

# MA093 – Matemática básica 2

## Equações trigonométricas

Francisco A. M. Gomes

UNICAMP - IMECC

Setembro de 2018

# Tópicos importantes

O objetivo dessa aula é investigar

A resolução de equações trigonométricas:

- 1 Equações simples.
- 2 Equações quadráticas.
- 3 Equações com produto nulo.
- 4 Uso de identidades para resolver equações.

# Equação simples envolvendo o seno

## Problema

Resolver a equação  $\text{sen}(\theta) = \sqrt{2}/2$ .

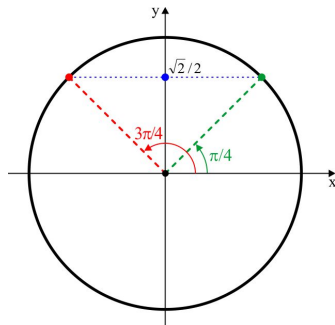
- $\text{sen}(\theta) > 0$  no 1º e 2º quadrantes.
- Restringindo  $\theta$  ao intervalo  $[0, 2\pi]$ :

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

- Para  $\theta \in \mathbb{R}$ :

$$\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

em que  $n$  é um inteiro qualquer.



# Equação simples envolvendo o cosseno

## Problema

Resolver a equação  $2\cos(\theta) = 1$ .

- Isolando  $\cos(\theta)$ , obtemos

$$\cos(\theta) = 1/2.$$

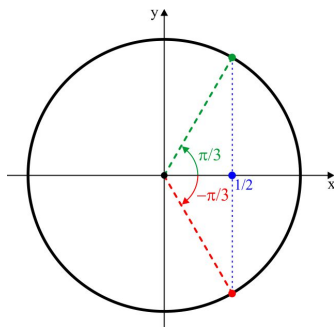
- Restringindo  $\theta$  ao intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ :

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \theta = -\frac{\pi}{3}$$

- Para  $\theta \in \mathbb{R}$ :

$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \quad \text{ou} \quad \theta = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

em que  $n$  é um inteiro qualquer.



# Equação simples envolvendo a tangente

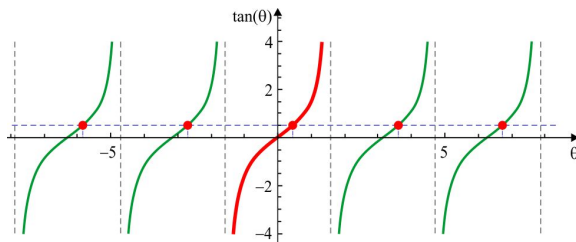
## Problema

Resolver a equação  $\tan(\theta) = 1/2$ .

- Restringindo  $\theta$  ao intervalo  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , obtemos

$$\theta = \arctan(1/2) \approx 0,4636 \text{ rad.}$$

- Entretanto, o período da tangente é  $\pi$ .
- Assim, para  $\theta \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{Z}$ , temos  $\theta = 0,4636 + \pi n$ .



# Problema restrito a um intervalo

## Problema

Resolver

$$\tan(\theta) = 5 - 2\tan(\theta),$$

para  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ .

- Nesse caso, temos

$$\tan(\theta) + 2\tan(\theta) = 5 \quad \rightarrow \quad 3\tan(\theta) = 5 \quad \rightarrow \quad \tan(\theta) = \frac{5}{3}.$$

- Como  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ , obtemos diretamente

$$\theta = \arctan(5/3) \approx 1,0304 \text{ rad.}$$

# Problema restrito a um intervalo

## Problema

### Resolver

$$2\cos(\theta/3) - \sqrt{3} = 0,$$

para  $0 \leq \theta \leq 3\pi$ .

- Nesse caso, temos

$$2\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- Como  $0 \leq \theta \leq 3\pi$ , temos  $0 \leq \frac{\theta}{3} \leq \pi$ . Assim,

$$\frac{\theta}{3} = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

- Logo,  $\theta = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ .

