

Expressões fracionárias

Objetivos de aprendizagem

- Domínio de uma expressão algébrica.
- Simplificação de expressões racionais.
- Operações com expressões racionais.
- Expressões racionais compostas.

Domínio de uma expressão algébrica

Expressões algébricas são expressões matemáticas formadas por números e letras, ou somente letras. Um quociente de duas expressões algébricas, além de ser outra expressão algébrica, é uma **expressão fracionária**, ou simplesmente uma fração. Se o quociente pode ser escrito como a razão de dois polinômios, então a expressão fracionária é também chamada **expressão racional**. Vejamos:

$$\frac{x^2 - 5x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \frac{2x^3 - x^2 + 1}{5x^2 - x - 3}.$$

Observe que o primeiro exemplo é uma expressão fracionária, mas não é uma expressão racional, pois o denominador não é um polinômio. O segundo é tanto uma expressão fracionária como uma expressão racional, pois é formado pela razão de dois polinômios.

Os polinômios são definidos para todos os números reais, porém determinadas expressões algébricas não podem ser definidas para alguns valores. Então, chamamos **domínio da expressão algébrica** os números reais para os quais essa expressão algébrica é definida.

EXEMPLO 1 Verificação do domínio de expressões algébricas

(a) $3x^2 - x + 5$ (b) $\sqrt{x - 1}$ (c) $\frac{x}{x - 2}$

SOLUÇÃO

- (a) O domínio de $3x^2 - x + 5$, como de qualquer polinômio, é o conjunto de todos os números reais.
- (b) Como a raiz quadrada está definida para números reais não negativos, então essa expressão algébrica deve ter $x - 1 \geq 0$, isto é, $x \geq 1$. Em notação de intervalo, o domínio é $[1, +\infty[$.
- (c) Como não existe divisão por zero, então a expressão racional deve ter $x - 2 \neq 0$, isto é, $x \neq 2$. Portanto, o domínio é todo o conjunto dos números reais, com exceção do 2.

Simplificação de expressões racionais

Para simplificar uma expressão racional (ou número racional), eliminamos todos os fatores comuns do numerador e denominador até que a expressão fique em uma forma mais simples, isto é, em **forma reduzida**.

Em algumas expressões, temos primeiramente que deixar os fatores comuns evidentes, fatorando o numerador e o denominador em números primos. Lembre-se de que números primos são aqueles que só podem ser divididos por 1 ou por eles mesmos. Um produto de números primos é chamado de fator primo.

EXEMPLO 2 Simplificação de expressões racionais

Escreva $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$ na forma reduzida e verifique seu domínio.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} &= \frac{x(x - 3)}{(x + 3)(x - 3)} \\ &= \frac{x}{x + 3}, \quad x \neq 3 \text{ e } x \neq -3\end{aligned}$$

Pela forma reduzida, vemos que x não pode ser -3 , mas incluímos a condição $x \neq 3$ porque 3 não está no domínio da expressão racional original. Dessa forma, não deve estar também no domínio da expressão racional final. Portanto, o domínio dessa expressão racional é o conjunto dos números reais, exceto 3 e -3 .

Duas expressões racionais são consideradas **equivalentes** quando elas tiverem o mesmo domínio e os mesmos valores para todos os números no domínio. Isto é, a forma reduzida de uma expressão racional precisa ter o mesmo domínio que a sua expressão original. Essa é a razão que nos levou a adicionar a restrição $x \neq 3$ para a forma reduzida no Exemplo 2.

Operações com expressões racionais

Como mencionamos no início deste capítulo, as expressões racionais são frações. Portanto, as operações com essas expressões seguem as mesmas propriedades das operações com frações.

Observe que duas frações são **iguais** $\frac{u}{v} = \frac{z}{w}$, se, e somente se, $uw = vz$.

