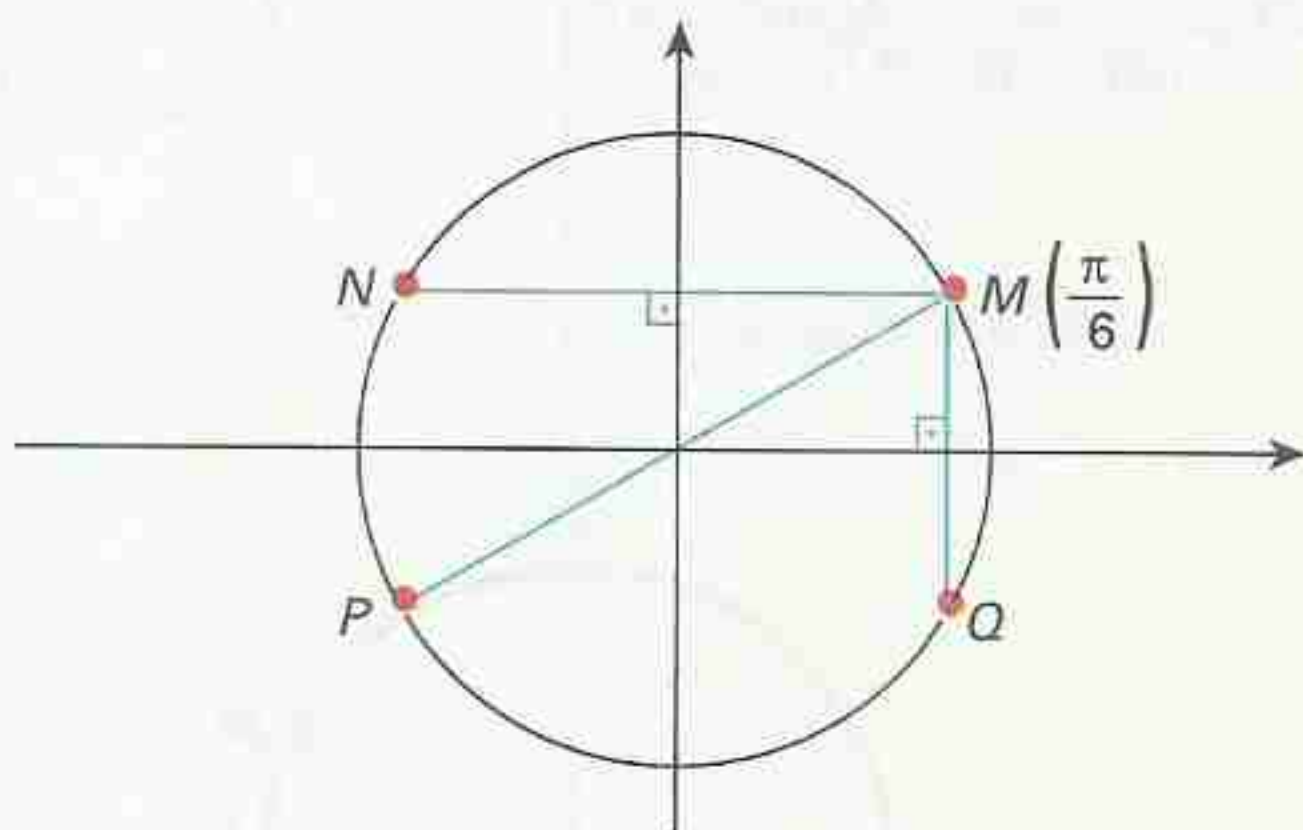




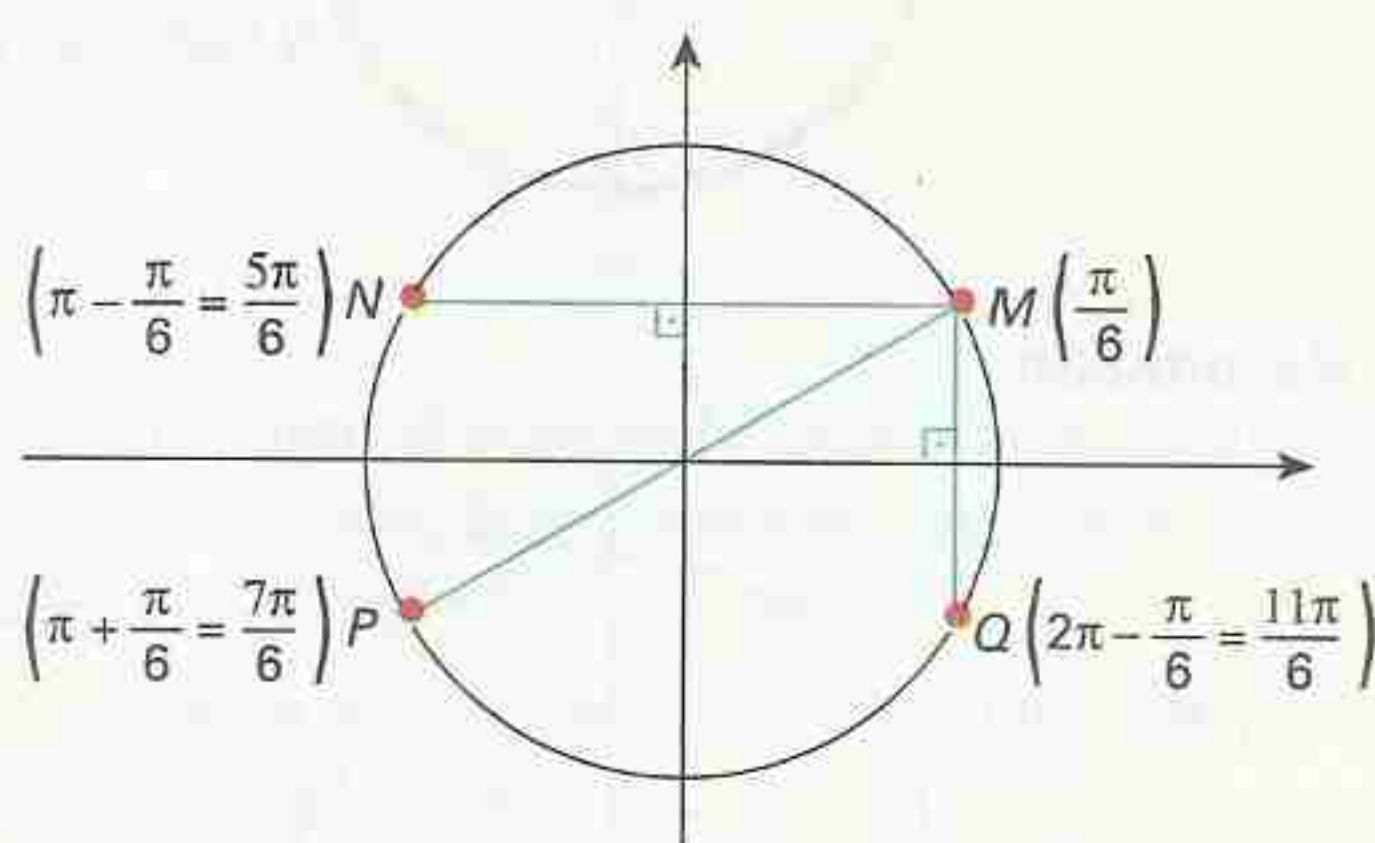
EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.6 O ponto M da figura está associado à medida $\frac{\pi}{6}$ rad.

Determinar as medidas x ($0 \leq x < 2\pi$) associadas aos pontos N , P e Q .



Resolução



Logo, $N\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $P\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ e $Q\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.



EXERCÍCIOS BÁSICOS

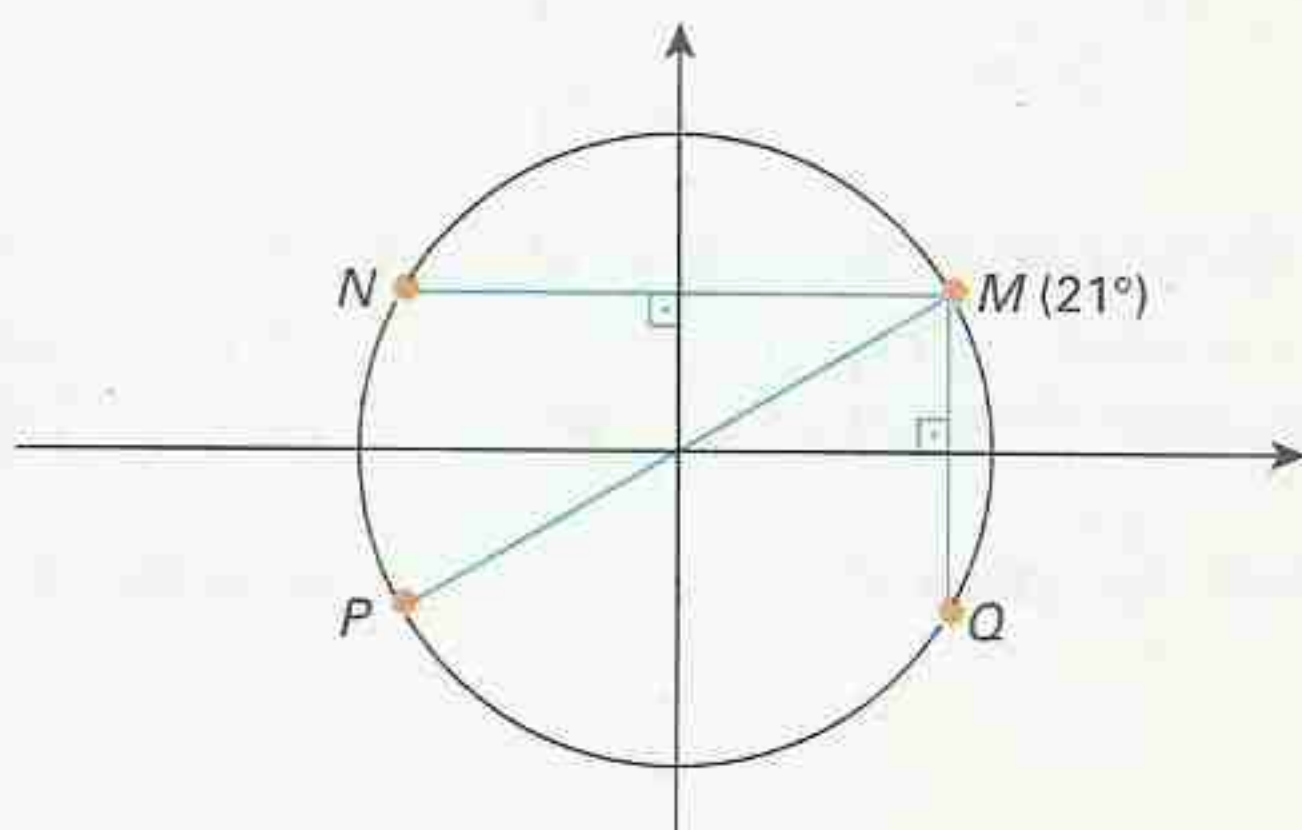
B.5 Determine a medida x , do arco da primeira volta positiva ($0^\circ \leq x < 360^\circ$), que possui a mesma extremidade do arco de:

- a) 1.850° b) 1.320° c) 1.020°

B.6 Obtenha a medida x , do arco da primeira volta positiva ($0 \leq x < 2\pi$), que possui a mesma extremidade do arco de:

