

Definição de logaritmo de um número

Considere as seguintes questões. A que número x se deve elevar:

- a) o número 2 para se obter 8?
b) o número 3 para se obter $\frac{1}{81}$?

Acompanhe as resoluções:

a) $2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$

Esse valor 3 denomina-se **logaritmo** do número 8 na base 2 e é representado por $\log_2 8 = 3$. Assim:

$$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

b) $3^x = \frac{1}{81} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3^4} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-4} \Leftrightarrow x = -4$

O valor -4 chama-se **logaritmo** do número $\frac{1}{81}$ na base 3 e é representado por:

$$\log_3 \frac{1}{81} = -4$$

Fique atento!

Perceba que o logaritmo é um expoente.

Dados os números reais positivos a e b , com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente c chama-se **logaritmo de b na base a** , ou seja, **$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$** , com a e b positivos e $a \neq 1$.

Nessa equivalência temos:

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_a b = c$ $\begin{cases} c: \text{logaritmo} \\ a: \text{base de logaritmo} \\ b: \text{logaritmando} \end{cases}$	$a^c = b$ $\begin{cases} b: \text{potência} \\ a: \text{base da potência} \\ c: \text{expoente} \end{cases}$

Fique atento!

Quando dizemos **logaritmo**, estamos nos referindo a um número.

Veja mais alguns exemplos:

a) $\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$

c) $\log_{\sqrt{5}} 5 = 2 \Leftrightarrow (\sqrt{5})^2 = 5$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$

d) $\log_8 1 = 0 \Leftrightarrow 8^0 = 1$

Observações:

1ª) *Condições de existência do logaritmo*

Pela definição,

$$\log_a N \text{ existe quando e somente quando } \begin{cases} N > 0 \\ a > 0 \text{ e } a \neq 1 \end{cases}$$

Veja que, de acordo com as restrições impostas, não são definidos, por exemplo: $\log_3 (-81)$, $\log_{10} 0$, $\log_0 3$, $\log_{-2} 8$ e $\log_1 6$. Experimente aplicar a definição nesses casos.

2ª) Quando a base do logaritmo for 10, podemos omiti-la. Assim, $\log 2$ é o logaritmo de 2 na base 10. Aos logaritmos na base 10 damos o nome de **logaritmos decimais** ou de **Briggs**. Por exemplo, $\log 100 = \log 10^2 = 2$.

Consequências da definição de logaritmo

1ª) $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$, qualquer que seja $a > 0$ e $a \neq 1$.

2ª) $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$ para todo $a > 0$ e $a \neq 1$.

3ª) $\log_a a^n = n$, pois $a^n = a^n$ para todo $a > 0$ e $a \neq 1$ e para todo n .

4ª) $a^{\log_a N} = N$, com $N > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Justificativa: $\log_a N = x \Rightarrow a^x = N$

Substituindo x : $a^{\log_a N} = a^x = N$

5ª) $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$, com $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Justificativa: se $\log_a x = r$ e $\log_a y = s$, isto é, $a^r = x$ e $a^s = y$, temos:

$$\bullet x = y \Rightarrow a^r = a^s \Rightarrow r = s \Rightarrow \log_a x = \log_a y$$

$$\bullet \log_a x = \log_a y \Rightarrow r = s \Rightarrow a^r = a^s \Rightarrow x = y$$

Exercícios resolvidos

1. Determine o valor de:

a) $\log_2 128$;

b) $\log_{\sqrt{3}} 9$;

c) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3}$.

Resolução:

a) Representando por x o valor procurado, temos:

$$\log_2 128 = x \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} 2^x = 128 \Rightarrow 2^x = 2^7 \Rightarrow x = 7$$

Portanto, $\log_2 128 = 7$.

b) $\log_{\sqrt{3}} 9 = x \Rightarrow (\sqrt{3})^x = 9 \Rightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = 3^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^2 \Rightarrow \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow x = 4$$

Logo, $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$.

c) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3} = \log_{3^{-2}} \left(3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) = \log_{3^{-2}} 3^{\frac{3}{2}} = x \Rightarrow$

$$\Rightarrow (3^{-2})^x = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 3^{-2x} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow -2x = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{4}$$

Portanto, $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3} = -\frac{3}{4}$.

2. Determine os valores reais de x para os quais existe: $\log_2 (x - 3)$.

Resolução:

Como a base é 2 (positiva e diferente de 1), devemos impor que $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$.

Logo, $x \in \mathbb{R} \mid x > 3$.