Operações com frações

Sejam u , v , w e z números reais, variáveis ou expressões algébricas. Considerando todos os denominadores diferentes de zero, temos:

Operação**Exemplo**

$$1. \frac{u}{v} + \frac{w}{v} = \frac{u + w}{v}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2 + 5}{3} = \frac{7}{3}$$

$$2. \frac{u}{v} + \frac{w}{z} = \frac{uz + vw}{vz}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{22}{15}$$

$$3. \frac{u}{v} \cdot \frac{w}{z} = \frac{uw}{vz}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

$$4. \frac{u}{v} \div \frac{w}{z} = \frac{u}{v} \cdot \frac{z}{w} = \frac{uz}{vw}$$

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

5. Para subtração, substitua “+” por “-” em 1 e 2.

Veja alguns exemplos da aplicação dessas propriedades nas operações com expressões racionais.

EXEMPLO 3 Multiplicação e divisão de expressões racionais

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{(2x^2 + 11x - 21)}{(x^3 + 2x^2 + 4x)} \cdot \frac{(x^3 - 8)}{(x^2 + 5x - 14)} \\ &= \frac{(2x - 3)\cancel{(x + 7)}}{x\cancel{(x^2 + 2x + 4)}} \cdot \frac{\cancel{(x - 2)}(x^2 + 2x + 4)}{\cancel{(x - 2)}\cancel{(x + 7)}} = \frac{2x - 3}{x}, \quad x \neq 2, \quad x \neq -7, \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & \frac{(x^3 + 1)}{(x^2 - x - 2)} \div \frac{(x^2 - x + 1)}{(x^2 - 4x + 4)} \\ &= \frac{(x^3 + 1)(x^2 - 4x + 4)}{(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 1)} \\ &= \frac{\cancel{(x + 1)}\cancel{(x^2 - x + 1)}(x - 2)^2}{\cancel{(x + 1)}\cancel{(x - 2)}\cancel{(x^2 - x + 1)}} \\ &= x - 2, \quad x \neq -1, \quad x \neq 2 \end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Soma de expressões racionais

$$\begin{aligned} \frac{x}{3x - 2} + \frac{3}{x - 5} &= \frac{x(x - 5) + 3(3x - 2)}{(3x - 2)(x - 5)} \\ &= \frac{x^2 - 5x + 9x - 6}{(3x - 2)(x - 5)} \\ &= \frac{x^2 + 4x - 6}{(3x - 2)(x - 5)} \end{aligned}$$

OBSERVE UM EXEMPLO

Vale notar que a expressão $x^2 + 4x - 6$ é um polinômio primo, portanto, não é possível fatorá-lo.

Se os denominadores das frações têm fatores comuns, então podemos encontrar o mínimo múltiplo comum desses polinômios. O **mínimo múltiplo comum** é o produto de todos os fatores primos encontrados nos denominadores, onde cada fator está elevado à sua maior potência.

EXEMPLO 5 Redução ao mesmo denominador (mínimo múltiplo comum)

Escreva a seguinte expressão como uma fração na forma reduzida.

$$\frac{2}{x^2 - 2x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2 - 4}$$

SOLUÇÃO

Os denominadores fatorados são $x(x - 2)$, x e $(x - 2)(x + 2)$, respectivamente. O menor denominador comum é $x(x - 2)(x + 2)$.

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x^2 - 2x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2 - 4} \\ &= \frac{2}{x(x - 2)} + \frac{1}{x} - \frac{3}{(x - 2)(x + 2)} \\ &= \frac{2(x + 2)}{x(x - 2)(x + 2)} + \frac{(x - 2)(x + 2)}{x(x - 2)(x + 2)} - \frac{3x}{x(x - 2)(x + 2)} \\ &= \frac{2(x + 2) + (x - 2)(x + 2) - 3x}{x(x - 2)(x + 2)} \\ &= \frac{2x + 4 + x^2 - 4 - 3x}{x(x - 2)(x + 2)} \\ &= \frac{x^2 - x}{x(x - 2)(x + 2)} \\ &= \frac{x(x - 1)}{x(x - 2)(x + 2)} \\ &= \frac{x - 1}{(x - 2)(x + 2)}, \quad x \neq 0, \quad x \neq -2 \text{ e } x \neq 2 \end{aligned}$$

Expressões racionais compostas

Em alguns casos, a expressão algébrica aparece em uma forma tão complicada que precisa ser antes transformada para uma forma mais fácil de ser trabalhada. Trata-se da **fração composta**, às vezes chamada **fração complexa**.

