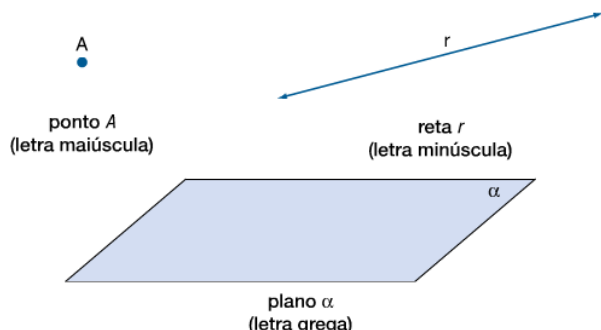


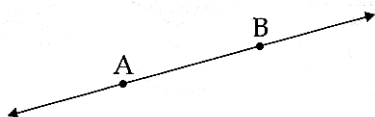
NOÇÕES PRIMITIVAS DE GEOMETRIA PLANA

1. Reta, semirreta e segmento de reta

- Na Geometria Plana, os conceitos de ponto, reta e plano são primitivos, ou seja, não há uma definição para eles.



- Se dois pontos **A** e **B**, distintos, pertencem a uma reta **r** podemos simbolizar essa reta por \overleftrightarrow{AB} . A partir desses pontos **A** e **B** podemos definir os conceitos de **semirreta** e **segmento de reta**.



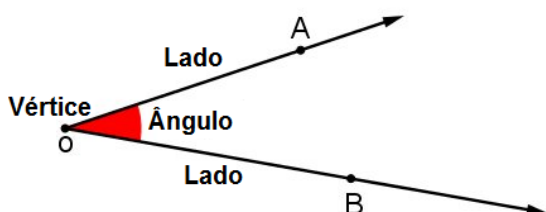
- A semirreta \overrightarrow{AB} é a reunião dos pontos com origem em **A** e sentido de **A** para **B**. Já a semirreta \overrightarrow{BA} terá origem em **B** e sentido de **B** para **A**.
- O segmento de reta \overline{AB} é a reunião de todos os pontos da reta que estão situados entre **A** e **B**.

OBSERVAÇÃO

Três pontos **A**, **B** e **C** são ditos **colineares** se estiverem situados em uma **mesma reta** e **coplanares** se estiverem situados em um **mesmo plano**.

2. Ângulos

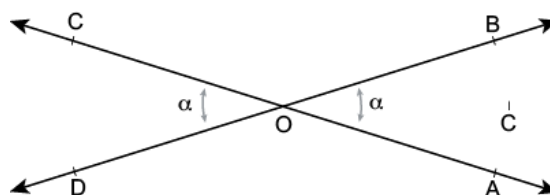
- Um ângulo é a região do plano situada entre duas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , com origem no vértice **O**. Simbolizamos o ângulo destacado a seguir por **AOB** ou $\angle AOB$.



- Os ângulos são medidos em graus ($^\circ$) ou em radianos (rad) sendo que o ângulo volta mede 360° ou 2π rad. A seguir temos os alguns tipos de ângulos importantes.

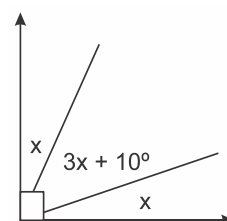
Ângulo		Medida
Volta		360°
Nulo		0°
Raso		180°
Reto		90°
Agudo		Maior que 0° e menor que 90°
Obtuso		Maior que 90° e menor que 180°
Côncavo		Maior que 180° e menor que 360°
Convexo		Maior que 0° e menor que 180°

- Chamamos de ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.) aos ângulos formados do cruzamento de duas retas concorrentes. Ângulos o.p.v. tem a mesma medida.



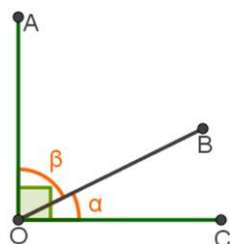
EXERCÍCIOS DE AULA

- 01) (UTFPR 2015)** Calcule o valor de **x**, em graus, na figura:

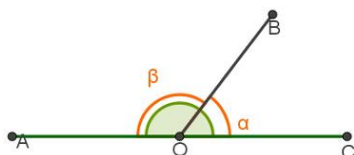


- a) 16. b) 10. c) 20. d) 58. e) 32.

- α e β são chamados de **ângulos complementares** quando $\alpha + \beta = 90^\circ$ ou $\beta = 90^\circ - \alpha$.

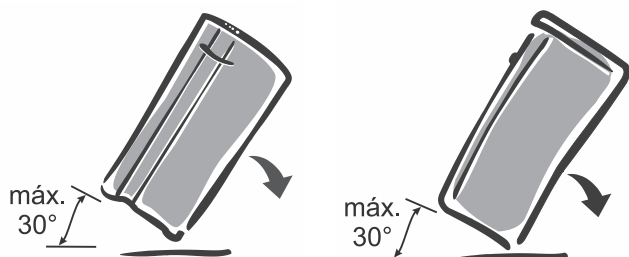


- α e β são chamados de **ângulos suplementares** quando $\alpha + \beta = 180^\circ$ ou $\beta = 180^\circ - \alpha$.



EXERCÍCIOS DE AULA

- 02) (IFPE 2017) Analisando o manual de instruções do refrigerador RDE30, observamos um destaque para o momento de transportá-lo. Observe abaixo o trecho desse manual sobre transporte do refrigerador.



Transporte

Caso necessite transportar seu Refrigerador em pequenos deslocamentos, incline-o para trás ou para um dos lados com ângulo máximo de 30° . Caso necessite transportar seu Refrigerador em longos deslocamentos (ex.: mudança), movimente-o em pé.

Disponível em:

<<https://www.colombo.com.br/produtos/111120/111120.pdf?descricao=...>>.

Acesso: 02 out.2016.

Sabendo que o ângulo máximo de inclinação do refrigerador é 30° , a metade do suplemento desse ângulo é de

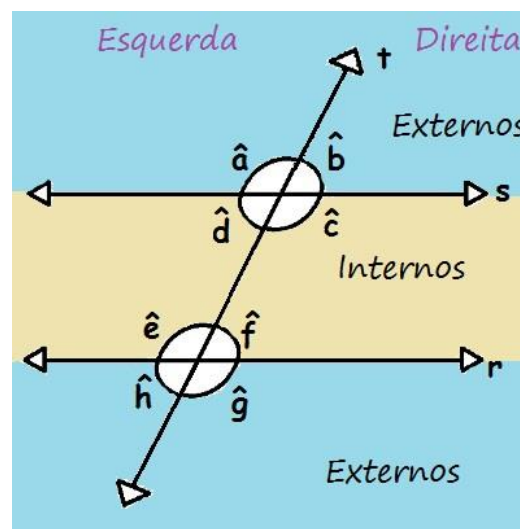
- 75° .
- 60° .
- 45° .
- 30° .
- 15° .

- 03) A razão entre dois ângulos suplementares é $3/5$. Qual o complemento do menor desses ângulos?