3. Encontre o conjunto dos valores reais de x para os quais é possível determinar $\log_{x-2} (x^2 - 4x - 5)$.

Resolução:

• Pelas condições de existência, temos:

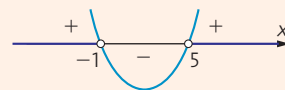
$$x^2 - 4x - 5 > 0$$

$$a = 1 > 0$$

$$\Delta = 36 > 0$$

$$x' = 5 \text{ e } x'' = -1$$

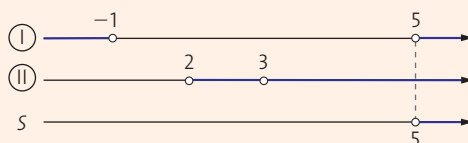
Estudo do sinal:



$$x < -1 \text{ ou } x > 5 \text{ (I)}$$

$$\bullet \begin{cases} x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3 \end{cases} \text{ (II)}$$

Satisfazendo simultaneamente as condições, estabelecemos o quadro de resolução:



Logo, o conjunto é $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$.

4. Calcule:

a) $2^{\log_5 10 \cdot \log_2 5}$

b) $2^{\frac{\log_2 3}{3}}$

c) $3^{1 + \log_3 5}$

Resolução:

a) $2^{\log_5 10 \cdot \log_2 5} = (2^{\log_2 5})^{\log_5 10} = 5^{\log_5 10} = 10$
propriedade das potências

b) $2^{\frac{\log_2 3}{3}} = 2^{\frac{1}{3} \cdot \log_2 3} = (2^{\log_2 3})^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$

c) $3^{1 + \log_3 5} = 3^1 \cdot 3^{\log_3 5} = 3 \cdot 5 = 15$

Propriedades operatórias dos logaritmos

Para a , M e N números reais positivos e $a \neq 1$, temos:

1ª) Logaritmo de um produto

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

Demonstração:

Consideramos $\log_a (M \cdot N) = p$; $\log_a M = m$ e $\log_a N = n$.

Dessas igualdades, tiramos $a^p = M \cdot N$; $a^m = M$ e $a^n = N$. Então:

$$a^p = M \cdot N = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Se $a^p = a^{m+n}$, então $p = m + n$, ou seja:

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

Conclusão:

Em uma mesma base, o logaritmo do produto de dois números positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números.

Exemplos:

a) $\log_7 (2 \cdot 5) = \log_7 2 + \log_7 5$

b) $\log 300 = \log (3 \cdot 100) = \log 3 + \log 100 = \log 3 + 2$

2ª) Logaritmo de um quociente

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

Demonstração:

Consideramos $\log_a \frac{M}{N} = q$; $\log_a M = m$ e $\log_a N = n$.

Daí tiramos $a^q = \frac{M}{N}$; $a^m = M$ e $a^n = N$. Então:

$$a^q = \frac{M}{N} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Se $a^q = a^{m-n}$, então $q = m - n$, ou seja, $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$.

Conclusão:

Em uma mesma base, o logaritmo do quociente de dois números positivos é igual à diferença entre os logaritmos desses números.

Exemplos:

a) $\log_5 \left(\frac{2}{3} \right) = \log_5 2 - \log_5 3$

b) $\log_2 \left(\frac{1}{8} \right) = \log_2 1 - \log_2 8 = 0 - 3 = -3$

Você sabia?

Essa propriedade de transformar produtos em somas foi a motivação original para a introdução dos logaritmos, no século XVII, com o objetivo de simplificar os cálculos.

Fique atento!

$\log 3 \cdot 2$ não é o mesmo que $\log (3 \cdot 2)$.

Fique atento!

Caso particular:

$$\log_a \frac{1}{N} = \log_a 1 - \log_a N =$$

$$= 0 - \log_a N, \text{ ou seja,}$$

$$\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N.$$

3ª) Logaritmo de uma potência

$$\log_a M^N = N \cdot \log_a M$$

Demonstração:

Consideramos $\log_a M^N = r$ e $\log_a M = m$.

Daí tiramos: $a^r = M^N$ e $a^m = M$.

Então:

$$a^r = M^N = (a^m)^N = a^{Nm}$$

Se $a^r = a^{Nm}$, então $r = Nm$, ou seja, $\log_a M^N = N \cdot \log_a M$.

Conclusão:

Em uma mesma base, o logaritmo de uma potência de base positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

Podemos aplicar essa propriedade no logaritmo de uma raiz (quando existir):

$$\log_a \sqrt[N]{M} = \log_a M^{\frac{1}{N}} = \frac{1}{N} \cdot \log_a M$$

Exemplos:

a) $\log_3 8^4 = 4 \cdot \log_3 8$

b) $\log 10^2 = 2 \cdot \log 10 = 2 \cdot 1 = 2$

c) $\log_7 5^3 = 3 \cdot \log_7 5$

d) $\log_2 \sqrt[3]{4} = \log_2 (4)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_2 4 = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$

Mudança de base do logaritmo

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b} \text{ para } N > 0, b > 0, a > 0; b \neq 1 \text{ e } a \neq 1$$

Demonstração:

Consideramos $\log_b N = p$; $\log_a N = q$ e $\log_a b = r$.