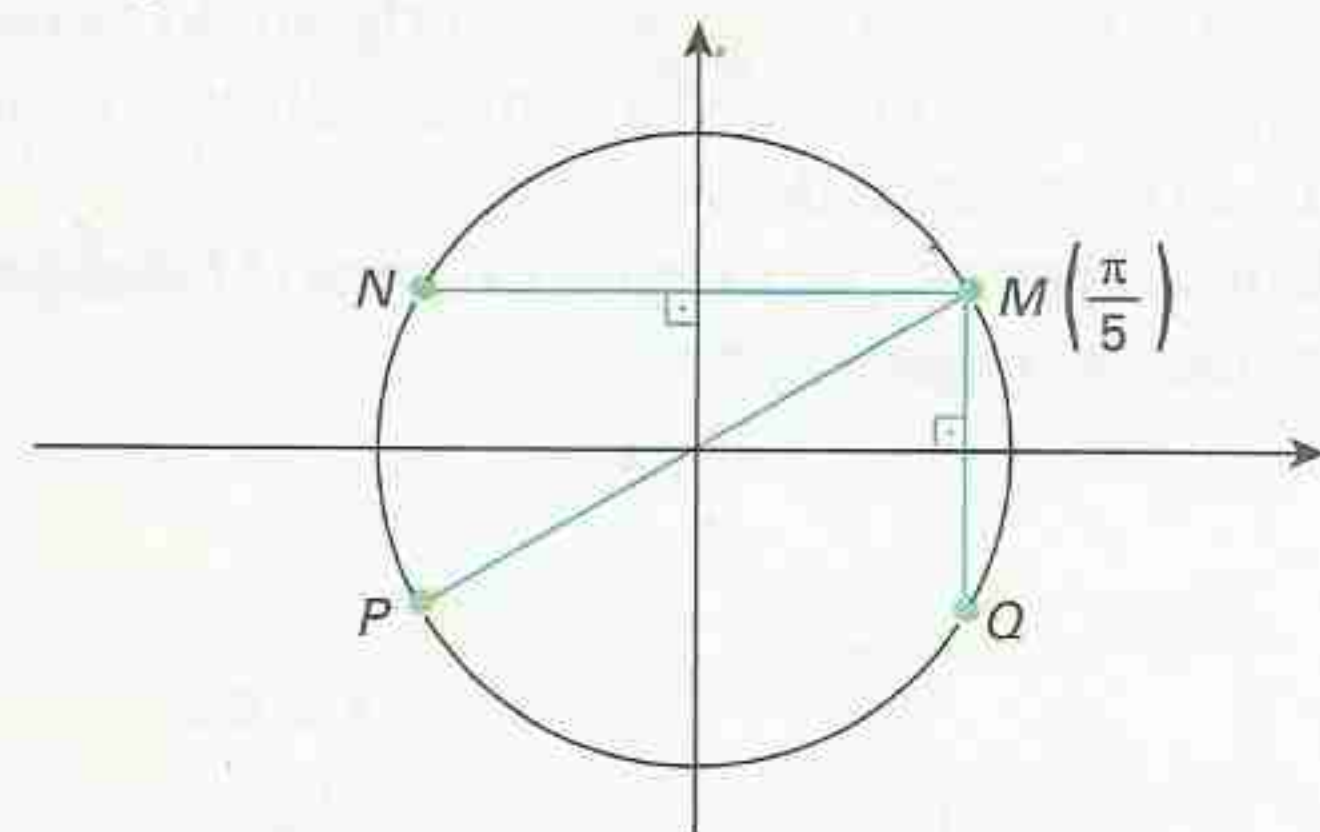
- a) $\frac{18\pi}{5}$ rad b) $\frac{13\pi}{2}$ rad c) $\frac{21\pi}{4}$ rad

B.7 O ponto M , da figura, está associado à medida 21° . Quais são as medidas x ($0^\circ \leq x < 360^\circ$) associadas aos pontos N , P e Q ?

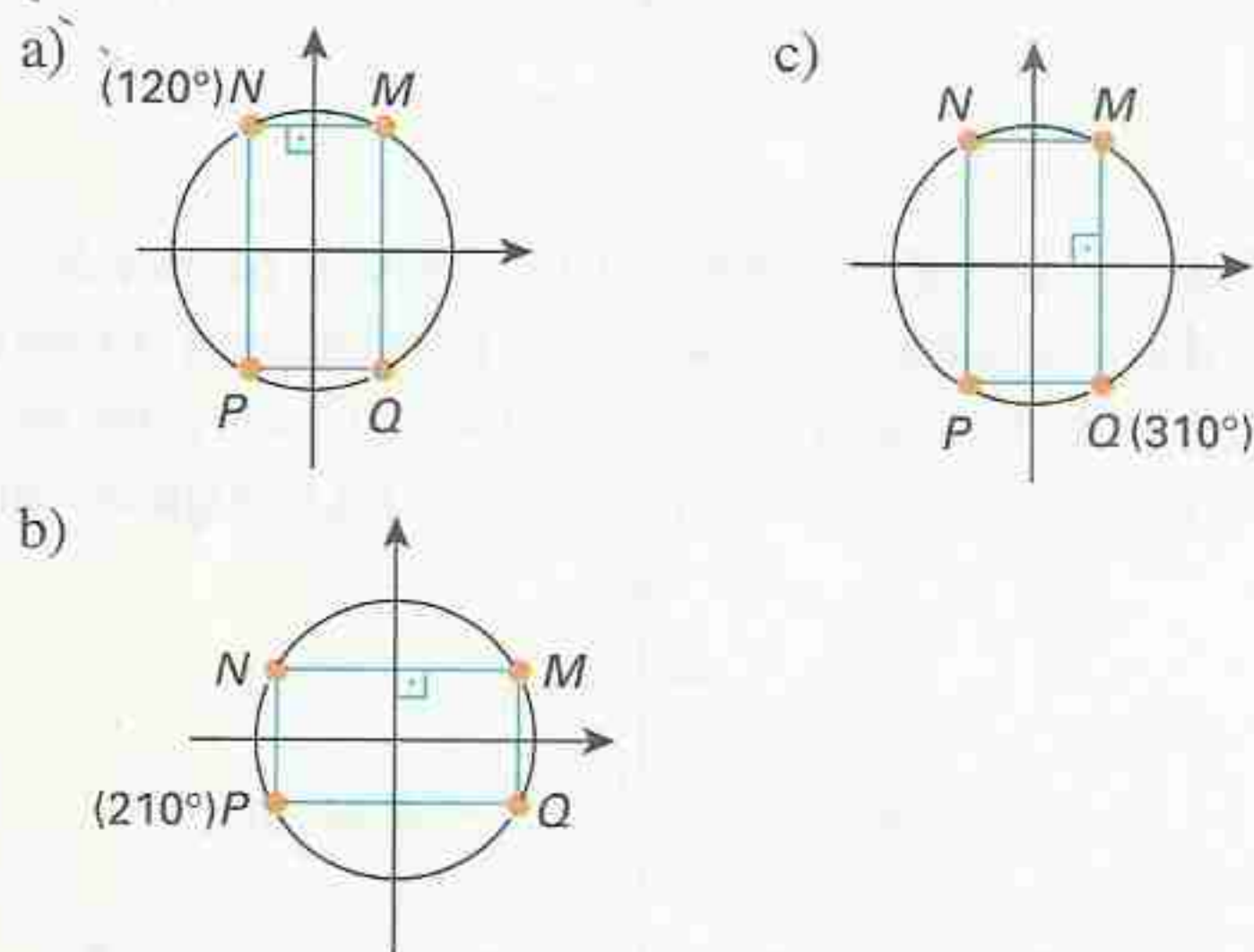


B.8 O ponto M , da figura, está associado à medida $\frac{\pi}{5}$ rad.

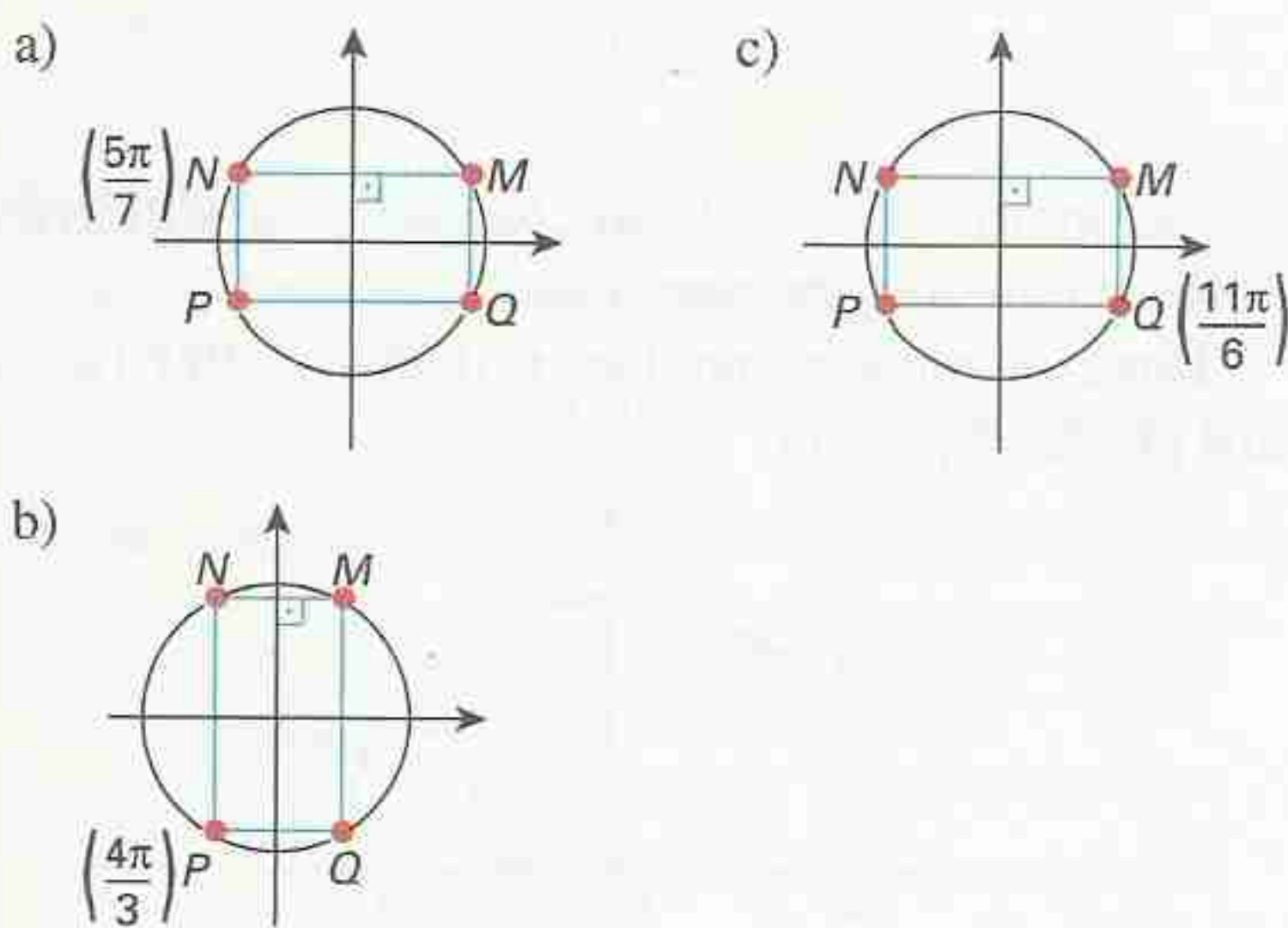
Calcule as medidas x ($0 \leq x < 2\pi$) associadas aos pontos N , P e Q .



B.9 Determine as medidas x ($0^\circ \leq x < 360^\circ$) associadas aos vértices dos retângulos:



B.10 Quais são as medidas x ($0 \leq x < 2\pi$) associadas aos vértices dos retângulos abaixo?