- $11^\circ 15'$
- $22^\circ 30'$
- $31^\circ 15'$
- $67^\circ 30'$
- $112^\circ 30'$

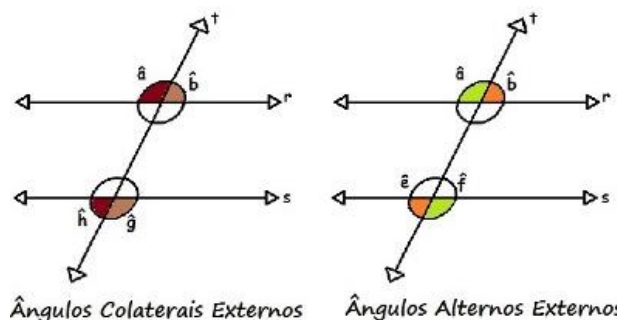
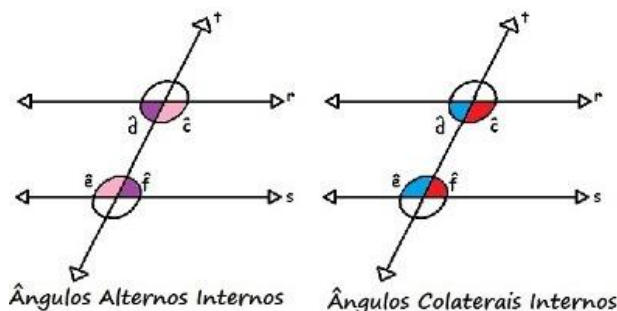
3. Retas paralelas cortadas por uma transversal

- Duas retas paralelas, quando cortadas por uma reta transversal, originam oito ângulos, conforme a figura a seguir.



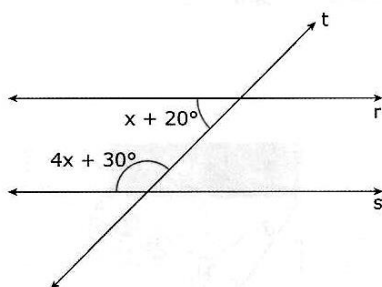
- Desses oito ângulos é importante saber que $\hat{a} = \hat{c} = \hat{e} = \hat{g}$ e $\hat{b} = \hat{d} = \hat{f} = \hat{h}$. Além disso, temos que a soma de dois quaisquer desses ângulos adjacentes resulta em 180° (suplementares).

- Esses ângulos são classificados em *correspondentes* (mesma posição), *alternos externos* (em lados alternados da transversal e externos às paralelas), *alternos internos* (em lados alternados da transversal e internos às paralelas), *colaterais externos* (do mesmo lado em relação à transversal e externos às paralelas) e *colaterais internos* (do mesmo lado em relação à transversal e internos às paralelas).



EXERCÍCIOS DE AULA

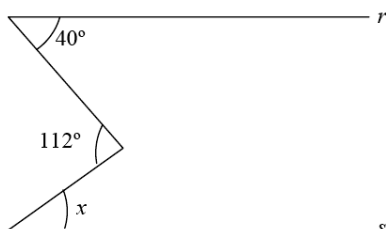
- 04) (UNAERP-SP) As retas r e s são interceptadas pela transversal t , conforme a figura.



O valor de x para que as retas r e s sejam paralelas é

- a) 14° b) 20° c) 26° d) 31° e) 34°

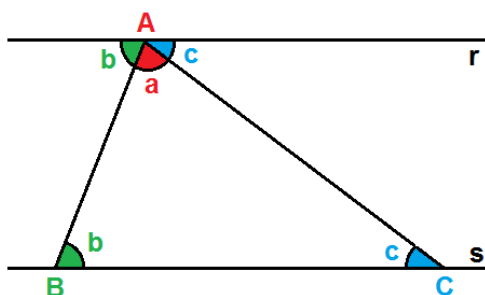
- 05) (UNIMONTES) Se $r \parallel s$, então o valor de x , na figura a seguir, é



- a) 52° b) 68° c) 72° d) 58°

4. Soma dos ângulos internos de um triângulo

- Considere duas retas r e s , paralelas, e um triângulo ABC cujo vértice A pertence à reta r e os vértices B e C pertencem à reta s .



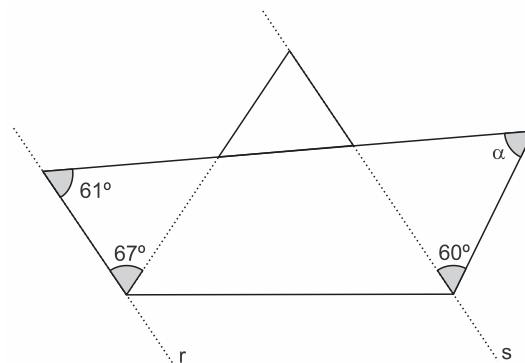
- Podemos perceber que os ângulos pintados de verde (b) e os ângulos pintados de azul (c) são pares de ângulos alternos internos e, portanto, possuem a mesma medida. Assim, podemos concluir que

“Em todo triângulo, a soma dos ângulos internos é igual a 180° .”

- Esse é o chamado **Teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo** e terá papel fundamental no próximo capítulo.

EXERCÍCIOS DE AULA

- 06) (IFPE 2018) Eva é aluna do curso de Construção Naval do campus Ipojuca e tem mania de construir barquinhos de papel. Durante a aula de desenho técnico, resolveu medir os ângulos do último barquinho que fez, representado na imagem a seguir. Sabendo que as retas suporte, r e s , são paralelas, qual a medida do ângulo α destacado?

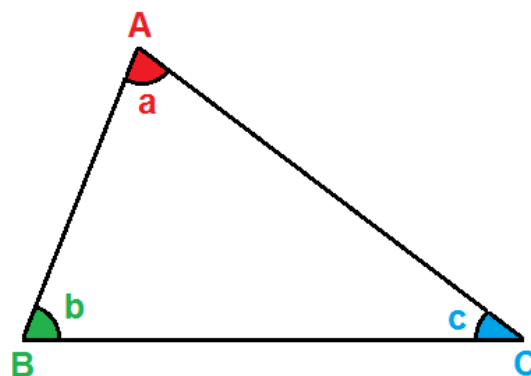


- a) 52° . b) 60° . c) 61° . d) 67° . e) 59° .

TRIÂNGULO E SEUS PONTOS NOTÁVEIS

1. O triângulo e seus elementos

- Considere três pontos A , B e C , não colineares. Ao traçar os segmentos de reta \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} formamos o triângulo ABC , que pode ser simbolizado por $\triangle ABC$.



- A seguir temos os principais elementos do triângulo:

- Vértices: são os pontos A , B e C .
- Lados: são os segmentos de reta \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC}
- Ângulos internos: a , b e c .

- Cada ângulo é formado da intersecção de dois lados. Por exemplo, o ângulo a é formado pela intersecção dos lados \overline{AB} e \overline{AC} . Esses lados que formam o ângulo são chamados de **lados adjacentes** ao ângulo; já o terceiro lado (que não forma o ângulo) é chamado de **lado oposto** ao ângulo.

- Do mesmo modo, cada lado possui um **ângulo oposto** e dois **ângulos adjacentes**. Por exemplo, o lado \overline{BC} possui como ângulo oposto **a** e como ângulos adjacentes **b** e **c**. A seguir temos um resumo:

Ângulo	Lados Adjacentes	Lado Oposto
a	\overline{AB} e \overline{AC}	\overline{BC}
b	\overline{AB} e \overline{BC}	\overline{AC}
c	\overline{AC} e \overline{BC}	\overline{AB}

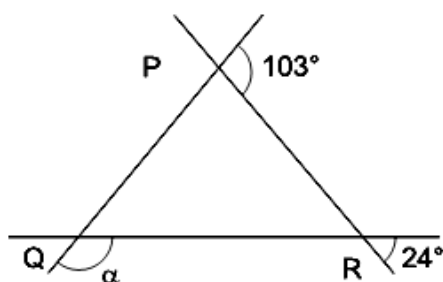
Lado	Ângulos Adjacentes	Ângulo Oposto
\overline{AB}	a e b	c
\overline{AC}	a e c	b
\overline{BC}	b e c	a

OBSERVAÇÃO

Conforme vimos anteriormente, a soma dos ângulos internos de um triângulo sempre é igual a 180° .