Daí tiramos: $b^p = N$; $a^q = N$ e $a^r = b$.

Fazendo substituições: $N = a^q = b^p = (a^r)^p = a^{rp}$.

Se $a^q = a^{rp}$, então $q = rp$ e daí $p = \frac{q}{r}$ ou $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$.

Conclusão:

Para escrever o $\log_b N$ usando logaritmos na base a , realizamos a mudança de base:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

Para refletir

Como garantir que $r \neq 0$?

$r = \log_a b$, a e b são números reais positivos e $a \neq 1$ e $b \neq 1$. Então $a^r \neq 1 \Rightarrow r \neq 0$.

Observação: Nessa propriedade, fazendo $N = a$, temos um caso importante:

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}$$

Então podemos escrever que, quando existirem os logaritmos envolvidos:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \text{ ou } \log_b a \cdot \log_a b = 1$$

Fique atento!

Quando existirem, $\log_b a$ e $\log_a b$ são números inversos.

Exemplos:

a) $\log_7 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 7}$ (na base 2)

b) $\log_7 5 = \frac{\log 5}{\log 7}$ (na base 10)

c) $\log_5 25 = 2 \Leftrightarrow \log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

d) $\log_b a = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \log_a b = -\frac{4}{3}$

O desenvolvimento logarítmico utiliza as propriedades para expandir uma expressão, de maneira que nos permite calcular o logaritmo de um produto, quociente ou potência, conhecendo apenas os logaritmos dos fatores do produto, dos termos do quociente ou da base da potência.

Exercícios resolvidos

5. Determine o desenvolvimento logarítmico da expressão $\log\left(\frac{a\sqrt{b}}{c^3}\right)$.

Resolução:

$$\log\left(\frac{a\sqrt{b}}{c^3}\right) = \log\left(\frac{a \cdot b^{\frac{1}{2}}}{c^3}\right) = \log a + \log b^{\frac{1}{2}} - \log c^3 =$$

$$= \log a + \log b^{\frac{1}{2}} - \log c^3 =$$

$$= \log a + \frac{1}{2} \cdot \log b - 3 \cdot \log c$$

$$\text{Portanto, } \log\left(\frac{a\sqrt{b}}{c^3}\right) = \log a + \frac{1}{2} \cdot \log b - 3 \cdot \log c.$$

Para refletir

O que significa desenvolvimento logarítmico?

6. Se $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, expresse $\log 72$ em função de a e b .

Resolução:

$$\log 72 = \log (2^3 \cdot 3^2) = \log 2^3 + \log 3^2 =$$

$$= 3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 = 3a + 2b$$

$$\text{Então, } \log 72 = 3a + 2b.$$

7. Escreva $\log_2 8$ usando logaritmos na base 10.

Resolução:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \Rightarrow \log_2 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 2}$$

8. Dados $\log_a m = 11$ e $\log_a n = 6$, qual é o valor de $\log_a (m^3 n^2)$?

Resolução:

$$\log_a (m^3 n^2) = \log_a m^3 + \log_a n^2 =$$

$$= 3 \cdot \log_a m + 2 \cdot \log_a n = 3 \cdot 11 + 2 \cdot 6 = 45$$

$$\text{Então, } \log_a (m^3 n^2) = 45.$$

9. Dado $\log_b a = 6$, calcule $\log_a b^3$.

Resolução:

$$\log_a b^3 = \frac{\log_b b^3}{\log_b a} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

10. Escreva as expressões a seguir por meio de um único logaritmo:

a) $3 \cdot \log_4 7$;

b) $\log_3 x - \log_3 2$;

c) $\log_{\frac{1}{2}} 6 + \log_{\frac{1}{2}} 3$;

d) $\log_5 4 + \log_5 x - \log_5 3$.

Resolução:

a) $3 \cdot \log_4 7 = \log_4 7^3 = \log_4 343$

b) $\log_3 x - \log_3 2 = \log_3 \frac{x}{2}$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 6 + \log_{\frac{1}{2}} 3 = \log_{\frac{1}{2}} (6 \cdot 3) = \log_{\frac{1}{2}} 18$

d) $\log_5 4 + \log_5 x - \log_5 3 = \log_5 (4x) - \log_5 3 = \log_5 \frac{4x}{3}$

Exercícios

ATENÇÃO!
Não escreva no
seu livro!