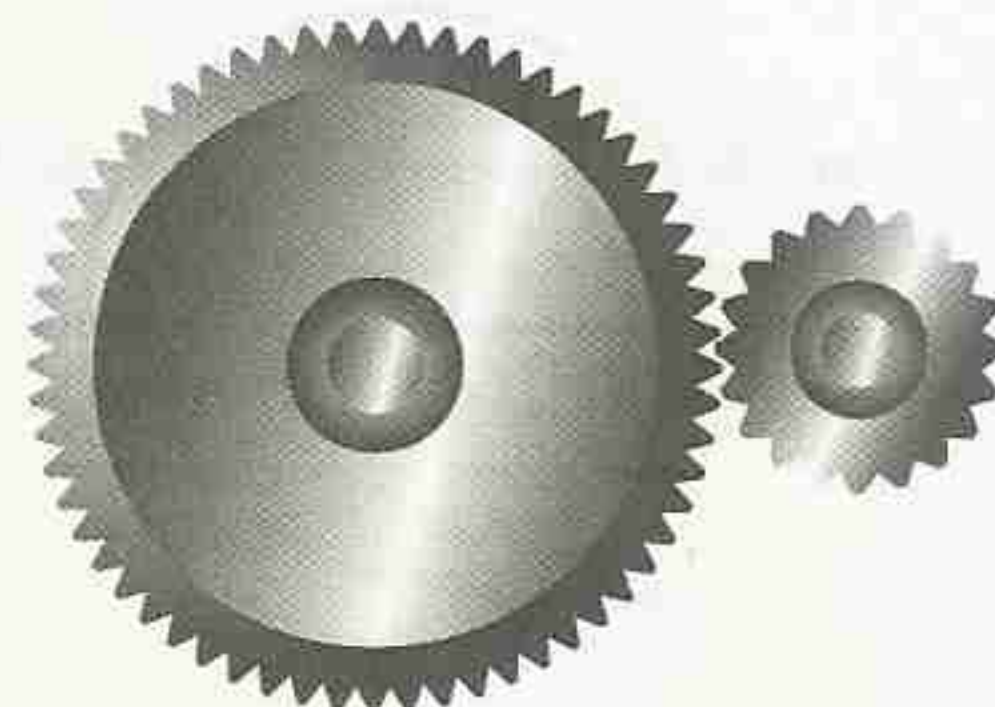


Exercícios complementares de C.4 a C.9



EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

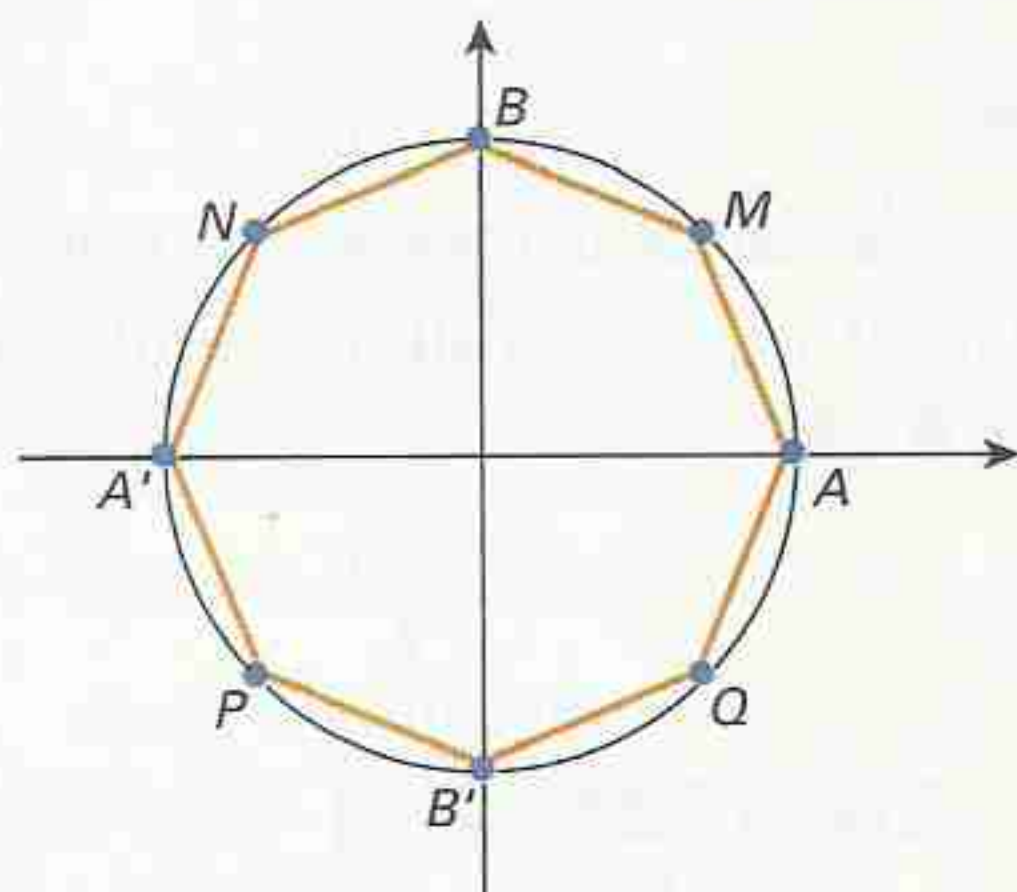
C.1 Duas rodas dentadas, com sessenta dentes a maior e vinte dentes a menor, estão engrenadas entre si. Quando a maior girar 32π rad, quantas voltas dará a menor?



C.2 (Fuvest-SP) Quantos graus mede, aproximadamente, um arco de $0,105 \text{ rad}$?

C.3 (UnB-DF) Quanto mede em radianos um arco de $2^\circ 15'$?
Sugestão. Transforme $15'$ em grau.

C.4 O polígono $AMBNA'PB'Q$, abaixo, é um octógono regular. Determine os valores x , $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, associados aos pontos A, M, B, N, A', P, B', Q .



C.5 Se α e β são duas medidas, em graus, associadas a um mesmo ponto da circunferência trigonométrica, então podemos afirmar que:

- a) $\alpha = \beta$
- b) $\alpha = \beta + 360^\circ$
- c) $\alpha = \beta + 2 \cdot 360^\circ$
- d) $\alpha = \beta - 2 \cdot 360^\circ$
- e) $\alpha = \beta + k \cdot 360^\circ$, para algum k , $k \in \mathbb{Z}$

C.6 Se α e β são duas medidas, em radianos, associadas a um mesmo ponto da circunferência trigonométrica, então podemos afirmar que:

- a) $\alpha = \beta$
- b) $\alpha = \beta + 2\pi$
- c) $\alpha = \beta + 4\pi$
- d) $\alpha = \beta - 2\pi$
- e) $\alpha = \beta + k \cdot 2\pi$, para algum k , $k \in \mathbb{Z}$

C.7 Qual é a medida x do arco da primeira volta positiva ($0^\circ \leq x < 360^\circ$) que possui a mesma extremidade do arco de -40° ?

C.8 Determine a medida x do arco da primeira volta positiva ($0^\circ \leq x < 360^\circ$) que possui a mesma extremidade do arco de -1.110° .

C.9 (UFCE) Dois arcos trigonométricos são congruos se, e somente se, têm a mesma extremidade. Qual das medidas abaixo é de um arco congruo ao arco trigonométrico de

$$\frac{\pi}{7} \text{ rad?}$$

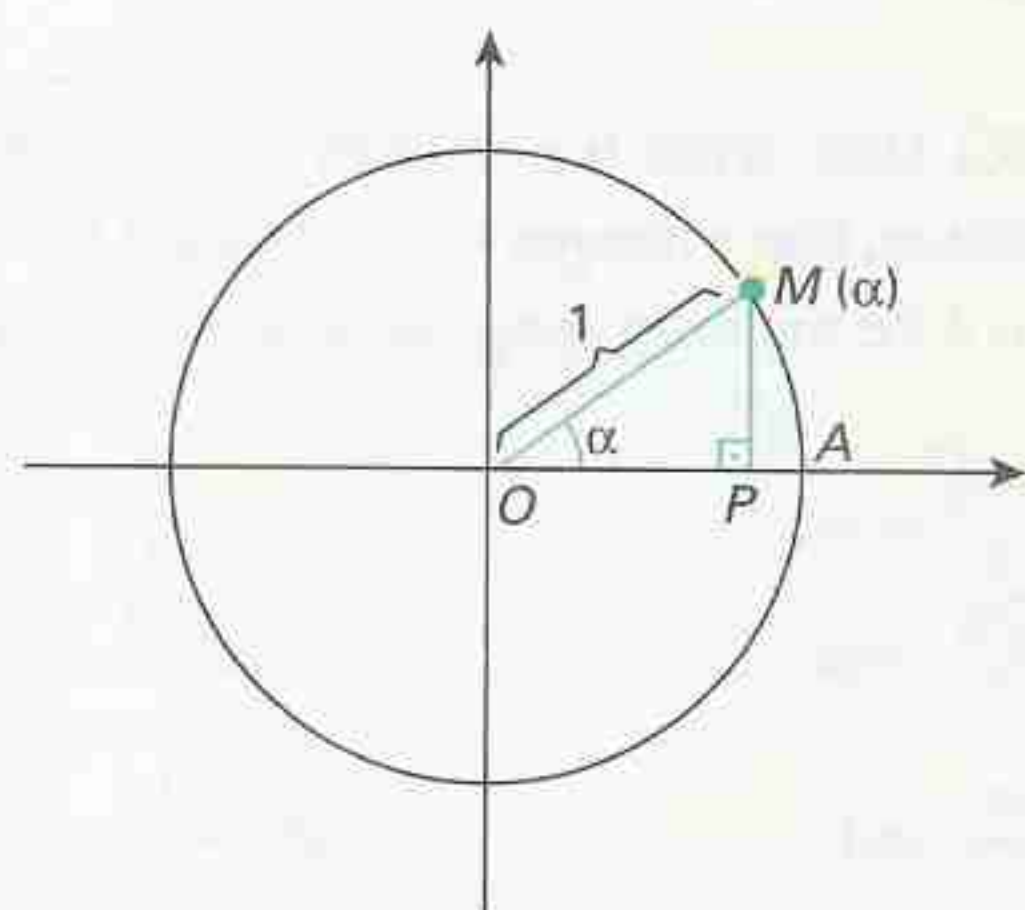
- a) $\frac{22\pi}{7} \text{ rad}$
- b) $\frac{6\pi}{7} \text{ rad}$
- c) $\frac{8\pi}{7} \text{ rad}$
- d) $\frac{29\pi}{7} \text{ rad}$
- e) $\frac{13\pi}{7} \text{ rad}$

Capítulo 28

SENO E CO-SENO DE UM ARCO TRIGONOMÉTRICO

1. EXTENSÕES DOS CONCEITOS DE SENO E CO-SENO

Consideremos na circunferência trigonométrica um arco \widehat{AM} de medida α , $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.



No triângulo retângulo OMP , temos:

$$\cos \alpha = \frac{OP}{1} = OP$$

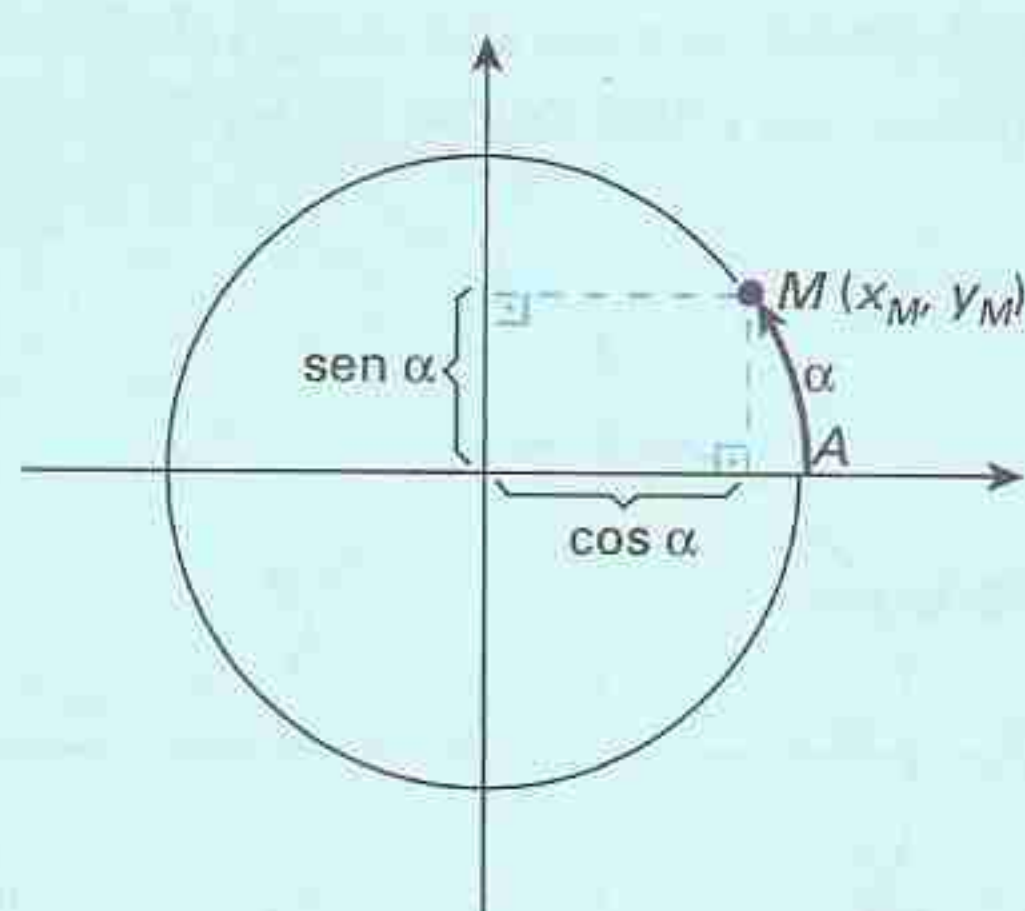
$$\sin \alpha = \frac{MP}{1} = MP$$

Note que as medidas OP e MP são, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto M .

Veremos a seguir como ampliar os conceitos de seno e de co-seno de um arco (ou ângulo) para qualquer arco trigonométrico.