EXERCÍCIOS DE AULA

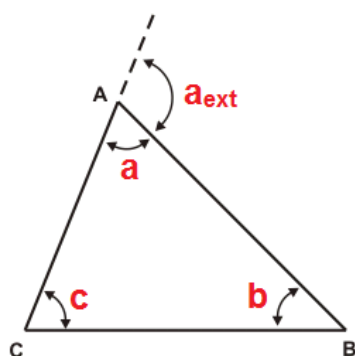
- 07) (UECE) As retas na figura interceptam-se duas a duas nos pontos P, Q e R. Considerando os valores indicados, o ângulo α é igual a:



- a) 101° b) 102° c) 103° d) 104° e) 105°

OBSERVAÇÃO

Um triângulo ainda possui três ângulos externos que são os suplementares dos respectivos ângulos internos. Cada ângulo externo do triângulo é a soma dos dois outros ângulos internos não adjacentes a ele.



$$a + a_{\text{ext}} = 180^\circ$$

$$a + b + c = 180^\circ$$



$$a_{\text{ext}} = b + c$$

2. Relação entre os lados e os ângulos de um triângulo

- Em todo triângulo o maior dos lados sempre é oposto ao maior dos ângulos e o menor dos lados é oposto ao menor dos ângulos e vice-versa.
- Caso, no triângulo, existam lados iguais, seus ângulos opostos também serão iguais e vice-versa.

EXERCÍCIOS DE AULA

- 08) Em um triângulo ABC temos que $\hat{A} = 25^\circ$, $\hat{B} = 95^\circ$ e $\hat{C} = 60^\circ$. Assinale a alternativa correta.

- a) Os ângulos \hat{A} e \hat{B} são complementares.
 b) O suplementar do ângulo \hat{B} é menor que o ângulo \hat{C} .
 c) O menor lado do triângulo é \overline{AB} .
 d) O maior lado do triângulo é \overline{AC} .
 e) Os lados \overline{AB} e \overline{AC} tem a mesma medida.

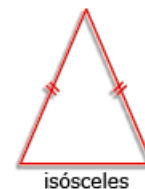
3. Classificações de um triângulo

3.1. quanto à medida de seus lados

- Um triângulo pode ser classificado quando à medida de seus lados em três tipos: **equilátero**, **isósceles** e **escaleno**.
- Um triângulo equilátero é aquele que possui os três lados (e os três ângulos) com a mesma medida.



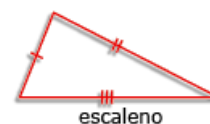
- Um triângulo isósceles é aquele que possui dois de seus lados (e dois de seus ângulos) com a mesma medida. O terceiro lado é chamado de **base**.



OBSERVAÇÃO

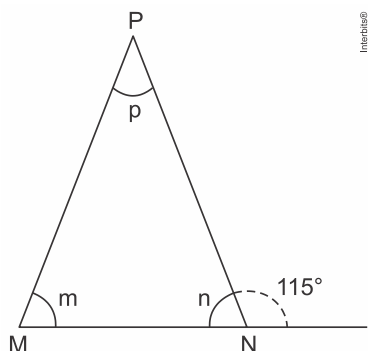
Todo triângulo equilátero é isósceles, porém nem todo triângulo isósceles é equilátero.

- Um triângulo escaleno possui os três lados (e os três ângulos) com medidas diferentes.



EXERCÍCIO DE AULA

09)(MACKENZIE 2018) O triângulo PMN a seguir é isósceles de base MN.

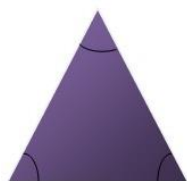


Se p , m e n são os ângulos internos do triângulo, como representados na figura, então podemos afirmar que suas medidas valem, respectivamente,

- a) $50^\circ, 65^\circ, 65^\circ$ b) $65^\circ, 65^\circ, 50^\circ$ c) $65^\circ, 50^\circ, 65^\circ$
 d) $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$ e) $80^\circ, 80^\circ, 40^\circ$

3.2. quando à medida de seus ângulos

- Um triângulo pode ser classificado quando à medida de seus ângulos também em três tipos: **acutângulo**, **obtusângulo** e **retângulo**.



Acutângulo



Obtusângulo



Retângulo

- Um triângulo **acutângulo** possui os *três ângulos agudos* (menores que 90°); um triângulo **obtusângulo** possui um *ângulo obtuso* (maior que 90°); já um triângulo **retângulo** possui um *ângulo reto* (igual a 90°).
- Considerando que a , b e c sejam os lados de um triângulo e que a seja o maior desses lados temos que esse triângulo será:
- Retângulo, se $a^2 = b^2 + c^2$;
 - Acutângulo, se $a^2 < b^2 + c^2$;
 - Obtusângulo, se $a^2 > b^2 + c^2$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Classifique quanto à medida de seus ângulos os triângulos que possuem como medidas de seus lados

- a) 10 cm, 8 cm e 7 cm.
 b) 13 cm, 12 cm e 5 cm.
 c) 12 cm, 8 cm e 8 cm.

Resolução:

a) No item a temos que:

$$10^2 < 8^2 + 7^2$$

$$100 < 64 + 49$$

$$100 < 113, \text{ logo o triângulo é } \textbf{acutângulo}.$$

b) No item b temos que:

$$13^2 = 12^2 + 5^2$$

$$169 = 144 + 25$$

$$169 = 169, \text{ logo o triângulo é } \textbf{retângulo}.$$

c) No item c temos que:

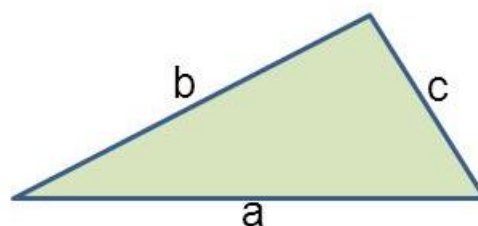
$$12^2 > 8^2 + 8^2$$

$$144 > 64 + 64$$

$$144 > 128, \text{ logo o triângulo é } \textbf{obtusângulo}.$$

4. Condição de existência de um triângulo

- Para que um triângulo exista, é necessário que o maior dos lados seja menor que a soma dos outros dois.



$$a < b + c$$

EXERCÍCIO DE AULA

10)(IFPE 2017) Um Técnico em mecânica pretende construir cinco triângulos cujos lados devem ter as seguintes medidas:

- I. 10 cm; 8 cm; 6 cm.
 II. 9 cm; 15 cm; 12 cm.
 III. 12 cm; 15 cm; 12 cm.
 IV. 9 cm; 8 cm; 4 cm.
 V. 10 cm; 10 cm; 21 cm.

Podemos afirmar que o técnico obteve triângulo apenas nos casos

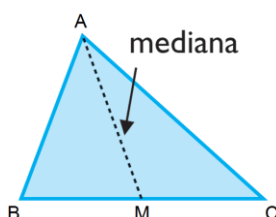
- a) I, II, III e IV.
 b) I, II e V.
 c) I, II e IV.
 d) I, II, IV e V.
 e) III, IV e V.

5. Pontos notáveis do triângulo

- Para estudar os pontos notáveis de um triângulo é necessário primeiramente entender os conceitos de **mediana**, **bissetriz**, **mediatriz** e **altura** de um triângulo.