- Usando a definição de logaritmo, calcule:
 - $\log_3 27$ **3**
 - $\log_5 125$ **3**
 - $\log 10\,000$ **4**
 - $\log_{\frac{1}{2}} 32$ **-5**
 - $\log_{10} 0,01$ **-2**
 - $\log_2 0,5$ **-1**
 - $\log_2 \sqrt{8}$ **$\frac{3}{2}$**
 - $\log_4 \sqrt{32}$ **$\frac{5}{4}$**
 - $\log_{\frac{1}{4}} 16$ **-2**
- Determine o valor da base a nas igualdades a seguir:
 - $\log_a 8 = 3$ **$a = 2$**
 - $\log_a 81 = 4$ **$a = 3$**
 - $\log_a 1 = 0$ **$\forall a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$**
 - $\log_a \frac{1}{16} = 2$ **$a = \frac{1}{4}$**
- Determine x nas igualdades:
 - $\log_2 64 = x$ **$x = 6$**
 - $\log_x 126 = 3$ **$x = \sqrt[3]{126}$**
 - $2 = \log_x 625$ **$x = 25$**
 - $\log x = 0$ **$x = 1$**
- Ache os valores reais de x para os quais é possível determinar:
 - $\log_5 x$ **$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$**
 - $\log_{10} (x - 3)$ **$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$**
 - $\log_4 (x^2 - 16)$ **$\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 4\}$**
- Determine os valores de x para que exista:
 - $\log_{x-5} 10$ **$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5 \text{ e } x \neq 6\}$**
 - $\log_{2x-1} \sqrt{3}$ **$\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2} \text{ e } x \neq 1\}$**
- ATIVIDADE EM DUPLA** Determinem o conjunto dos valores reais de x para que seja possível definir:
 - $\log_x (x - 3)$ **$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$**
 - $\log_{x-1} (x + 4)$ **$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ e } x \neq 2\}$**
- ATIVIDADE EM DUPLA** Classifiquem em verdadeiro (V) ou falso (F):
 - $\log_5 1 = 1$ **F**
 - $\log_1 5 = 5$ **F**
 - $\log_5 5 = 1$ **V**
 - $\log_5 1 = 0$ **V**
 - $\log_7 3^7 = 3$ **F**
 - $\log_3 3^7 = 7$ **V**
 - $2^{\log_2 5} = 5$ **V**
 - $2^{\log_5 2} = 5$ **F**
- ATIVIDADE EM DUPLA** Calculem o valor das expressões:
 - $10^{\log_{10} 3}$ **3**
 - $2^{\log_2 5}$ **5**
 - $2^{\log_2 6 \cdot \log_6 10}$ **10**
 - $3^{\log_2 7 \cdot \log_3 2}$ **7**
 - $2^{1 + \log_2 3}$ **6**
 - $2^{2 + 3 \log_2 5}$ **500**
- Determine o desenvolvimento logarítmico das expressões:
 - $\log (x^3 y)$ **$3 \cdot \log x + \log y$**
 - $\log \left(\frac{\pi r^3 h}{3} \right)$ **$\frac{1}{2} \cdot \log_3 x - 2 \cdot \log_3 y$**
- Escreva na forma de um único logaritmo.
 - $\log_5 6 + \log_5 11$ **$\log_5 66$**
 - $\log_7 28 - \log_7 4$ **1**
 - $4 \cdot \log 3$ **$\log 81$**
 - $\frac{\log_2 3}{\log_8 7}$ **$\log_7 27$**
 - $\frac{1}{3} \cdot \log_3 7 - \log_3 2$ **$\log_3 \left(\frac{\sqrt[3]{7}}{2} \right)$**
 - $1 + \log_5 4$ **$\log_5 20$**
- Dados $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, determine:
 - $\log 6$ **$a + b$**
 - $\log 24$ **$3a + b$**
 - $\log 300$ **$2 + b$**
 - $\log 1,5$ **$b - a$**
 - $\log 16$ **$4a$**
 - $\log_3 2$ **$\frac{a}{b}$**
- Dados $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$, determine:
 - $\log 5$ **$1 - x$**
 - $\log \sqrt{3}$ **$\frac{y}{2}$**
 - $\log \sqrt[3]{12}$ **$\frac{2x + y}{3}$**
 - $\log \frac{1}{3}$ **$-y$**
 - $\log 0,06$ **$x + y - 2$**
 - $\log_4 27$ **$\frac{3y}{2x}$**
- Dados $\log a = 5$, $\log b = 3$ e $\log c = 2$, calcule o valor de $\log \left(\frac{ab^2}{c} \right)$. **9**
- ATIVIDADE EM DUPLA** Sendo $\log_a 2 = 20$ e $\log_a 5 = 30$, calculem o valor de $\log_a 100$. **100**
- ATIVIDADE EM DUPLA** Determinem a expressão P sabendo que:
 - $\log P = 2 \cdot \log a + 5 \cdot \log b$ **$P = a^2 b^5$**
 - $\log_2 P = 3 \cdot \log_2 a + \log_2 b - 2 \cdot \log_2 c$ **$P = \frac{a^3 b}{c^2}$**
- ATIVIDADE EM DUPLA** Sabendo que $x = \log_{10} 5 + \log_{10} 8 - \log_{10} 4$, calculem o valor de x . **$x = 1$**
- ATIVIDADE EM DUPLA** Escrevam usando logaritmos de base 10:
 - $\log_2 5$ **$\frac{\log 5}{\log 2}$**
 - $\log_x 2$ **$\frac{\log 2}{\log x}$**
- ATIVIDADE EM DUPLA** Determinem o número cujo logaritmo na base a é 4 e na base $\frac{a}{3}$ é 8. **3^8**
- ATIVIDADE EM DUPLA** Calculem $\log_3 5 \cdot \log_4 27 \cdot \log_{25} \sqrt{2}$. **$\frac{3}{8}$**
- ATIVIDADE EM DUPLA** Sabendo que $\log_{20} 2 = a$ e $\log_{20} 3 = b$, calculem o valor de $\log_6 5$. **$\frac{1-2a}{a+b}$**