Definição

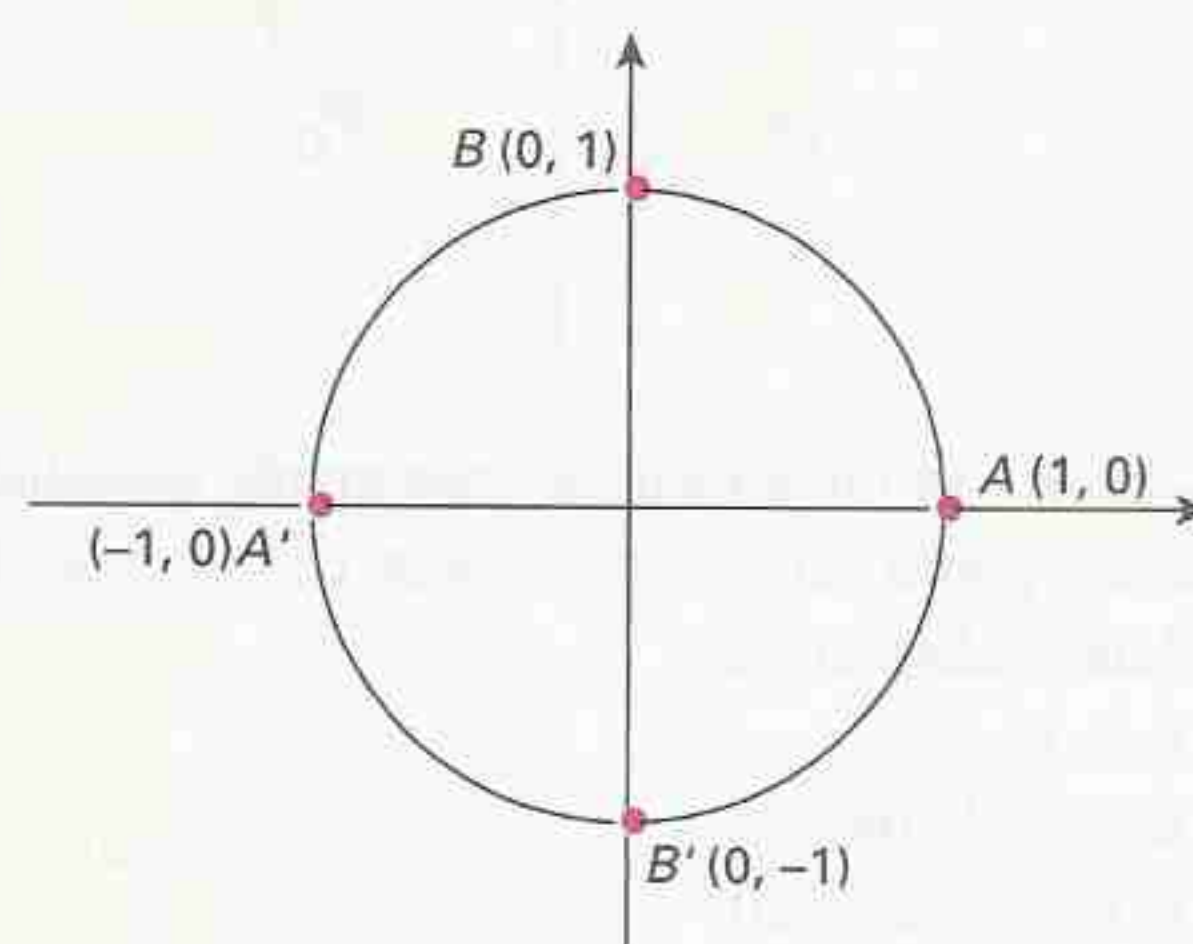
Dado um arco trigonométrico \widehat{AM} de medida α , chamam-se co-seno e seno de α a abscissa e a ordenada do ponto M , respectivamente:



- $\cos \alpha = \text{Abscissa de } M = x_M$
- $\sin \alpha = \text{Ordenada de } M = y_M$

Exemplo

Como o raio da circunferência trigonométrica é unitário (medida igual a 1), temos que as coordenadas dos pontos A , B , A' e B' são:

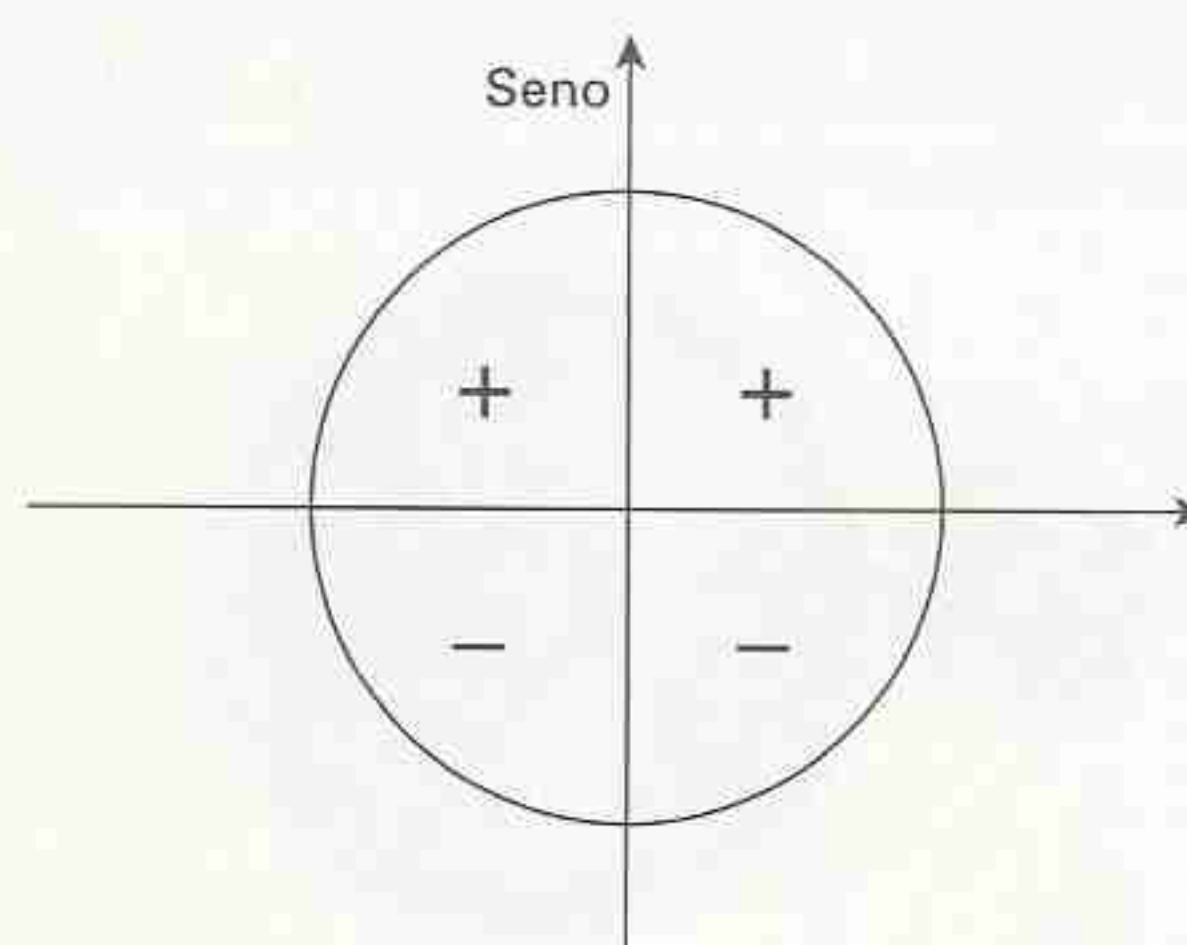


Note que:

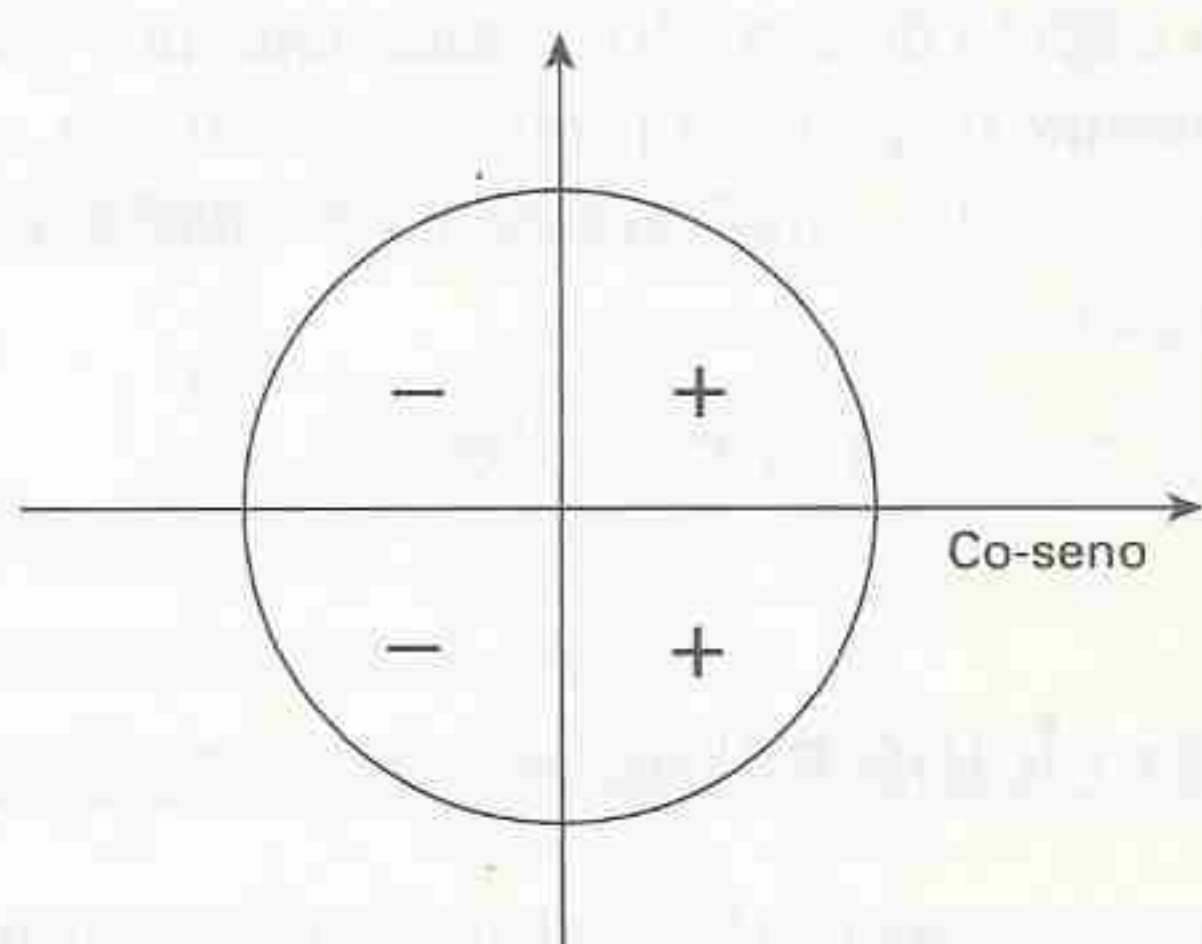
$\cos 0^\circ = x_A = 1$	$\sin 0^\circ = y_A = 0$
$\cos 90^\circ = x_B = 0$	$\sin 90^\circ = y_B = 1$
$\cos 180^\circ = x_{A'} = -1$	$\sin 180^\circ = y_{A'} = 0$
$\cos 270^\circ = x_{B'} = 0$	$\sin 270^\circ = y_{B'} = -1$
$\cos 360^\circ = x_A = 1$	$\sin 360^\circ = y_A = 0$

2. VARIAÇÃO DE SINAL DO SENO E DO CO-SENO

I. O seno de um arco é a ordenada da extremidade desse arco. Como os pontos de ordenadas positivas são os do 1º e os do 2º quadrante e os pontos de ordenadas negativas são os do 3º e os do 4º quadrante, temos o seguinte quadro de sinais para o seno:



II. O co-seno de um arco é a abscissa da extremidade desse arco. Como os pontos de abscissas positivas são os do 1º e os do 4º quadrante e os pontos de abscissas negativas são os do 2º e os do 3º quadrante, temos o seguinte quadro de sinais para o co-seno:



3. REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

O objetivo desse estudo é relacionar o seno e o co-seno de um arco do 2º, do 3º ou do 4º quadrante com o seno e o co-seno do arco correspondente no 1º quadrante. Para exemplificar, utilizaremos a tabela dos arcos notáveis:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Observe que essa tabela apresenta senos e co-senos de alguns arcos do 1º quadrante. Vejamos como utilizá-la nos demais quadrantes.