5.1. Mediana e baricentro

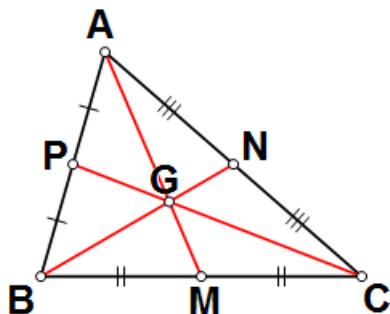
- A **mediana** de um triângulo é um segmento de reta que une um dos vértices do triângulo ao ponto médio do lado oposto. Um triângulo possui três medianas, na imagem a seguir está representada a mediana relativa ao vértice **A** (ou relativa ao lado \overline{BC}).



OBSERVAÇÃO

A mediana AM divide o triângulo ABC em dois outros triângulos (ABM e ACM), que possuem a mesma área.

- O ponto de encontro das três medianas se chama **baricentro** (ou mediacentro) e é usualmente simbolizado pela letra **G**. O baricentro sempre divide cada mediana em dois segmentos com as medidas na razão 2:1.

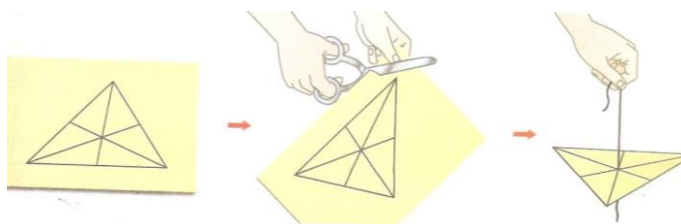


$$\begin{aligned}\overline{AG} &= 2 \cdot \overline{GM} \\ \overline{BG} &= 2 \cdot \overline{GN} \\ \overline{CG} &= 2 \cdot \overline{GP}\end{aligned}$$

OBSERVAÇÕES

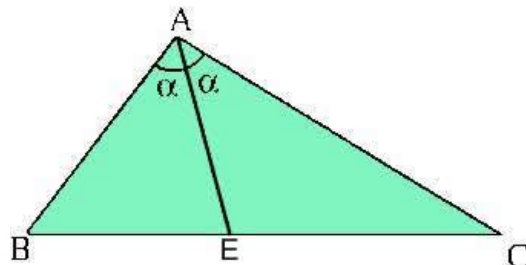
As três medianas dividem o triângulo ABC em seis outros triângulos (APG, ANG, BPG, BMG, CMG e CNG), que possuem todos a **mesma área**.

O baricentro é associado ao **centro de massa** de um objeto e está ligado a um ponto que equilibra o objeto. Assim, se suspendermos um triângulo pelo seu baricentro ele ficará em **equilíbrio** na horizontal.

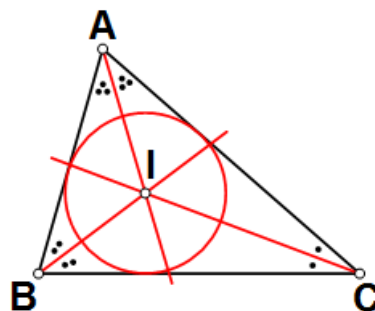


5.2. Bissetriz interna e incentro

- A **bissetriz interna** de um triângulo é um segmento de reta que une um vértice do triângulo ao lado oposto e divide o ângulo desse vértice em dois ângulos com a mesma medida.

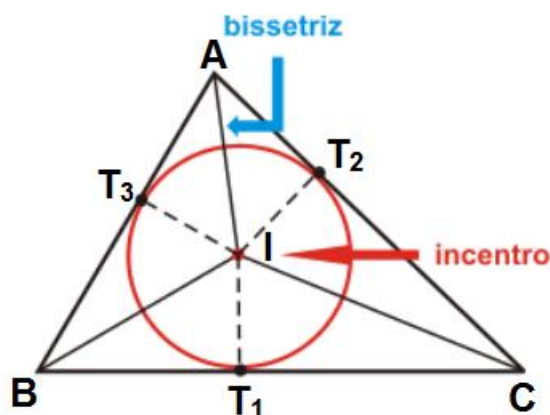


- Cada ponto da bissetriz possui a importante propriedade de ser equidistante de cada lado. O ponto de encontro das três bissetrizes chama-se **incentro** e é o centro da circunferência inscrita ao triângulo sendo, portanto, equidistante dos três lados.



O ponto **I** é equidistante dos lados \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} .

- Note que os pontos T_1 , T_2 e T_3 são os pontos em que a circunferência inscrita toca o triângulo (pontos de tangência) e os segmentos $\overline{IT_1} = \overline{IT_2} = \overline{IT_3} = R$ são perpendiculares aos lados do triângulo, sendo **R** o raio da circunferência.

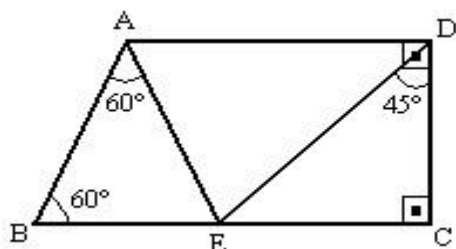


OBSERVAÇÃO

O baricentro e o incentro de um triângulo são sempre pontos **internos** ao triângulo.

EXERCÍCIOS DE AULA

11) (FATEC-SP) Dada a figura:



Sobre as sentenças

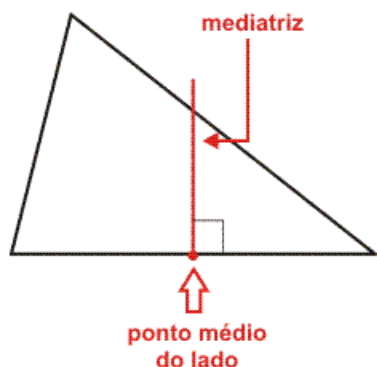
- I. O triângulo CDE é isósceles.
- II. O triângulo ABE é equilátero.
- III. AE é bissetriz do ângulo BÂD.

é verdade que

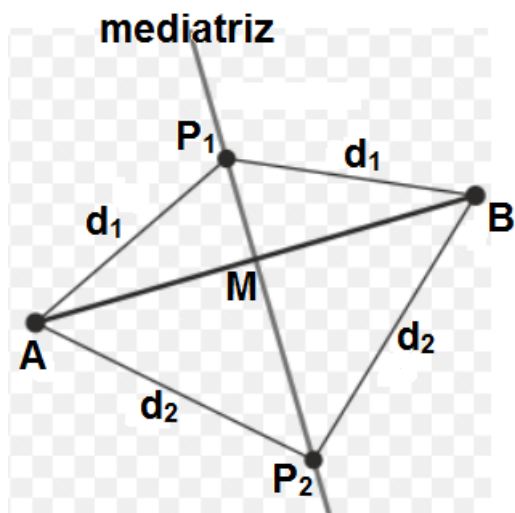
- a) somente a I é falsa.
- b) somente a II é falsa.
- c) somente a III é falsa.
- d) são todas falsas.
- e) são todas verdadeiras.

5.3. Mediatriz e circuncentro

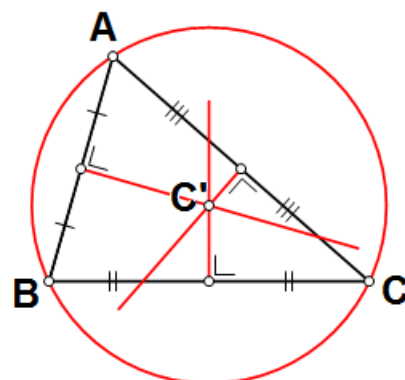
- A **mediatriz** de um lado do triângulo é uma reta perpendicular a esse lado e que passa pelo seu ponto médio.



- Cada ponto da mediatriz possui a importante propriedade de ser equidistante de cada vértice.