Cálculo de logaritmos

Acompanhe a seguinte situação:

Em Química, define-se o pH de uma solução como o logaritmo decimal (base 10) do inverso da respectiva concentração de H_3O^+ (ion hidroxônio). O cérebro humano contém um líquido cuja concentração de H_3O^+ é $4,8 \cdot 10^{-8} \text{ mol/l}$ (em média). Qual será o pH desse líquido?

De acordo com a definição e os dados do problema, temos:

$$\text{pH} = \log_{10} \left(\frac{1}{4,8 \cdot 10^{-8}} \right) = \log_{10} 1 - \log_{10} (4,8 \cdot 10^{-8}) = \log_{10} 1 - \log_{10} 4,8 - \log_{10} 10^{-8} =$$

$$= 0 - \log_{10} 4,8 - (-8) = 8 - \log_{10} 4,8$$

$$\text{Portanto, } \text{pH} = 8 - \log_{10} 4,8.$$

Para logaritmos como esse, existem três formas de cálculo, que serão estudadas a seguir:

- com o auxílio da calculadora;
- com a aplicação de tabelas de valores (tabelas de logaritmos);
- por meio de alguns logaritmos dados.

Com a difusão do uso da calculadora, a utilização das tabelas de logaritmos hoje está praticamente abolida.

Algumas calculadoras possuem duas teclas com as seguintes funções:

- tecla **log**: permite calcular o logaritmo decimal de um número N , inteiro ou decimal;
- tecla **10^x** : permite calcular o número N quando se conhece $\log N = x$.

Usando essas teclas, as propriedades dos logaritmos e as quatro operações fundamentais, é possível realizar os seguintes cálculos:

a) $\log 36$

digita-se 36 → tecla-se **log** → 1,556303

$$\log 36 \approx 1,556303$$

b) $\log \sqrt[3]{4,57} = \frac{1}{3} \cdot \log 4,57$

digita-se 4,57 → tecla-se **log** → 0,659916 : 3 = 0,219972

$$\log \sqrt[3]{4,57} \approx 0,219972$$

c) $\log_2 997 = \frac{\log 997}{\log 2}$ (realizou-se a mudança de base)

Usando a tecla **log**, calcula-se $\log 997 \approx 2,998695$ e $\log 2 \approx 0,301030$.

$$\log_2 997 \approx \frac{2,998695}{0,301030} \approx 9,961449$$

d) $\log_{10} x = 0,72342$

digita-se 0,72342 → tecla-se **10^x** → 5,289566

$$\log 5,289566 \approx 0,72342$$

e) Podemos resolver o problema do líquido cerebral usando a calculadora, obtemos $\log 4,8 \approx 0,681241$.

$$\text{Assim, } \text{pH} = 8 - 0,681241 \approx 7,3.$$

Fique atento!

Aqui temos uma conexão com Química.



David Birrell/Shutterstock/Glow Images

Fique atento!

A maioria dos celulares tem um aplicativo de calculadora com a função **log**. Em algumas calculadoras, para obter $\log N$ digita-se primeiro log e depois N .

Você sabia?

Existem calculadoras com a tecla **ln**, que permite calcular os logaritmos naturais dos números reais positivos. Os logaritmos naturais têm a base **e**, ou seja, $\ln x = \log_e x$ (logaritmo natural de x). O número **e**, base dos logaritmos naturais, é caracterizado pelo fato de que seu logaritmo natural é igual a 1, ou seja, $\ln e = 1$. O número **e** é irracional. Um valor aproximado dessa importante constante é $e = 2,7182\dots$, como já vimos no capítulo anterior.