Redução do 2º para o 1º quadrante

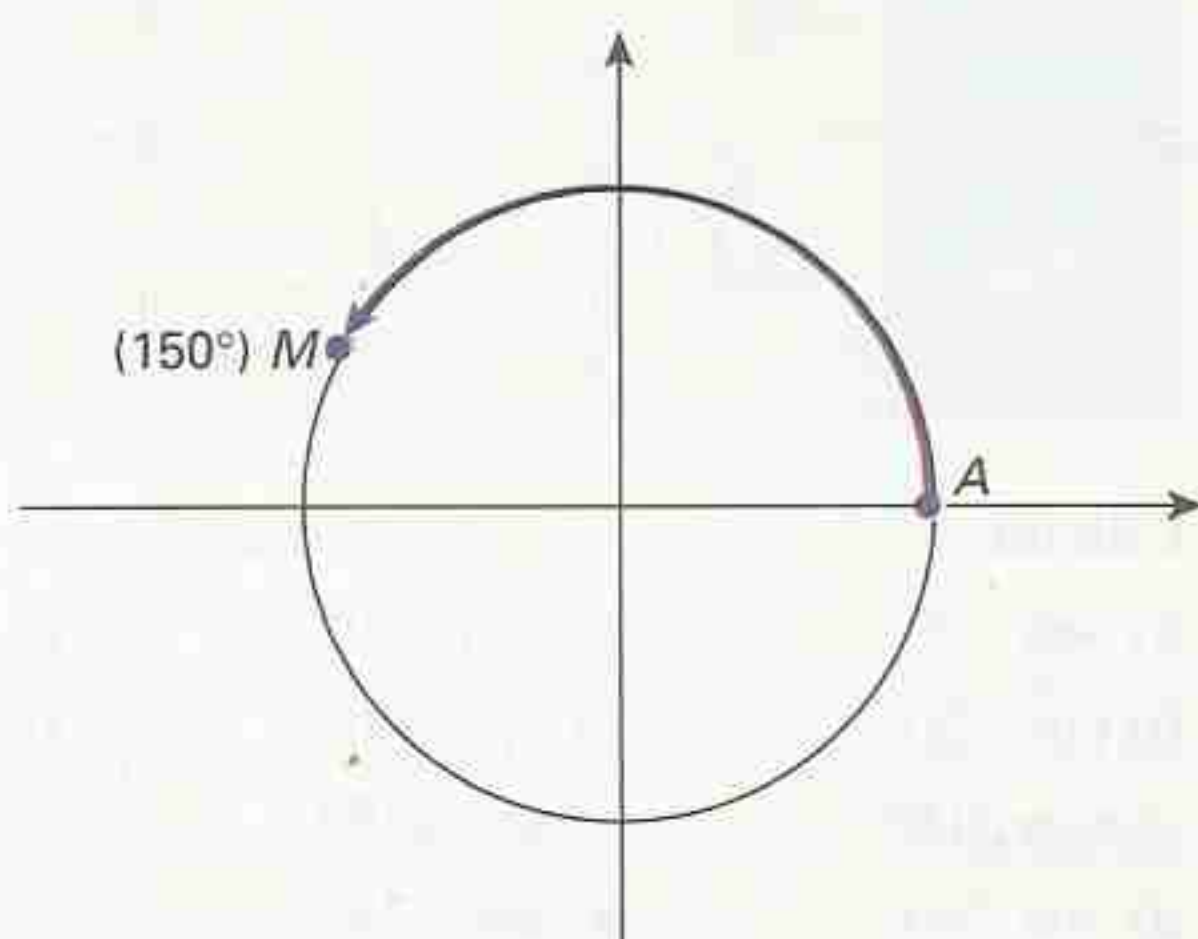


EXERCÍCIO RESOLVIDO

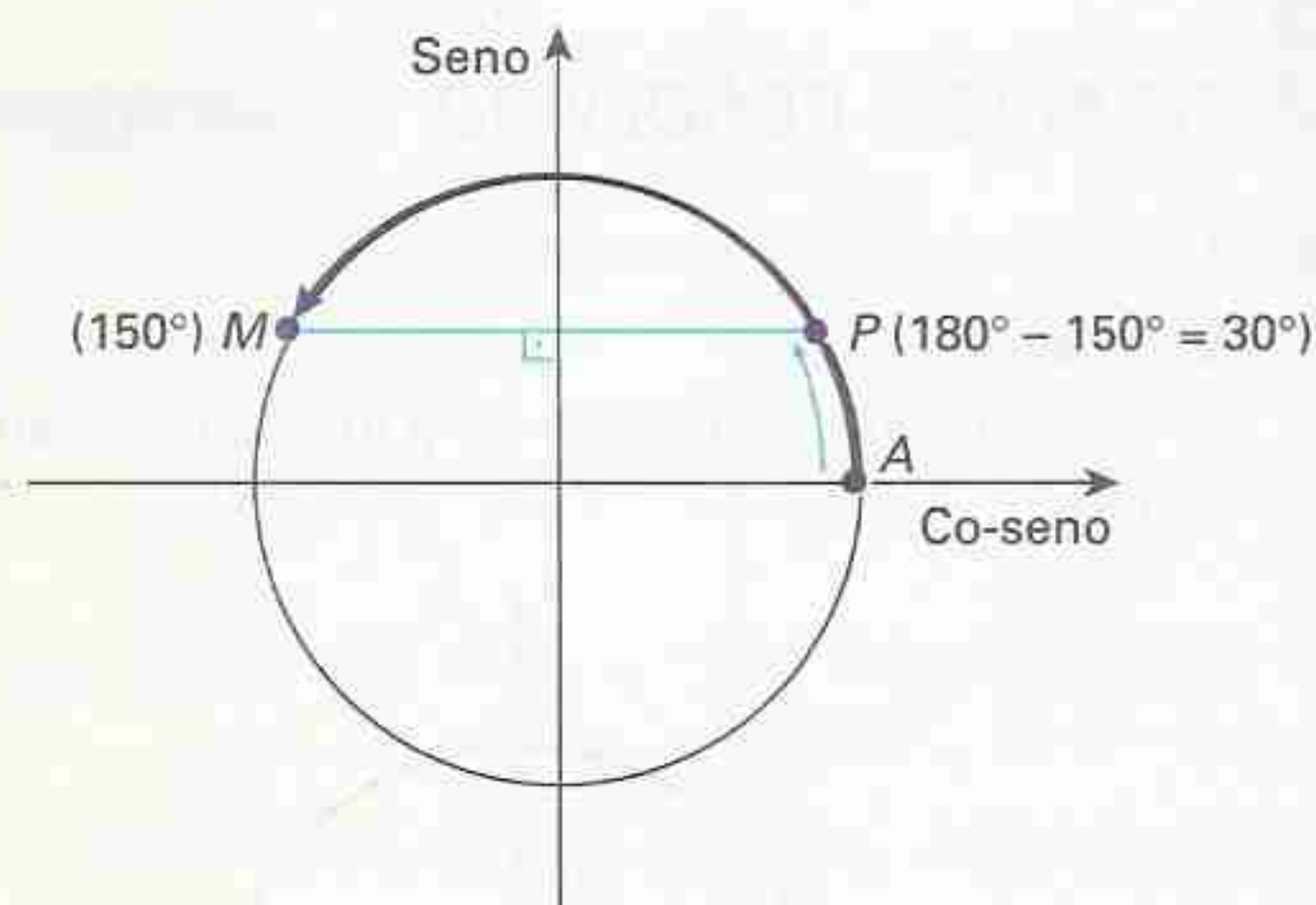
R.1 Calcular $\sin 150^\circ$ e $\cos 150^\circ$.

Resolução

A extremidade M do arco de 150° pertence ao 2º quadrante:



Traçando por M a perpendicular ao eixo dos senos, obtemos o ponto P , correspondente de M no 1º quadrante, conforme figura abaixo.



Os pontos M e P têm ordenadas iguais e abscissas opostas.

Logo, temos $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ e

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Redução do 3º para o 1º quadrante