- Traçando as mediatrizes dos três lados de um triângulo teremos, na interseção das mesmas, um ponto que será equidistante dos três vértices e que, portanto, será o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, chamado de **circuncentro**.

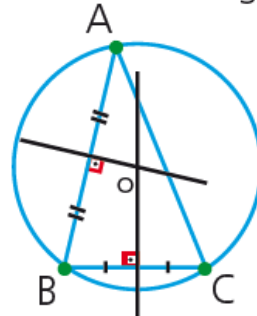


- A distância do ponto C' a qualquer um dos vértices A, B ou C será o raio da circunferência circunscrita.

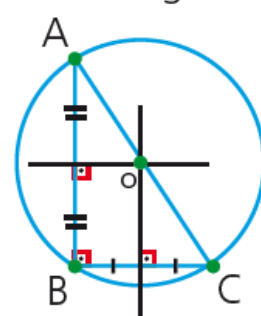
OBSERVAÇÃO 1

O **circuncentro** de um triângulo é um ponto no seu interior somente se o triângulo for **acutângulo**. Caso o triângulo seja **retângulo**, o circuncentro é o ponto médio da hipotenusa e, caso o triângulo seja **obtusângulo**, o circuncentro é um ponto **externo** ao triângulo.

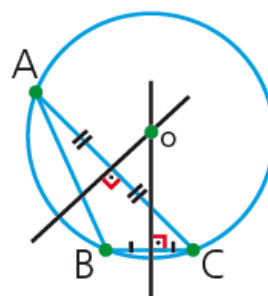
Acutângulo



Retângulo

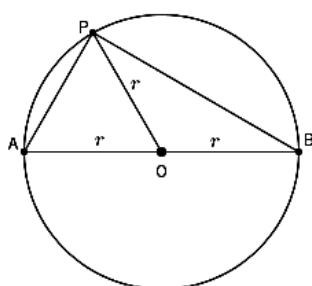
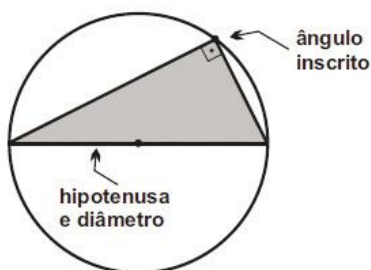


Obtusângulo



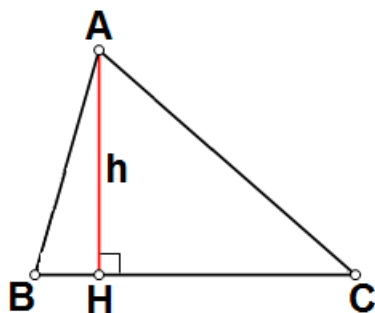
OBSERVAÇÃO 2

- Todo triângulo retângulo inscrito em uma circunferência tem a sua hipotenusa como um diâmetro. Logo, a mediana relativa à essa hipotenusa terá medida igual ao raio.

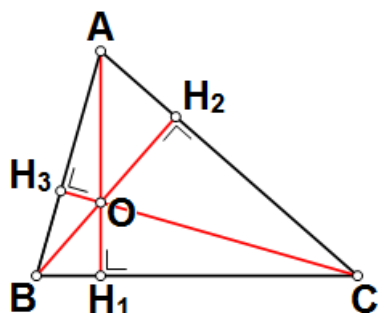


5.2. Altura e ortocentro

- A **altura** de um triângulo é um segmento de reta que une um dos vértices do triângulo ao lado oposto sendo perpendicular a esse lado. O ponto **H** é chamado de pé da altura.

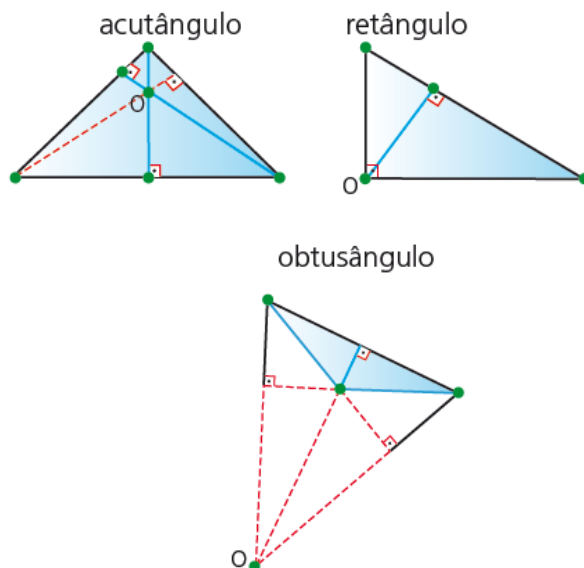


- O ponto de encontro das três alturas é chamado de **ortocentro**, simbolizado pelo ponto **O**.

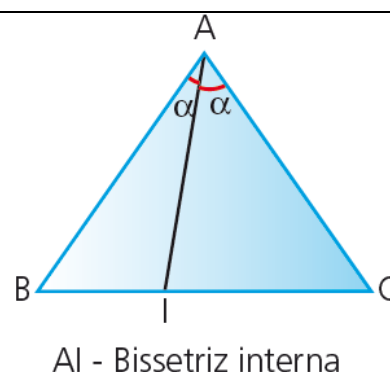


OBSERVAÇÃO

O **ortocentro** de um triângulo é um ponto no seu interior somente se o triângulo for **acutângulo**. Caso o triângulo seja **retângulo**, o ortocentro é o vértice que possui o ângulo reto e, caso o triângulo seja **obtusângulo**, o ortocentro é um ponto **externo** ao triângulo.



6. Teorema da bissetriz interna

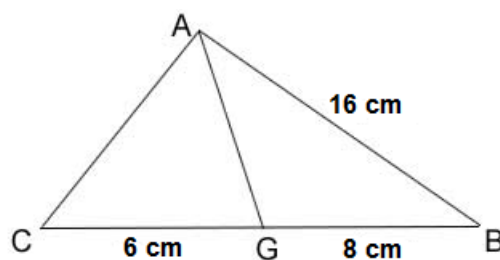


$$\frac{AB}{BI} = \frac{AC}{CI}$$

AI - Bissetriz interna

EXERCÍCIO DE AULA

- 12) No triângulo ABC da figura a seguir, o segmento AG é bissetriz do ângulo BÂC.

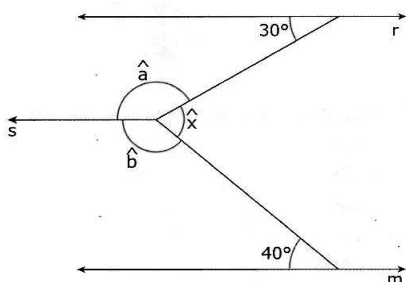


A medida do segmento AC é

- a) 18 cm. b) 16 cm. c) 14 cm. d) 12 cm. e) 10 cm.

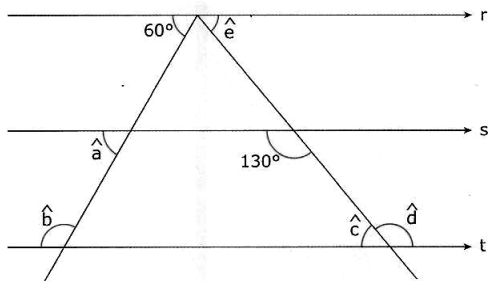
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 01) Na figura a seguir, determine x sabendo que $r \parallel s$ e $s \parallel m$.