A partir de um ou mais logaritmos dados, podemos obter o valor aproximado de uma infinidade de logaritmos, usando as propriedades conhecidas. Por exemplo:

Dados $\log 2 \approx 0,30$ e $\log 3 \approx 0,48$, podemos calcular:

- $\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0,30 + 0,48 = 0,78$
- $\log 8 = \log 2^3 = 3 \cdot \log 2 = 3 \cdot 0,30 = 0,90$
- $\log \sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \log 3 = \frac{1}{2} \cdot 0,48 = 0,24$
- $\log 5 = \log (10 : 2) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,30 = 0,70$
- $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0,48}{0,30} = 1,60$
- $\log_9 32 = \frac{\log 32}{\log 9} = \frac{\log 2^5}{\log 3^2} = \frac{5 \cdot \log 2}{2 \cdot \log 3} = \frac{5 \cdot 0,30}{2 \cdot 0,48} = \frac{1,50}{0,96} = 1,5625$

Também podemos aplicar o conceito de logaritmo para resolver problemas que envolvem potências. Acompanhe:

Sabendo que $\log 2 = 0,301$, vamos calcular o número de algarismos da potência 5^{100} .

$$x = 5^{100} \Rightarrow \log x = 100 \cdot \log 5 \Rightarrow \log x = 100 \cdot \log \frac{10}{2} = 100(1 - 0,301) = 69,9$$

Então, se $\log x = 69,9$, pela definição temos $x = 10^{69,9}$.

Como 10^{70} é o primeiro número com 71 algarismos ($10^{70} = 1$ seguido de 70 zeros), então necessariamente $10^{69,9}$ tem 70 algarismos.

Exercícios

21. Com o auxílio de uma calculadora, calcule utilizando as teclas das quatro operações fundamentais, a tecla **log** e a **10^x** (caso não tenha uma calculadora à disposição, indique o roteiro para efetuar o cálculo):

- $\log 64,3$; Aproximadamente 1,808.
- $\log 0,00196$; Aproximadamente -2,708.
- x tal que $\log x = 1,35$; Aproximadamente 22,387.
- $\log 914$; Aproximadamente 2,961.
- $\log 0,820$; Aproximadamente -0,086.
- x tal que $\log x = -1,155$. $x = 0,07$

22. Sem usar calculadora, determine entre quais inteiros consecutivos fica cada logaritmo:

- $\log 279$; Entre 2 e 3.
- $\log 6$; Entre 0 e 1.
- $\log 0,071$; Entre -2 e -1.
- $\log_7 2$. Entre 0 e 1.

23. Calcule:

- $\log 100$; 2
- $\log 0,00001$; -5
- $\log 0,001$; -3
- $\log 10\,000\,000$. 7

24. Dados $\log 2 = 0,30$; $\log 3 = 0,48$ e $\log 5 = 0,70$, calcule:

- $\log 20$; 1,30
- $\log 0,0002$; -3,70
- $\log 0,3$; -0,52
- $\log 18$; 1,26
- $\log 45$; 1,66
- $\log 250$. 2,40

25. **ATIVIDADE EM DUPLA** Dados $\log 2 = 0,30$ e $\log 7 = 0,85$, determine:

- $\log 14$; 1,15
- $\log 50$; 1,70
- $\log 3,5$; 0,55
- $\log 70$. 1,85

26. Calcule, com aproximação de duas casas decimais e usando mudança de base, os logaritmos:

- $\log_2 3$; 1,60
- $\log_5 3$; 0,69
- $\log_8 9$; 1,07
- $\log_{100} 5$. 0,35

Fique atento!

Se não tiver uma calculadora, use $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$.

27. **ATIVIDADE EM DUPLA** Sabendo que $\log 52 = 1,7160$, determinem o número de algarismos da potência 52^{1000} . 1717 algarismos.

28. **ATIVIDADE EM DUPLA** Química

O pH de uma solução é o logaritmo decimal do inverso da concentração de H_3O^+ . Qual é o pH de uma solução cuja concentração de H_3O^+ é $4,5 \cdot 10^{-5} \text{ mol/l}$? pH = 4,347

Aplicação dos logaritmos na resolução de equações exponenciais e de problemas

Exercícios resolvidos

11. Resolva a equação $3^x = 5$.

Resolução:

$$3^x = 5 \Rightarrow \log 3^x = \log 5 \Rightarrow x \cdot \log 3 = \log 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 3} \Rightarrow x \approx \frac{0,69897}{0,47712} \approx 1,46$$

$$S = \{1,46\}$$

12. Dados $\log 2 = 0,30$; $\log 3 = 0,48$ e $\log 5 = 0,70$, resolva a equação $5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 12 = 0$.