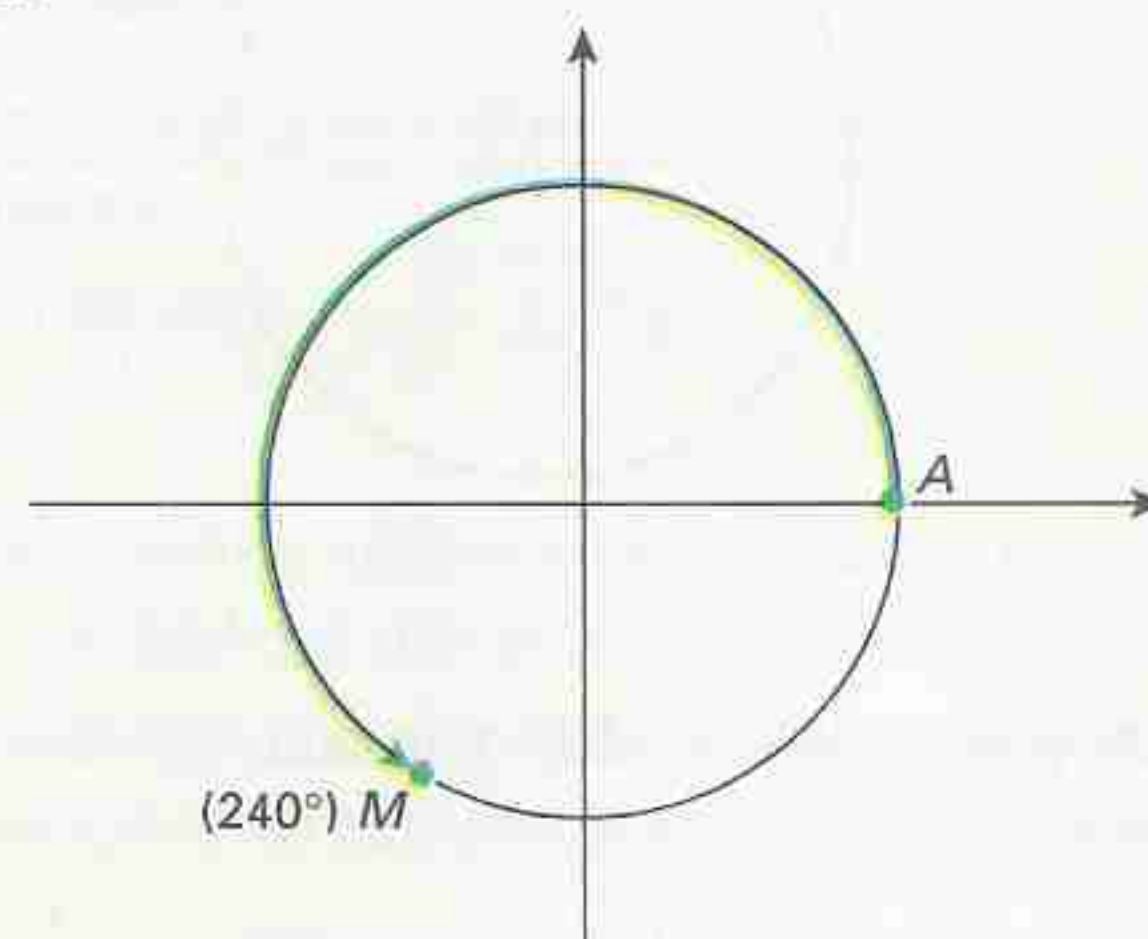


EXERCÍCIO RESOLVIDO

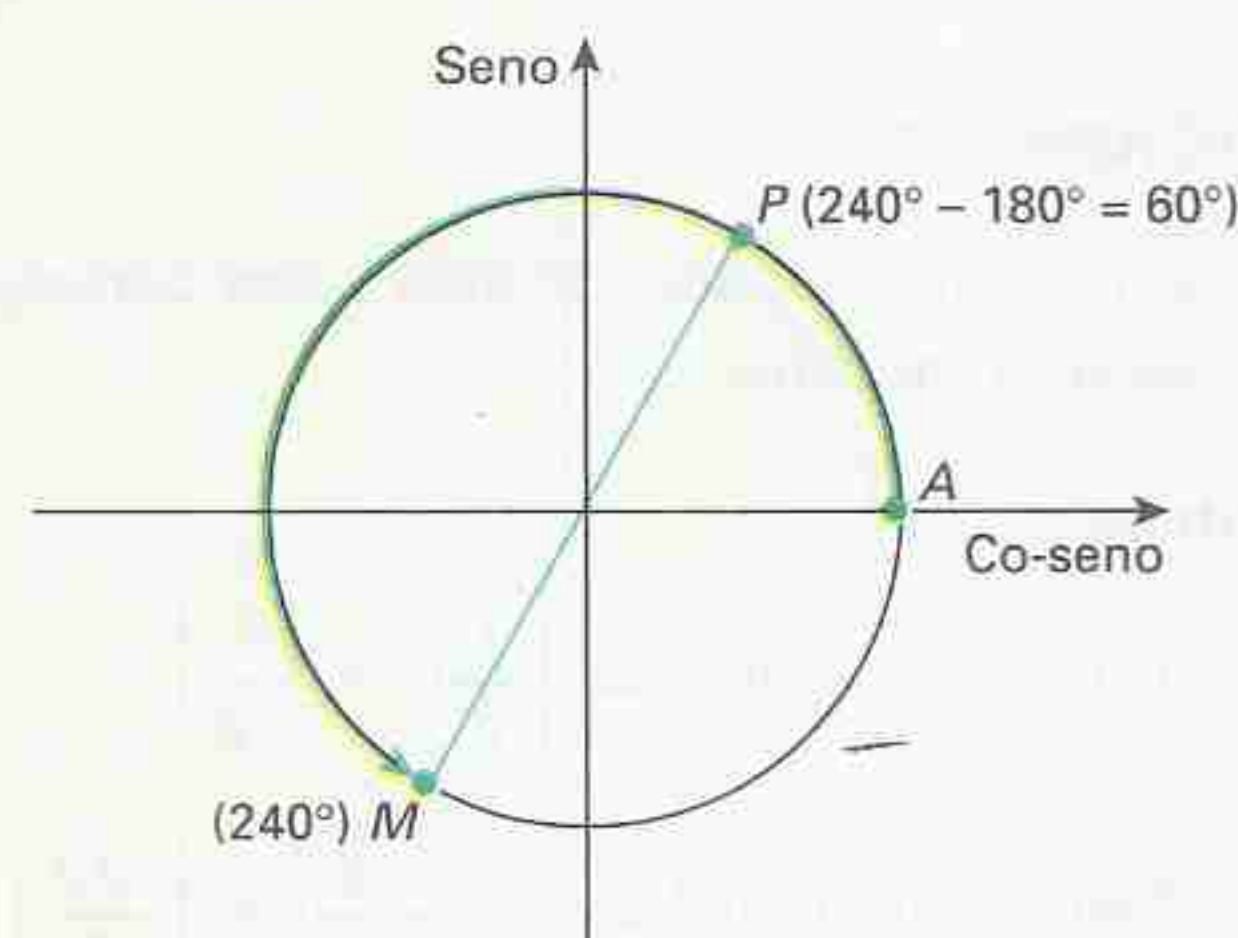
R.2 Calcular $\sin 240^\circ$ e $\cos 240^\circ$.

Resolução

A extremidade M do arco de 240° pertence ao 3º quadrante:



Traçando por M a reta que passa pelo centro da circunferência, obtemos o ponto P , correspondente de M no 1º quadrante, conforme figura abaixo.



Os pontos M e P têm ordenadas opostas e abscissas opostas.

Temos, então, $\sin 240^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e

$$\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Redução do 4º para o 1º quadrante

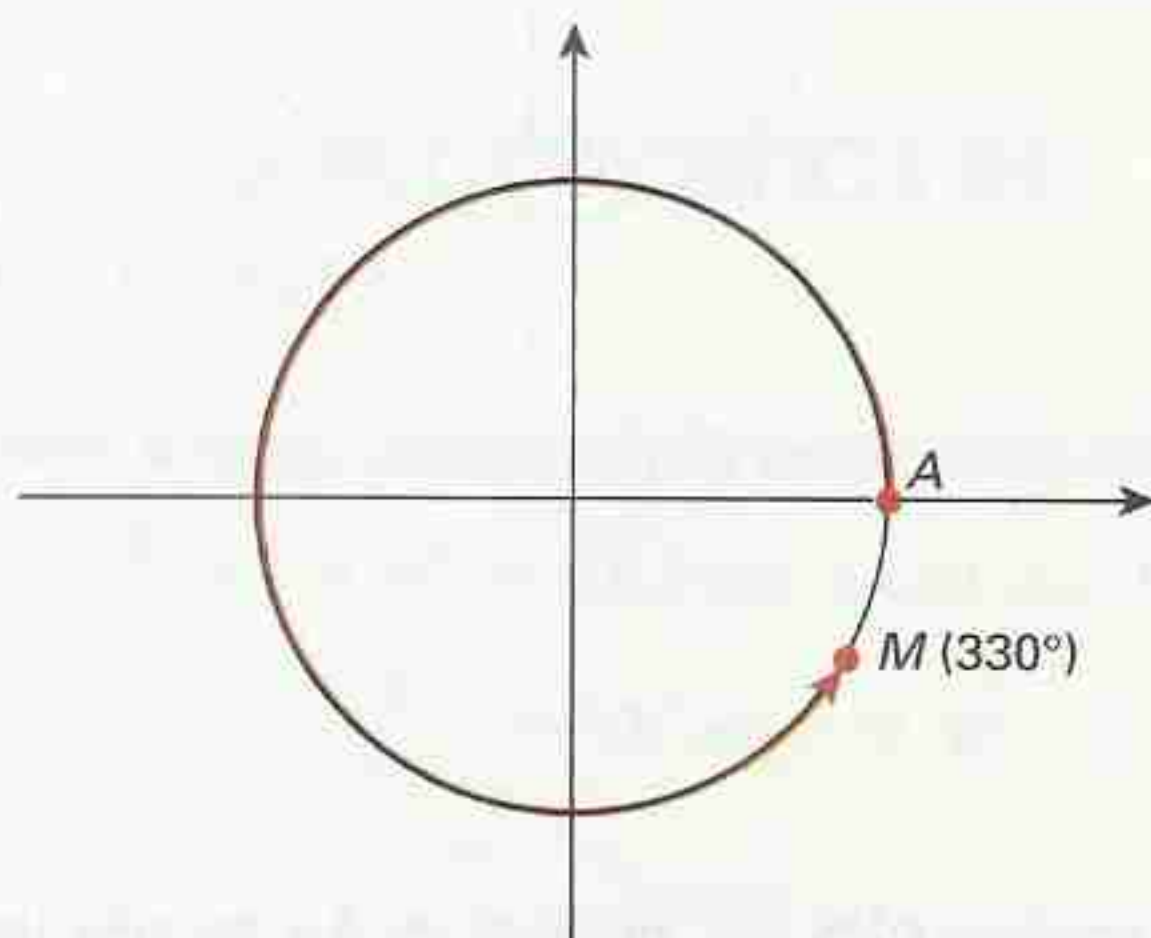


EXERCÍCIO RESOLVIDO

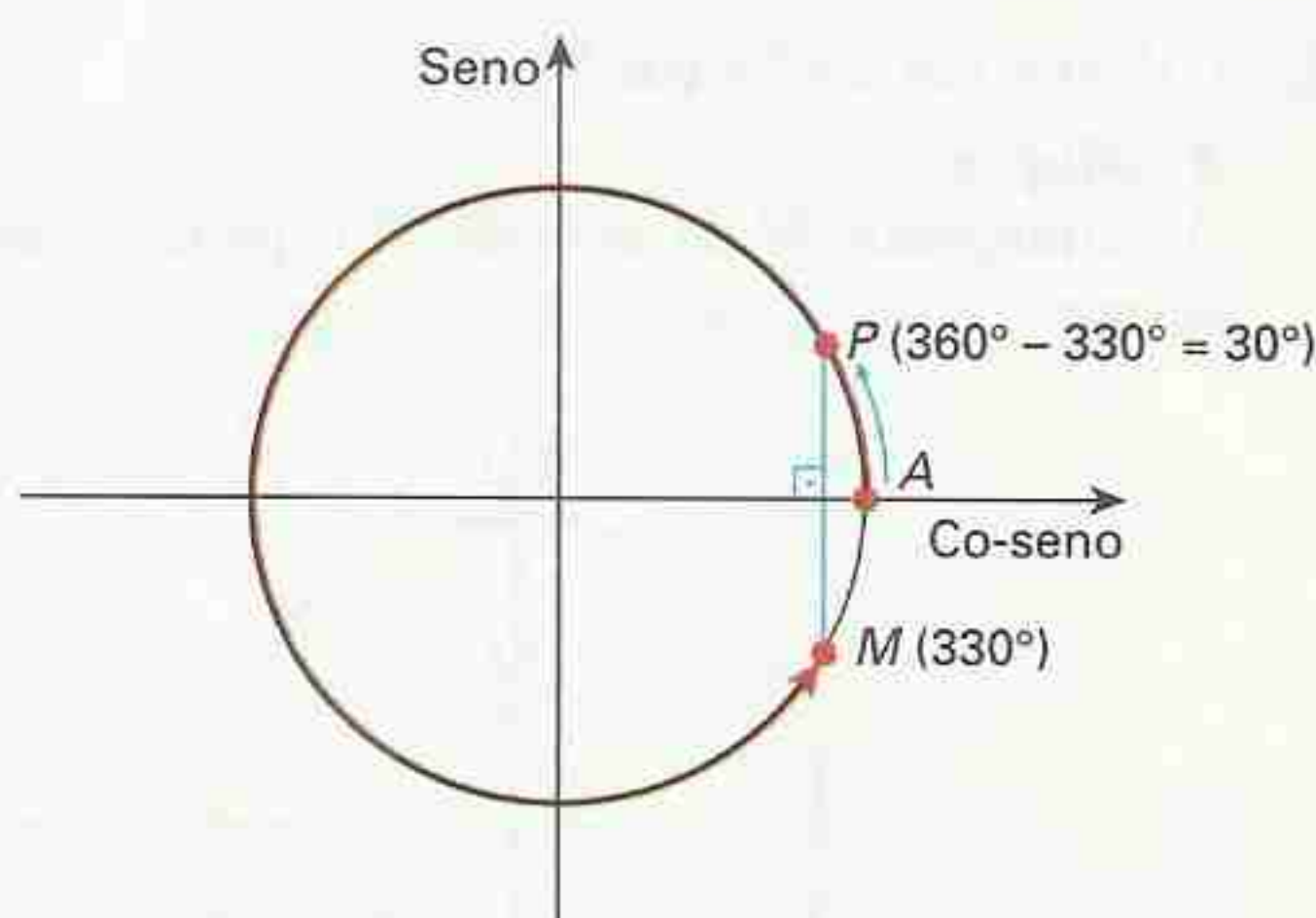
R.3 Calcular $\sin 330^\circ$ e $\cos 330^\circ$.

Resolução

A extremidade M do arco de 330° pertence ao 4º quadrante:



Traçando por M a perpendicular ao eixo dos co-senos, obtemos o ponto P , correspondente de M no 1º quadrante, conforme figura abaixo.



Os pontos M e P têm ordenadas opostas e abscissas iguais.

$$\text{Logo, temos } \sin 330^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \text{ e}$$

$$\cos 330^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Conclusões

Os senos (ou co-senos) de dois arcos correspondentes têm o **mesmo módulo**.

Exemplos

$$\text{a) } |\sin 150^\circ| = |\sin 30^\circ| \Rightarrow \left| \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} \right|$$

$$\text{b) } |\sin 240^\circ| = |\sin 60^\circ| \Rightarrow \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} \right|$$

$$\text{c) } |\cos 330^\circ| = |\cos 30^\circ| \Rightarrow \left| \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} \right|$$

$$\text{d) } |\cos 240^\circ| = |\cos 60^\circ| \Rightarrow \left| -\frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} \right|$$

Assim sendo, conhecendo-se o seno (ou co-seno) de um arco do 1º quadrante, o cálculo do seno (ou do co-seno) do arco correspondente num outro quadrante se resume, simplesmente, ao estudo do sinal.