- a) 70° b) 60° c) 50° d) 40° e) 30°

- 02) Na figura a seguir, $r \parallel s$ e $s \parallel t$. Nessas condições, determine o valor de $a + b + c + d + e$.

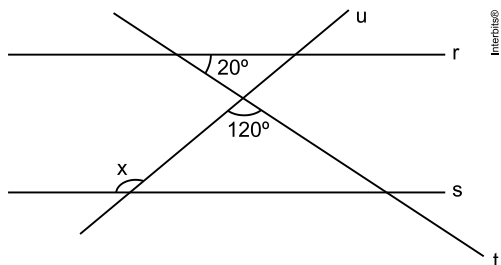


- a) 360° b) 370° c) 380° d) 400° e) 410°

- 03) (IFCE) Dois ângulos são suplementares. Os $\frac{2}{3}$ do maior excedem os $\frac{3}{4}$ do menor em 69° . A diferença positiva entre esses ângulos é igual a

- a) 88° b) 90° c) 94° d) 108° e) 112°

- 04) (IFPE 2012) Júlia começou a estudar Geometria na sua escola. Com dúvida em um exercício passado pelo professor de Matemática, ela pediu ajuda ao seu tio. O enunciado era: "As retas r e s são paralelas; as retas u e t , duas transversais. Encontre o valor do ângulo x na figura abaixo". Portanto, o valor de x é:



- a) 120° b) 125° c) 130° d) 135° e) 140°

- 05) (PUC-PR) Dois ângulos complementares \hat{A} e \hat{B} , sendo $\hat{A} < \hat{B}$, tem medidas na razão 13 para 17. Consequentemente, a razão da medida do suplemento do ângulo \hat{A} para o suplemento do ângulo \hat{B} vale:

- a) $43/47$ b) $17/13$ c) $13/17$ d) $119/48$ e) $47/43$

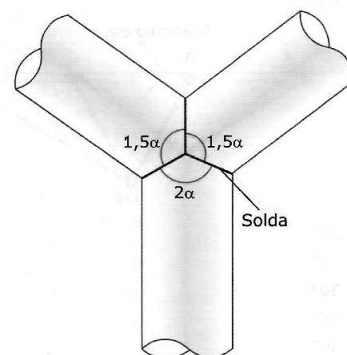
- 06) (UEPB) Duas retas cortadas por uma transversal formam ângulos alternos externos expressos em graus pelas equações $3x+18$ e $5x+10$. O valor de x de modo que estas retas sejam paralelas é

- a) 4 b) 5 c) 8 d) 10 e) 12

- 07) (ESPM 2015) A medida de um ângulo cujo suplemento tem 100° a mais que a metade do seu complemento é igual a

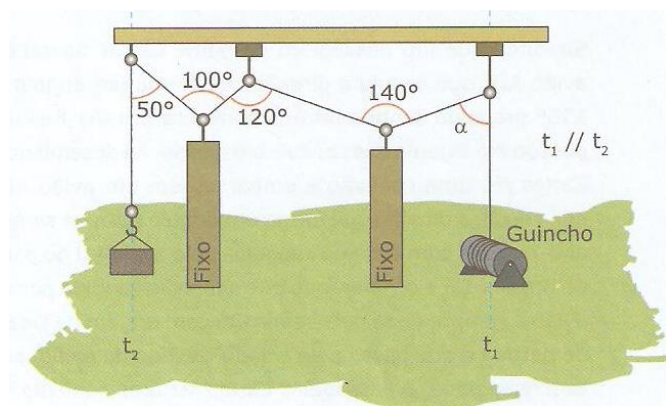
- a) 40° b) 50° c) 60° d) 70° e) 80°

- 08) A figura representa a secção de três tubulações com uma conexão em formato de duas derivações (conexão Y). O valor do ângulo α , em graus, obtido nas conexões é



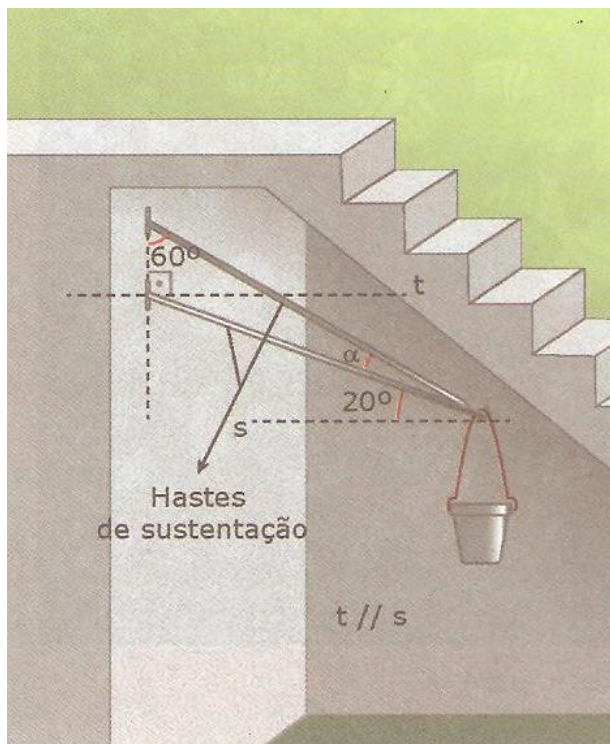
- a) 72° b) 68° c) 64° d) 60° e) 56°

- 09) Nos içamentos de estruturas pesadas, é comum o arranjo de roldanas, cabos e guinchos. Nessas estruturas, deve-se calcular os ângulos para determinação da carga e tanque suportado em cada ponto. Um engenheiro no içamento de um peso de 3 toneladas para colocação em uma caçamba calculou os ângulos de içamento e obteve o valor α , em graus, de



- a) 40 b) 50 c) 60 d) 70 e) 80

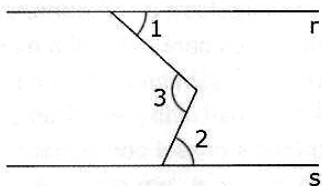
- 10) Um suporte de parede para a sustentação de um vaso de planta deve ser ajustado para ser apoiado em uma parede, em um vão de escada conforme a figura a seguir.



A medida do ângulo α , em graus, é

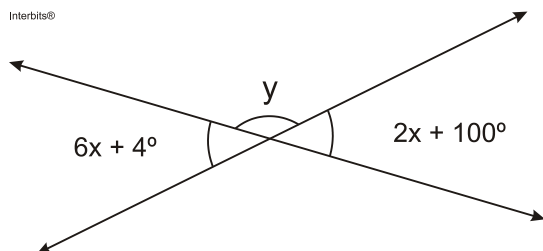
- a) 25° b) 20° c) 15° d) 10° e) 5°

- 11) (FUVEST) Na figura a seguir, as retas r e s são paralelas, o ângulo 1 mede 45° e o ângulo 2 mede 55°. A medida, em graus, do ângulo 3 é



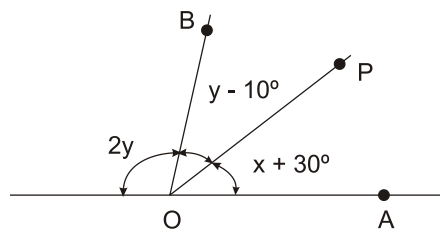
- a) 50 b) 55 c) 60 d) 80 e) 100

- 12) (UTFPR 2014) A medida de y na figura, em graus, é:



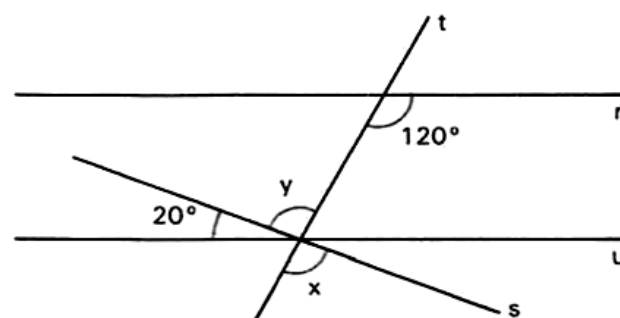
- a) 42°. b) 32°. c) 142°. d) 148°. e) 24°.