Resolução:

$$5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 12 = 0 \Rightarrow (5^x)^2 - 7(5^x) + 12 = 0$$

Fazendo $5^x = y$, temos:

$$y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4(1)(12) = 1$$

$$y' = 4 \text{ e } y'' = 3$$

Daí:

$$\bullet 5^x = 4 \Rightarrow \log 5^x = \log 4 \Rightarrow \log 5^x = \log 2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \log 5 = 2 \cdot \log 2 \Rightarrow x = \frac{2 \cdot \log 2}{\log 5} = \frac{0,60}{0,70} \approx 0,86$$

$$\bullet 5^x = 3 \Rightarrow \log 5^x = \log 3 \Rightarrow x \cdot \log 5 = \log 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 5} = \frac{0,48}{0,70} \approx 0,69$$

$$S = \{0,69; 0,86\}$$

13. Sabemos que o número de bactérias em uma cultura, depois de um tempo t , é dado por $N = N_0 \cdot e^{rt}$, em que N_0 é o número inicial (quando $t = 0$) e r é a taxa de crescimento relativo. Em quanto tempo o número de bactérias dobrará se a taxa de crescimento contínuo é de 5% ao minuto?

Fique atento!

Se a taxa é de 5% ao minuto, o tempo t é dado em minutos.

Resolução:

Pelos dados do problema, a pergunta é: Em quanto tempo $N = 2N_0$?

Assim, temos:

$$N = N_0 \cdot e^{rt} \Rightarrow 2N_0 = N_0 \cdot e^{0,05t} \Rightarrow 2 = e^{0,05t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 2 = \ln e^{0,05t} \Rightarrow \ln 2 = 0,05t \cdot \underbrace{\ln e}_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 2 = 0,05t \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0,05}$$

Calculando $\ln 2$, obtemos $\ln 2 = 0,6931$; portanto:

$$t = \frac{0,6931}{0,05} \approx 13,8 \text{ min} = 13 \text{ min e } \frac{8}{10} \text{ min} =$$

$$= 13 \text{ min } 48 \text{ s}$$

O número de bactérias dobrará em 13 minutos e 48 segundos.

Fique atento!

O tempo não depende do número inicial de bactérias.

14. Em quantos anos 500 g de uma substância radioativa, que se desintegra a uma taxa de 3% ao ano, se reduzirão a 100 g? Use $Q = Q_0 \cdot e^{-rt}$, em que Q é a massa da substância, r é a taxa e t é o tempo em anos.

Resolução:

Sabemos que: $Q = Q_0 \cdot e^{-rt} \Rightarrow 100 = 500 \cdot e^{-0,03t}$, que é equivalente a:

$$\frac{1}{5} = e^{-0,03t} \Rightarrow \ln \left(\frac{1}{5} \right) = \ln e^{-0,03t} \Rightarrow \underbrace{\ln 1}_0 - \ln 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -0,03t \cdot \underbrace{\ln e}_1 = -\ln 5 = -0,03t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln 5}{0,03} = \frac{1,6094}{0,03} \approx 53,6$$

Aproximadamente 53,6 anos.

15. (Situação-problema do começo do capítulo)
Segundo o Banco Mundial, a previsão do crescimento demográfico na América Latina, no período de 2004 a 2020, é de 1,2% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população da América Latina vai dobrar se a taxa de crescimento continuar a mesma?

Resolução:

População do ano-base = P_0

População após um ano = $P_0(1,012) = P_1$

População após dois anos = $P_0(1,012)^2 = P_2$

:

População após x anos = $P_0(1,012)^x = P_x$

Supondo que a população dobrará em relação ao ano-base após x anos, temos:

$$P_x = 2P_0 = P_0(1,012)^x = 2P_0 \Rightarrow (1,012)^x = 2$$

Aplicando logaritmos, temos:

$$\log (1,012)^x = \log 2 \Rightarrow x \cdot \log 1,012 = \log 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 2}{\log 1,012} \approx \frac{0,30103}{0,00518} \approx 58$$

A população dobrará em 58 anos, aproximadamente.