Exemplo

Para o cálculo do $\sin 210^\circ$, basta obtermos o seno do correspondente de 210° no 1º quadrante, ou seja, $\sin 30^\circ$, e atribuímos a ele o sinal do seno no 3º quadrante, isto é, o sinal negativo:

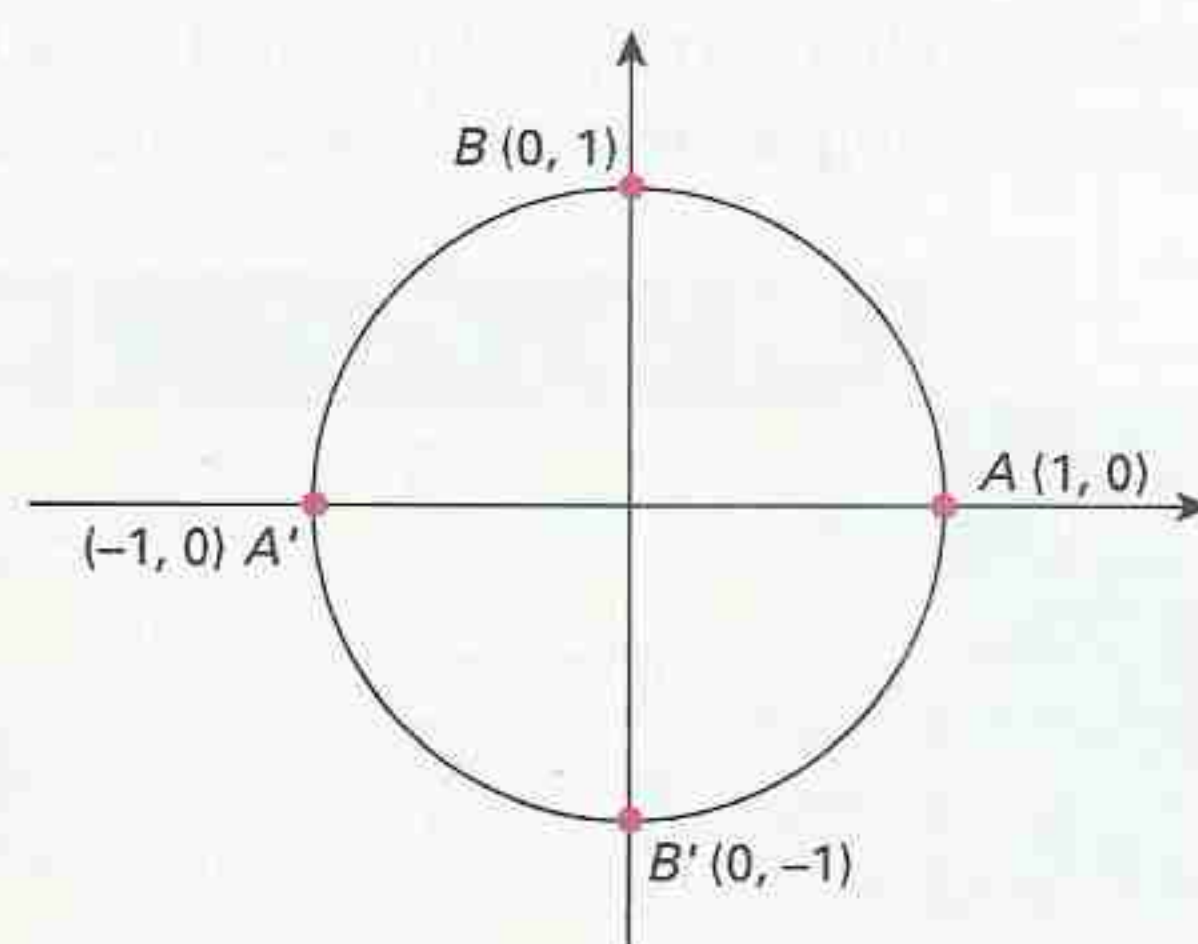
$$\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ$$



EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Observe a circunferência trigonométrica e calcule:

- a) $\cos 0$ e $\sin 0$
- b) $\cos \frac{\pi}{2}$ e $\sin \frac{\pi}{2}$
- c) $\cos \pi$ e $\sin \pi$
- d) $\cos \frac{3\pi}{2}$ e $\sin \frac{3\pi}{2}$
- e) $\cos 2\pi$ e $\sin 2\pi$



B.2 Calcule o valor da expressão:

$$E = \frac{\cos 0^\circ \sin 270^\circ + \sin 90^\circ \cos 180^\circ}{\sin^2 90^\circ + \cos^2 180^\circ}$$

B.3 Obtenha o valor da expressão:

$$E = \frac{\sin 2x + \cos 8x}{\sin^2 3x}, \text{ para } x = \frac{\pi}{2}$$

B.4 Com o auxílio da tabela dos arcos notáveis:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Calcule:

- a) $\sin 120^\circ$
- b) $\cos 120^\circ$
- c) $\sin 210^\circ$
- d) $\cos 210^\circ$
- e) $\sin 300^\circ$
- f) $\cos 300^\circ$
- g) $\sin 135^\circ$
- h) $\cos 135^\circ$
- i) $\sin 225^\circ$
- j) $\cos 225^\circ$
- k) $\sin 315^\circ$
- l) $\cos 315^\circ$

B.5 Com o auxílio da tabela dos arcos notáveis, calcule:

- a) $\sin \frac{5\pi}{6}$ d) $\cos \frac{4\pi}{3}$
 b) $\cos \frac{5\pi}{6}$ e) $\sin \frac{11\pi}{6}$
 c) $\sin \frac{4\pi}{3}$ f) $\cos \frac{11\pi}{6}$

B.6 Determine o valor da expressão:

$$E = \frac{\sin 330^\circ + \cos^2 300^\circ}{\sin 200^\circ + \cos 70^\circ + \sin^2 240^\circ}$$

Sugestão. Ângulos complementares.

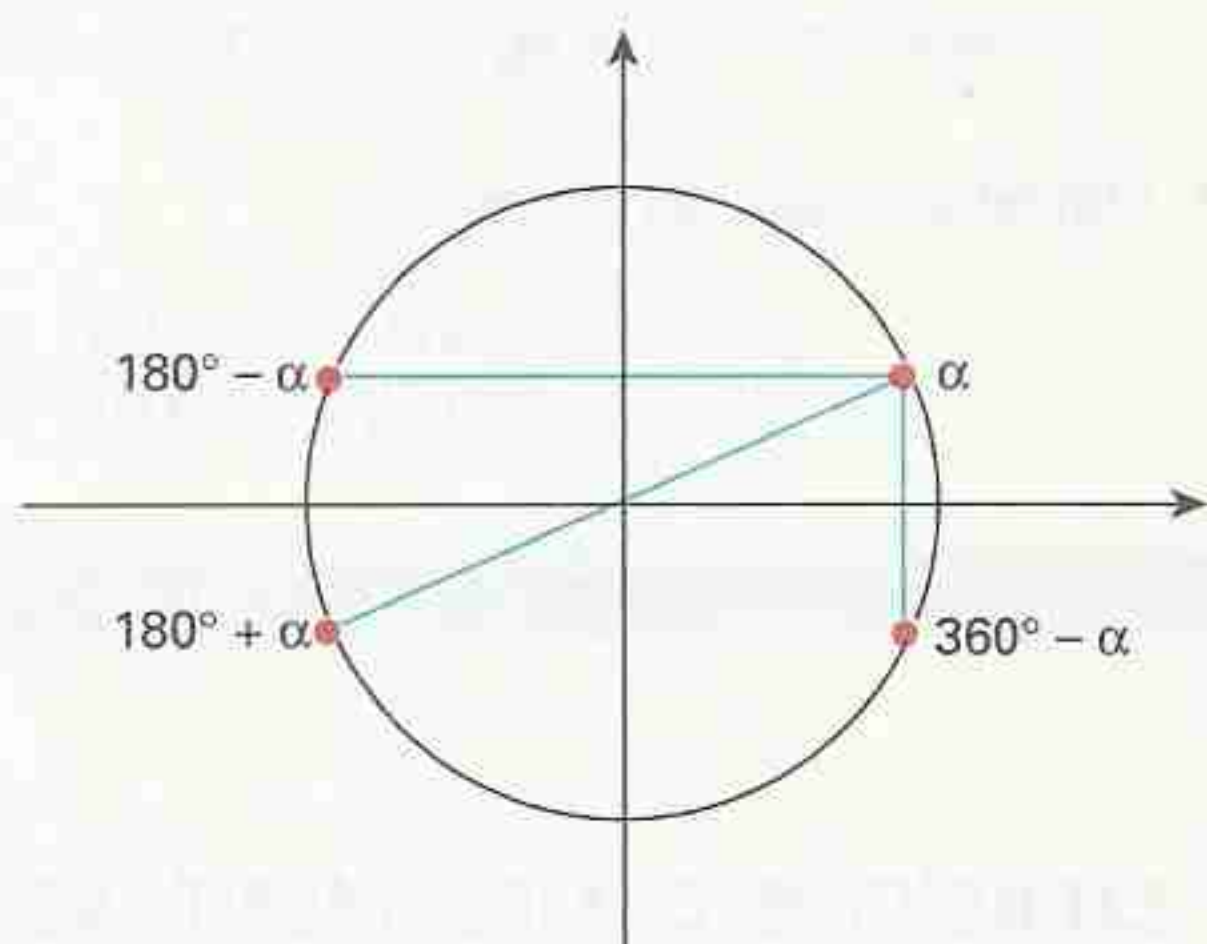
B.7 (UFPA) O valor da expressão

$$\sin \frac{4\pi}{3} \cdot \cos \frac{5\pi}{6} + \left(\sin \frac{7\pi}{4} \right)^2 \text{ é:}$$

- a) 1 c) $\frac{5}{4}$
 b) 0 d) $-\frac{1}{4}$

B.8 Observando a figura, classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das afirmações:

- a) $\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
 b) $\sin (180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$
 c) $\sin (180^\circ + \alpha) = \sin \alpha$
 d) $\sin (180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
 e) $\sin (360^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
 f) $\sin (360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$
 g) $\cos (180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
 h) $\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
 i) $\cos (180^\circ + \alpha) = \cos \alpha$
 j) $\cos (180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$
 k) $\cos (360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
 l) $\cos (360^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$



Nota

Mesmo que a extremidade do arco de medida α não esteja no primeiro quadrante, as relações anteriores que são verdadeiras continuarão verdadeiras. Verifique!

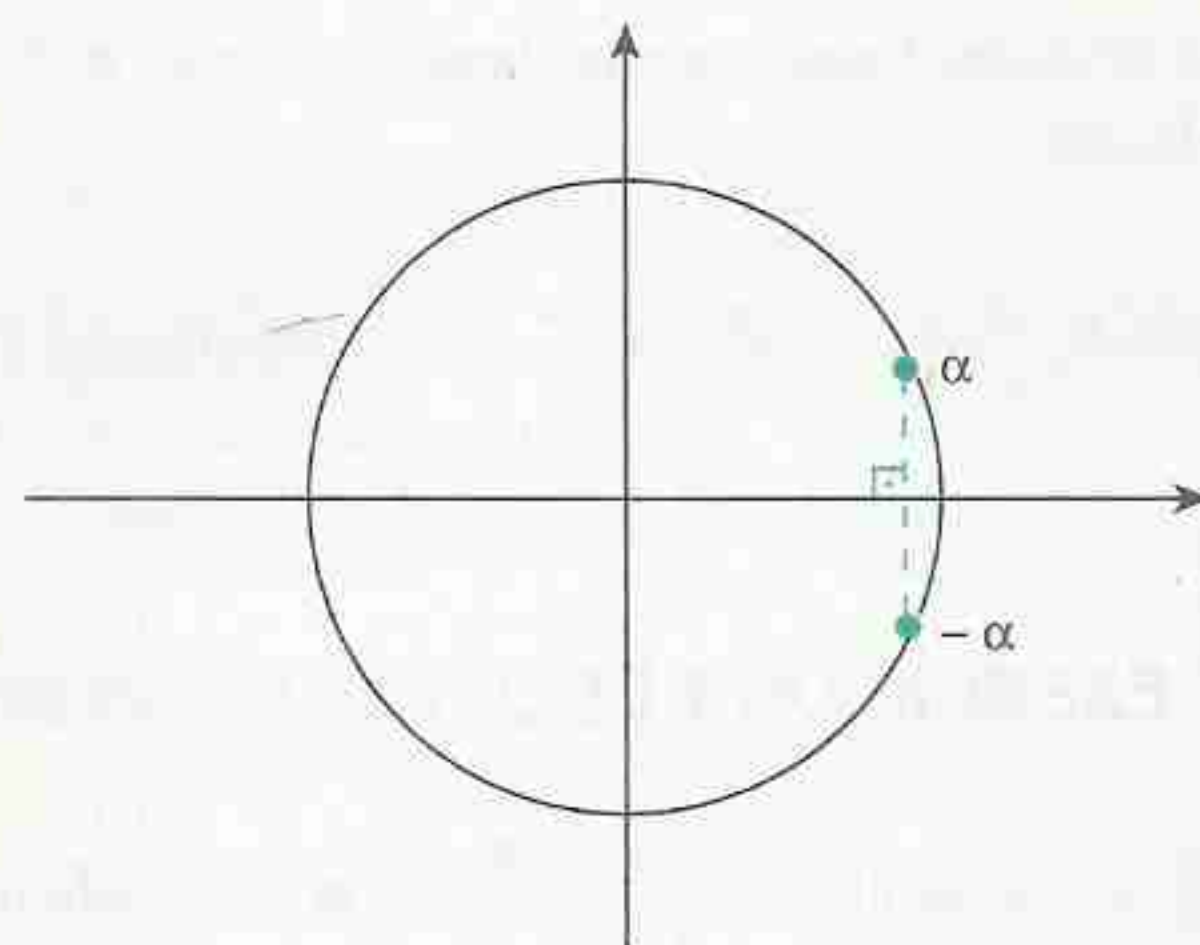
B.9 De acordo com suas conclusões no exercício anterior, simplifique a expressão:

$$E = \frac{\sin (180^\circ - \alpha) - \sin (180^\circ + \alpha)}{\sin (360^\circ - \alpha)},$$

com $\sin \alpha \neq 0$

B.10 Dois arcos de medidas opostas, α e $-\alpha$, têm extremidades simétricas em relação ao eixo dos co-senos. Observando a figura, classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das afirmações:

- a) $\cos (-\alpha) = \cos \alpha$ c) $\sin (-\alpha) = \sin \alpha$
 b) $\cos (-\alpha) = -\cos \alpha$ d) $\sin (-\alpha) = -\sin \alpha$



Nota

Mesmo que a extremidade do arco de medida α não esteja no primeiro quadrante, as relações anteriores que são verdadeiras continuarão verdadeiras. Verifique!