- 13) (CFTSC 2010) Na figura abaixo, OP é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$. Determine o valor de x e y .



- a) $x = 13$ e $y = 49$ b) $x = 15$ e $y = 35$
c) $x = 12$ e $y = 48$ d) $x = 17$ e $y = 42$
e) $x = 10$ e $y = 50$

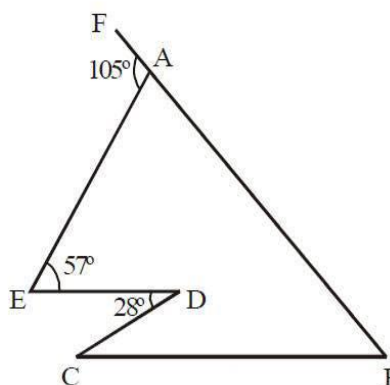
- 14) (FGV) Considere as retas r , s , t , u , todas num mesmo plano, com $r \parallel u$.



O valor em graus de $(2x+3y)$ é

- a) 64°
b) 500°
c) 520°
d) 660°
e) 580°

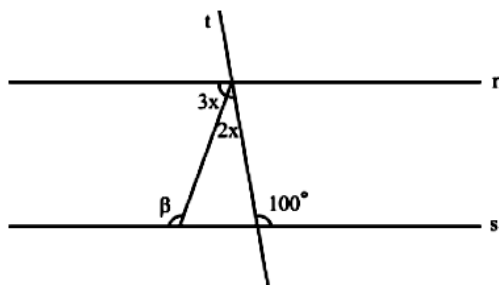
- 15) (UFMG) Observe esta figura:



Nessa figura, os pontos F , A e B estão em uma reta, e as retas CB e ED são paralelas. Assim, o ângulo $A\hat{B}C$ mede

- a) 39°.
b) 44°.
c) 47°.
d) 48°.

- 16) (UEPB) As retas paralelas r e s são cortadas pela reta t como mostra a figura a seguir. A medida do ângulo β é



- a) 120° b) 100° c) 140° d) 130° e) 110°

- 17) (IFSUL 2015) Duas retas paralelas “r” e “s”, cortadas por uma transversal “t”, formam ângulos colaterais internos, dos quais um excede o outro em 20°. O ângulo colateral interno agudo mede

- a) 20°. b) 35°. c) 55°. d) 80°.

- 18) Em um triângulo ABC temos que $\hat{A} = 40^\circ$, $\hat{B} = 70^\circ$ e $\hat{C} = 70^\circ$. São feitas as seguintes afirmações:

- O maior lado do triângulo é \overline{BC} .
- O lado oposto ao ângulo \hat{B} é \overline{AC} .
- O ângulo \hat{C} é adjacente ao lado \overline{AB} .
- Os lados \overline{AB} e \overline{AC} tem a mesma medida.

Dessa forma, podemos concluir que apenas as afirmações:

- I e II estão corretas.
- II e IV estão corretas.
- III e IV estão corretas.
- I, II e IV estão corretas.
- I, II e III estão corretas.

- 19) (UTFPR 2013) Um triângulo isósceles tem dois lados congruentes (de medidas iguais) e o outro lado é chamado de base. Se em um triângulo isósceles o ângulo externo relativo ao vértice oposto da base mede 130°, então os ângulos internos deste triângulo medem:

- 10°, 40° e 130°.
- 25°, 25° e 130°.
- 50°, 60° e 70°.
- 60°, 60° e 60°.
- 50°, 65° e 65°.

- 20) Dispomos de 6 palitinhos com comprimentos 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm e 6 cm. Quantos triângulos distintos podemos formar utilizando-se destes?

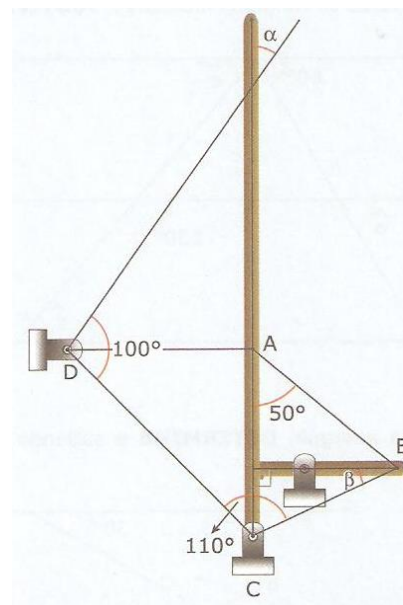
- a) 6 b) 7 c) 9 d) 12 e) 15

- 21) (UFRGS 2017) Em um triângulo ABC, \hat{BAC} é o maior ângulo e \hat{ACB} é o menor ângulo. A medida do ângulo \hat{BAC} é 70° maior que a medida de \hat{ACB} . A medida de \hat{BAC} é o dobro da medida de \hat{ABC} .

Portanto, as medidas dos ângulos são

- 20°, 70° e 90°.
- 20°, 60° e 100°.
- 10°, 70° e 100°.
- 30°, 50° e 100°.
- 30°, 60° e 90°.

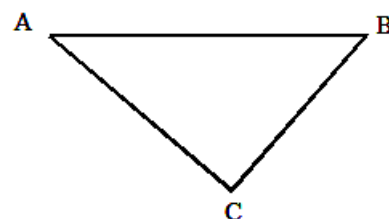
- 22) A ilustração a seguir mostra um elemento sustentado pelo cabo e pelos pontos de apoio.



Se o triângulo ABC é isósceles de base AC, o valor da soma das medidas dos ângulos α e β , em graus, para garantir a sustentação e estabilização do sistema com os ângulos indicados é

- a) 50°. b) 55°. c) 60°. d) 65°. e) 70°.

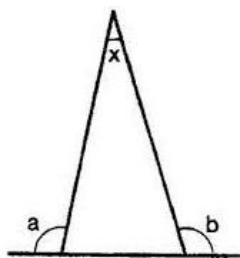
- 23) (UNIFICADO) Na figura a seguir, os pontos A, B e C representam as posições de três casas construídas numa área plana de um condomínio. Um posto policial estará localizado num ponto P situado à mesma distância das três casas.



Em Geometria, o ponto P é conhecido pelo nome de

- baricentro.
- ortocentro.
- circuncentro.
- incentro.
- ex-incentro.

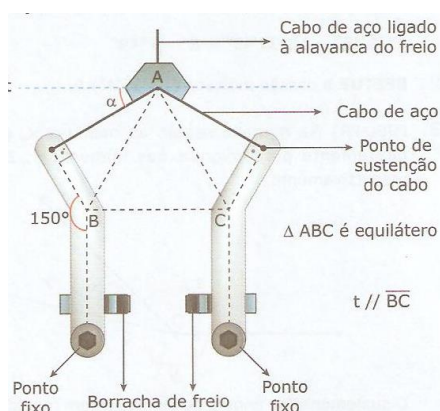
24) (PUC-SP) Na figura a seguir, $a=100^\circ$ e $b=110^\circ$.



Quanto mede o ângulo x ?

a) 30° . b) 50° . c) 80° . d) 100° . e) 220° .