Exercícios

29. Dados $\log 2 = 0,30$; $\log 3 = 0,48$; $\log 5 = 0,70$ e $\log e = 0,43$, resolva as equações:



- a) $2^x = 5$; $s = \{2,33\}$
- b) $e^x = 3$; $s = \{1,12\}$
- c) $5^x = e$; $s = \{0,61\}$
- d) $e^x - 6 = 0$. $s = \{1,81\}$

30. Calcule (com duas casas decimais) o valor de x que verifica a equação $3 \cdot 2^x = 10$, dados $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$. $x \approx 1,73$



31. Dados $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$, resolva a equação $3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$. $s = \{0,63; 1\}$



32. Determine o valor de x que verifica a equação $(1,12)^x = 3$, sendo dados $\log 2 = 0,30$, $\log 3 = 0,48$ e $\log 7 = 0,85$. $x = 9,60$



33. **ATIVIDADE EM DUPLA** A expressão $M = C(1 + i)^n$ nos permite calcular o montante M , resultante da aplicação do capital C a juros compostos, à taxa anual i , ao completar um período de n anos. Nessas condições, se o capital de R\$ 800 000,00 for aplicado a juros compostos e à taxa anual de 12%, após quanto tempo da aplicação serão obtidos juros no valor de R\$ 700 000,00?



Aproximadamente 5 anos e meio.

34. **ATIVIDADE EM DUPLA** Uma pessoa deposita uma quantia em caderneta de poupança à taxa de 2% ao mês. Em quantos meses a quantia depositada triplica? 56 meses.



35. **ATIVIDADE EM DUPLA** Uma pessoa coloca R\$ 1 000,00 em um fundo de aplicação que rende, em média, 1,5% ao mês. Em quantos meses essa pessoa terá no mínimo R\$ 1 300,00? 18 meses.



36. **ATIVIDADE EM DUPLA** Um cartão de crédito cobra juros de 9% a.m. sobre o saldo devedor. Um usuário desse cartão tem um saldo devedor de R\$ 505,00. Em quanto tempo essa dívida chegará a R\$ 600,00 se não for paga? (Dados: $\log 2 = 0,3$; $\log 3 = 0,48$; $\log 1,01 = 0,004$; $\log 1,09 = 0,038$.) 2 meses.

Texto para as questões 37 e 38

Física

A lei de resfriamento de Newton afirma que a diferença de temperatura entre um corpo e o meio que o contém decresce a uma taxa de variação proporcional à diferença de temperatura. Considerando ΔT_0 a diferença de temperatura no instante $t = 0$ e $\Delta T(t)$ a diferença em um instante t qualquer, essa lei se traduz pela expressão $\Delta T(t) = \Delta T_0 \cdot e^{-\alpha t}$, em que a constante α depende do corpo.

37. **ATIVIDADE EM DUPLA** Suponham que, em determinado local, cuja temperatura ambiente é de 30 °C, exista uma panela de água fervente no fogo. Em $t = 0$, o fogo é desligado e 5 min depois a temperatura da água é de 65 °C. Depois de quanto tempo, a partir do desligamento do fogo, a água atingirá a temperatura de 37 °C? (Considere $\log 2 = 0,3$.)

- a) 20 minutos e 40 segundos
- x b) 16 minutos e 40 segundos
- c) 12 minutos e 40 segundos
- d) 8 minutos e 40 segundos
- e) 4 minutos e 40 segundos

38. **ATIVIDADE EM DUPLA** Em um trecho de mata próximo à cidade, a polícia encontrou, por volta das 17 horas, um cadáver. O médico legista chegou às 17h20min e imediatamente mediu a temperatura do corpo, que era de 32,5 °C. Uma hora mais tarde, ele mediu novamente a temperatura e verificou que era de 31,5 °C. A temperatura ambiente (na mata) se manteve constante, a 16,5 °C. O legista considera que a temperatura normal de uma pessoa viva é 36,5 °C. De acordo com as temperaturas coletadas, e usando a lei do resfriamento de Newton, o horário da morte pode ser estimado por volta de:

(Dados: $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,47$.)

- a) 13h40min.
- d) 15h.
- x b) 14h.
- e) 14h50min.
- c) 14h40min.

Para os exercícios de 39 a 41 use a fórmula $Q = Q_0 \cdot e^{-rt}$, em que Q representa a massa da substância ou o número de bactérias, r a taxa e t o tempo.

39. Química

Uma substância radioativa se desintegra a uma taxa de 8% ao ano. Em quantos anos 50 g dessa substância se reduzirão a 5 g? Aproximadamente 28 anos, 9 meses e 18 dias.

40. Química

Em um laboratório, uma pessoa verifica que a taxa de crescimento relativo contínuo de bactérias em uma cultura é de 2,5% por minuto. Nessas condições, em quantos minutos o número de bactérias passará de 4 000 para 6 000? Aproximadamente 16 min 12 s.

41. Química

Calcule a meia-vida de uma substância radioativa que se desintegra a uma taxa de 4% ao ano. (Lembre-se: meia-vida é o tempo que deve decorrer para que, em certo momento, metade dos átomos de uma substância radioativa se desintegre.)

Aproximadamente 17 anos, 3 meses e 18 dias.