# Equação quadrática

## Problema

### Resolver

$$\tan^2(\theta) - 3 = 0,$$

para  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ .

- Nesse caso,

$$\tan^2(\theta) = 3 \quad \rightarrow \quad \tan(\theta) = \pm\sqrt{3}.$$

- Como  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ , obtemos

$$\tan(\theta) = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \theta = \arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$$

$$\tan(\theta) = -\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \theta = \arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/3$$



# Equação quadrática

## Problema

Resolver  $6\text{sen}^2(\theta) - 5\text{sen}(\theta) + 1 = 0$ , para  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

- Substituindo  $\text{sen}(\theta) = x$  na equação, obtemos

$$6x^2 - 5x + 1 = 0.$$

- Usando Bháskara, vem

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{2 \cdot 6} \rightarrow x = \frac{5 \pm 1}{12}$$

$$x = 1/2 \quad \text{ou} \quad x = 1/3.$$

- Lembrando que  $x = \text{sen}(\theta)$ , obtemos

$$\text{sen}(\theta) = 1/2 \quad \rightarrow \quad \theta = \text{arcsen}(1/2) = \pi/6$$

$$\text{sen}(\theta) = 1/3 \quad \rightarrow \quad \theta = \text{arcsen}(1/3) \approx 0,32745$$

# Produto igual a zero

## Problema

Resolver  $(\text{sen}(\theta) - 1/2)(\tan(\theta) - 1) = 0$ , para  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ .

- O produto  $a \cdot b$  só é zero se  $a = 0$  ou  $b = 0$ . Logo

$$\text{sen}(\theta) - 1/2 = 0 \quad \text{ou} \quad \tan(\theta) - 1 = 0$$

- Analisando em separado cada caso:

$$\text{sen}(\theta) - \frac{1}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{sen}(\theta) = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \theta = \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\tan(\theta) - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \tan(\theta) = 1 \quad \rightarrow \quad \theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

- Solução:  $\theta = \pi/6$  ou  $\theta = \pi/4$

# Usando identidades para resolver equações

## Problema

Resolver  $2 - 3\operatorname{sen}^2(\theta) = \cos^2(\theta)$ , para  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

Como  $\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ , temos  $\cos^2(\theta) = 1 - \operatorname{sen}^2(\theta)$ . Logo,

$$2 - 3\operatorname{sen}^2(\theta) = 1 - \operatorname{sen}^2(\theta)$$

$$1 = 2\operatorname{sen}^2(\theta) \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}^2(\theta) = 1/2$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Solução: } \theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ ou } \theta = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

# Exercício 1

## Problema

Resolva a equação

$$\operatorname{sen}(x) = 3 - 7\operatorname{sen}(x)$$

para  $0 \leq x \leq \pi/2$ . Use radianos.

$$x \approx 0,3844$$

## Exercício 2

### Problema

Resolva a equação

$$\tan^2(2x) = 4$$

para  $0 < x < \pi/4$ . Use radianos.

$$x \approx 0,5536$$

## Exercício 3

### Problema

Resolva a equação

$$8\cos^2(x) - 14\cos(x) + 3 = 0$$

para  $0 \leq x \leq \pi/2$ . Use radianos.

$$x \approx 1.31812$$

## Exercício 4

### Problema

Resolva a equação

$$\sqrt{3}\tan(x) = 2\sin(x)$$

para  $0 \leq x < \pi/2$ . Use radianos.

$$x = 0 \text{ e } x = \pi/6 \approx 0,5236$$

# Exercício 5

## Problema

Resolva a equação

$$3\operatorname{sen}(x)\tan(x) - \sqrt{3}\operatorname{sen}(x) = 0$$

para  $0 \leq x \leq \pi/2$ . Use radianos.

$$x = 0 \text{ e } x = \pi/6 \approx 0,5236$$



## Exercício 6

### Problema

Resolva a equação

$$5\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = 2$$

para  $0 \leq x \leq \pi/2$ . Use radianos.

$$x = \pi/4 \approx 0,7854$$