25) O modelo de freio apresentado na figura é conhecido como cantilever e está ilustrado em sua posição de repouso.



Na ilustração, o triângulo ABC é equilátero e a reta t é paralela ao segmento BC. O valor da medida do ângulo α configurado para essa posição é

a) 30° . b) 35° . c) 40° . d) 45° . e) 50° .

26) (EPCAR 2013) Samuel possui 12 palitos iguais e resolveu formar um único triângulo por vez, usando os 12 palitos sem parti-los.

Ele verificou que é possível formar x triângulos retângulos, y triângulos isósceles, z triângulos equiláteros e w triângulos escalenos. A soma $x + y + z + w$ é igual a

a) 7 b) 6 c) 5 d) 4 e) 10

27) Eis um brinquedo que desafia a lógica. Esse pássaro não voa, mas foi especialmente criado para que, quando o seu bico for colocado em qualquer superfície pontiaguda, por exemplo, em um dedo, lá se mantenha em perfeito equilíbrio sem cair. Guilherme ficou curioso e resolveu procurar uma explicação para tal fato. Para isso, construiu um triângulo com vértices coincidindo com as pontas das asas e a cauda do pássaro. Após a construção, ele percebeu que o bico coincidia exatamente com um dos pontos notáveis do triângulo e que ele apresentava uma importante propriedade física, pois estava localizado no ponto de encontro das



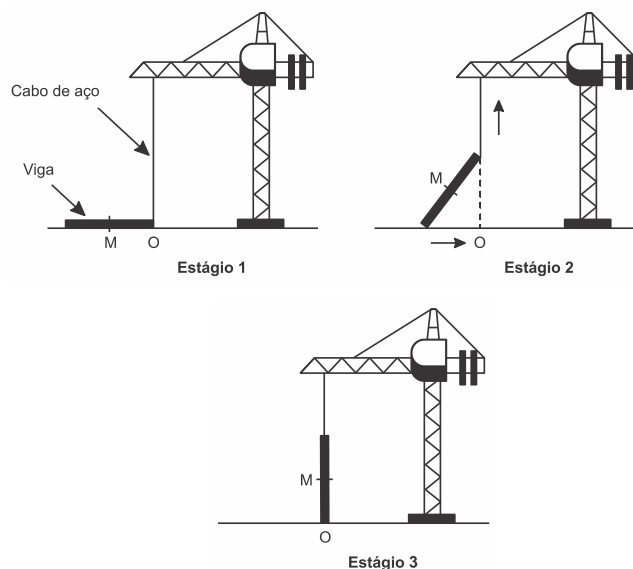
a) Alturas. b) Bissetrizes externas.
c) Bissetrizes internas. d) Mediatrizes.
e) Medianas.

28) (CEESP) Dentre os quatro centros principais de um triângulo qualquer, há dois deles que podem se situar no exterior conforme o tipo de triângulo. Assinale a alternativa em que os mesmos são citados.

a) o baricentro e o ortocentro
b) o baricentro e o incentro
c) o circuncentro e o incentro
d) o circuncentro e o ortocentro
e) o incentro e o ortocentro

EXERCÍCIOS ENEM

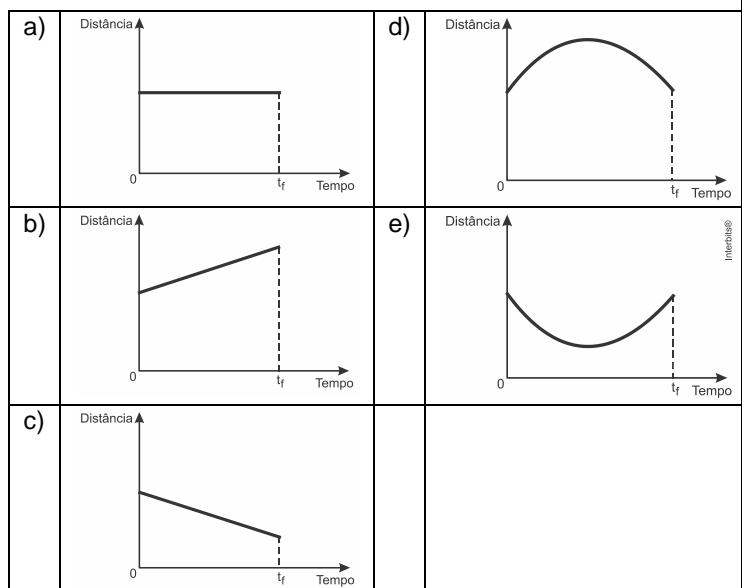
01)(ENEM 2018) Os guindastes são fundamentais em canteiros de obras, no manejo de materiais pesados como vigas de aço. A figura ilustra uma sequência de estágios em que um guindaste iça uma viga de aço que se encontra inicialmente no solo.



Na figura, o ponto O representa a projeção ortogonal do cabo de aço sobre o plano do chão e este se mantém na vertical durante todo o movimento de içamento da viga, que se inicia no tempo $t = 0$ (estágio 1) e finaliza no tempo t_f (estágio 3). Uma das extremidades da viga é içada verticalmente a partir do ponto O, enquanto que a outra extremidade desliza sobre o solo em direção ao ponto O. Considere que o cabo de aço utilizado pelo guindaste para içar a viga fique sempre na po-

sição vertical. Na figura, o ponto M representa o ponto médio do segmento que representa a viga.

O gráfico que descreve a distância do ponto M ao ponto O, em função do tempo, entre $t = 0$ e t_f , é



- d) no vértice de um triângulo equilátero de base AB, oposto a essa base.
e) no ponto médio da estrada que liga as estações A e B.

LINKS PARA AS VÍDEO-AULAS

Ângulos – Aula 01

<https://www.youtube.com/watch?v=0CnUdzmpO8E&t=915s>

Ângulos – Aula 02

<https://www.youtube.com/watch?v=pyb-5syEWdl&t=678s>

Triângulos – Aula 01

<https://www.youtube.com/watch?v=TyyTOVjo3D0&t=628s>

Triângulos – Aula 02

<https://www.youtube.com/watch?v=3x920GHf4q&t=1078s>

Triângulos – Aula 03

<https://www.youtube.com/watch?v=dAZ-mUZbA-A>

EXERCÍCIOS DE AULA

01) A	02) A	03) B
04) C	05) C	06) E
07) A	08) D	09) A
10) A	11) E	12) D

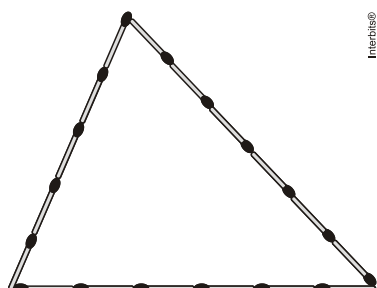
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01) A	02) E	03) D
04) E	05) E	06) A
07) D	08) A	09) D
10) D	11) E	12) B
13) E	14) B	15) D
16) A	17) D	18) B
19) E	20) B	21) D
22) C	23) C	24) A
25) A	26) C	27) E
28) D		

EXERCÍCIOS ENEM

01) A	02) A	03) E
-------	-------	-------

02) (ENEM 2014) Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.



A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é

- a) 3. b) 5. c) 6. d) 8. e) 10.

03) (ENEM 2005) Quatro estações distribuidoras de energia A, B, C e D estão dispostas como vértices de um quadrado de 40km de lado. Deseja-se construir uma estação central que seja ao mesmo tempo equidistante das estações A e B e da estrada (reta) que liga as estações C e D. A nova estação deve ser localizada

- a) no centro do quadrado.
b) na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 15km dessa estrada.
c) na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 25km dessa estrada.