B.11 De acordo com suas conclusões no exercício anterior, calcule:

- a) $\sin (-30^\circ)$ c) $\sin (-210^\circ)$
 b) $\cos (-45^\circ)$ d) $\cos (-300^\circ)$

Exercícios complementares de C.1 a C.5

4. RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA

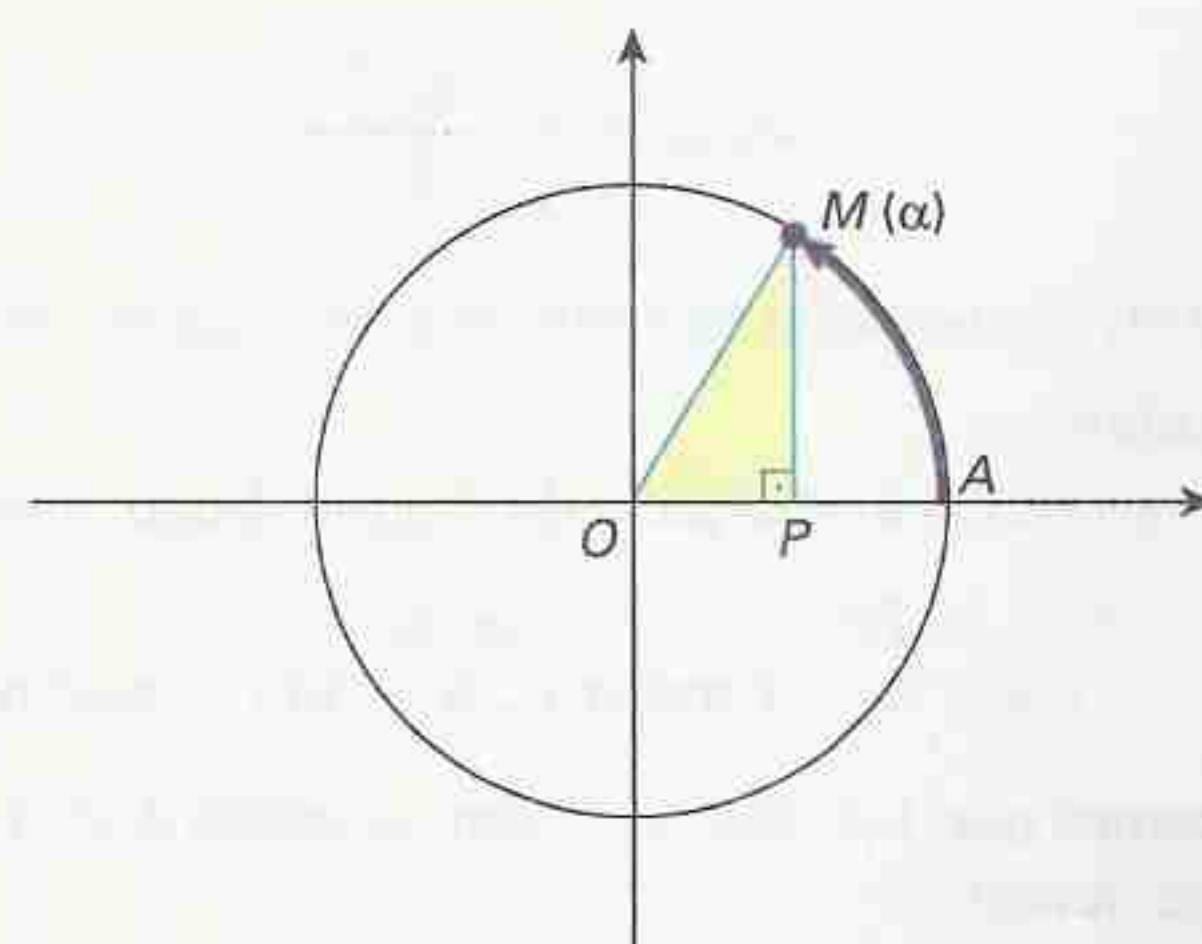
Dado um arco trigonométrico de medida α , tem-se:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Vamos demonstrar apenas o caso em que a extremidade do arco de medida α é um ponto do primeiro quadrante, porém é importante ressaltar que a relação continua verdadeira mesmo que essa extremidade não esteja no primeiro quadrante.

Demonstração

Seja α a medida de um arco com extremidade no 1º quadrante:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OMP , temos $(PM)^2 + (OP)^2 = (OM)^2$. Mas sabemos que $PM = \sin \alpha$, $OP = \cos \alpha$ e $OM = 1$ (raio).

Logo, temos $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Exercícios complementares

- C.1 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$. C.2 5 m. C.3 $R = \frac{h \operatorname{sen} \theta}{1 - \operatorname{sen} \theta}$. C.4 d. C.5 d.
 C.6 $x = 24$ cm. C.7 b. C.8 48 m. C.9 378 m. C.10 a.
 C.11 a) 10 cm²; b) $4\sqrt{3}$ m²; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dm². C.12 b. C.13 a.
 C.14 $\alpha = 150^\circ$. C.15 3 cm.

Capítulo 27**Exercícios básicos**

- B.1 1,75 rad. B.2 45° . B.3 a) $\frac{4\pi}{3}$ rad; b) $\frac{7\pi}{4}$ rad; c) $\frac{7\pi}{6}$ rad;
 d) $\frac{\pi}{4}$ rad; e) $\frac{\pi}{2}$ rad; f) $\frac{3\pi}{2}$ rad; g) $\frac{\pi}{6}$ rad; h) $\frac{5\pi}{3}$ rad;
 i) $\frac{\pi}{9}$ rad; j) $\frac{2\pi}{9}$ rad. B.4 a) 36° ; b) 150° ; c) 135° ; d) 315° ;
 e) 120° ; f) 90° ; g) 240° ; h) 100° ; i) 330° ; j) 57° (aproximadamente);
 k) $85,9^\circ$ (aproximadamente); l) $40,1^\circ$ (aproximadamente).
 B.5 a) 50° ; b) 240° ; c) 300° . B.6 a) $\frac{8\pi}{5}$ rad; b) $\frac{\pi}{2}$ rad;
 c) $\frac{5\pi}{4}$ rad. B.7 N: 159° , P: 201° , Q: 339° . B.8 N: $\frac{4\pi}{5}$, P: $\frac{6\pi}{5}$,
 Q: $\frac{9\pi}{5}$. B.9 a) M: 60° , P: 240° , Q: 300° ; b) M: 30° , N: 150° , Q: 330° ;
 c) M: 50° , N: 130° , P: 230° . B.10 a) M: $\frac{2\pi}{7}$, P: $\frac{9\pi}{7}$, Q: $\frac{12\pi}{7}$;
 b) M: $\frac{\pi}{3}$, N: $\frac{2\pi}{3}$, Q: $\frac{5\pi}{3}$; c) M: $\frac{\pi}{6}$, N: $\frac{5\pi}{6}$, P: $\frac{7\pi}{6}$.

Exercícios complementares

- C.1 48 voltas. C.2 6° , aproximadamente. C.3 $\frac{\pi}{80}$ rad.
 C.4 A: 0, 2π , -2π ; M: $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{4}$; B: $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$; N: $\frac{3\pi}{4}$,
 $-\frac{5\pi}{4}$; A': π , $-\pi$; P: $\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$; B': $\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$; Q: $\frac{7\pi}{4}$,
 $-\frac{\pi}{4}$. C.5 e. C.6 e. C.7 320° . C.8 330° . C.9 d.

Capítulo 28**Exercícios básicos**

- B.1 a) $\cos 0 = 1$, $\operatorname{sen} 0 = 0$; b) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$; c) $\cos \pi = -1$,
 $\operatorname{sen} \pi = 0$; d) $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$, $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1$, $\cos 2\pi = 1$, $\operatorname{sen} 2\pi = 0$.
 B.2 $E = -1$. B.3 $E = 1$. B.4 a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $-\frac{1}{2}$;
 d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; f) $\frac{1}{2}$; g) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; h) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; i) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
 j) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; k) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; l) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B.5 a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
 c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $-\frac{1}{2}$; e) $-\frac{1}{2}$; f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B.6 $E = -\frac{1}{3}$. B.7 c.
 B.8 a) V; b) F; c) F; d) V; e) F; f) V; g) F; h) V; i) F; j) V; k) V; l) F.
 B.9 $E = -2$. B.10 a) V; b) F; c) F; d) V. B.11 a) $-\frac{1}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
 c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{2}$. B.12 $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{12}{13}$. B.13 $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
 B.14 $\operatorname{sen} x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ e $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$$\text{B.15 } m = 3 \text{ ou } m = -4. \quad \text{B.16 } S = \{-1 + \cos \alpha, -1 - \cos \alpha\}.$$

$$\text{B.17 } \operatorname{sen} x = \frac{1}{3}. \quad \text{B.18 } \operatorname{sen} x = \frac{1}{4}. \quad \text{B.19 } E = 4. \quad \text{B.20 } E = \frac{5}{4}.$$

Exercícios complementares

- C.1 $E = -2$. C.2 $E = -1$. C.3 d. C.4 b. C.5 e. C.6 c. C.7 a.
 C.8 96 cm². C.9 a. C.10 $k = -1$. C.11 b.
 C.12 $S = \left\{ \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \frac{-1 - \cos \alpha}{2} \right\}$.

Capítulo 29**Exercícios básicos**

- B.1 a) $S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}$; b) $S = \left\{ \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right\}$; c) $S = \{0\}$;
 d) $S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$; e) $S = \left\{ \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$; f) $S = \left\{ \frac{3\pi}{2} \right\}$; g) $S = \{\pi\}$;
 h) $S = \{0, \pi\}$; i) $S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$; j) $S = \emptyset$; k) $S = \emptyset$.
 B.2 a) $S = \{30^\circ, 150^\circ\}$; b) $S = \{120^\circ, 240^\circ\}$; c) $S = \{90^\circ\}$;
 d) $S = \{90^\circ, 270^\circ\}$; e) $S = \{0^\circ, 180^\circ\}$; f) $S = \{30^\circ, 330^\circ\}$;
 g) $S = \{225^\circ, 315^\circ\}$; h) $S = \{45^\circ, 315^\circ\}$; i) $S = \{180^\circ\}$; j) $S = \{270^\circ\}$.
 B.3 $S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}$. B.4 $S = \{\pi, 3\pi\}$. B.5 $S = \emptyset$.
 B.6 $S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right\}$. B.7 $S = \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\}$.
 B.8 $S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$. B.9 $S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$.
 B.10 $S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$. B.11 $S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$.
 B.12 a. B.13 $S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$.
 B.14 $S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$. B.15 $S = \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi \right\}$. B.16 $S = \{0, \pi\}$.

Exercícios complementares

- C.1 a. C.2 c. C.3 $S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$. C.4 4π .
 C.5 $S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$. C.6 $S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$.
 C.7 $S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$. C.8 $S = \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\}$.
 C.9 $S = \{0\}$. C.10 $S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$.
 C.11 $S = \{0, \pi, 2\pi\}$. C.12 $S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$.
 C.13 $S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$. C.14 d.
 C.15 $S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$.
 C.16 $S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$.

Capítulo 30**Exercícios básicos**

- B.1 a) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \right\}$;
 b) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{11\pi}{6} \right\}$; c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi\}$;
 d) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leq x < 2\pi \right\}$;
 e) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4} \right\}$;