Esse tipo de expressão contém frações no numerador e no denominador, tal como no exemplo a seguir. Uma maneira de simplificar uma fração composta é escrever o numerador e o denominador como

frações simples e aplicar as propriedades da divisão de frações, isto é, inverter e multiplicar. Com a forma de uma expressão racional, basta escrever essa expressão na forma reduzida ou na forma mais simples.

EXEMPLO 6 Simplificação de uma fração composta

$$\begin{aligned} \frac{3 - \frac{7}{x+2}}{1 - \frac{1}{x-3}} &= \frac{\frac{3(x+2) - 7}{x+2}}{\frac{(x-3) - 1}{x-3}} \\ &= \frac{\frac{3x-1}{x+2}}{\frac{x-4}{x-3}} \\ &= \frac{(3x-1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}, \quad x \neq 3, \quad x \neq -2 \text{ e } x \neq 4 \end{aligned}$$

Outra forma de simplificar uma fração composta é multiplicar o numerador e o denominador pelo mínimo múltiplo comum de todas as frações existentes na expressão, como ilustrado no Exemplo 7.

EXEMPLO 7 Simplificação de outra fração composta

Simplifique a fração composta utilizando o mínimo múltiplo comum.

$$\frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

SOLUÇÃO

O menor denominador comum das quatro frações no numerador e no denominador é a^2b^2 .

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} &= \frac{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)a^2b^2}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)a^2b^2} \\ &= \frac{b^2 - a^2}{ab^2 - a^2b} \\ &= \frac{(b+a)(b-a)}{ab(b-a)} \\ &= \frac{b+a}{ab}, \quad a \neq b \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 8, reescreva como uma única fração.

1. $\frac{5}{9} + \frac{10}{9}$

2. $\frac{17}{32} - \frac{9}{32}$

3. $\frac{20}{21} \cdot \frac{9}{22}$

4. $\frac{33}{25} \cdot \frac{20}{77}$

5. $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$

6. $\frac{9}{4} \div \frac{15}{10}$

7. $\frac{1}{14} + \frac{4}{15} - \frac{5}{21}$

8. $\frac{1}{6} + \frac{6}{35} - \frac{4}{15}$

Nos exercícios de 9 a 18, indique o domínio da expressão algébrica. Os exercícios 15 e 16 contêm uma restrição da expressão racional original.

9. $5x^2 - 3x - 7$

10. $2x - 5$

11. $\sqrt{x-4}$

12. $\frac{2}{\sqrt{x+3}}$

13. $\frac{2x+1}{x^2+3x}$

14. $\frac{x^2-2}{x^2-4}$

15. $\frac{x}{x-1}, x \neq 2$

16. $\frac{3x-1}{x-2}, x \neq 0$

17. $x^2 + x^{-1}$

18. $x(x+1)^{-2}$

Nos exercícios de 19 a 26, encontre o numerador ou o denominador que está faltando, de modo que as duas expressões racionais sejam equivalentes.

19. $\frac{2}{3x} = \frac{?}{12x^3}$

20. $\frac{5}{2y} = \frac{15y}{?}$

21. $\frac{x-4}{x} = \frac{x^2-4x}{?}$

22. $\frac{x}{x+2} = \frac{?}{x^2-4}$

23. $\frac{x+3}{x-2} = \frac{?}{x^2+2x-8}$

24. $\frac{x-4}{x+5} = \frac{x^2-x-12}{?}$

25. $\frac{x^2-3x}{?} = \frac{x-3}{x^2+2x}$

26. $\frac{?}{x^2-9} = \frac{x^2+x-6}{x-3}$

Nos exercícios de 27 a 32, considere a fração original e sua forma reduzida do exemplo especificado. Explique por que a restrição dada é necessária na forma reduzida.

27. Exemplo 3a, $x \neq 2, x \neq -7$.

28. Exemplo 3b, $x \neq -1, x \neq 2$.

29. Exemplo 4, nenhum.

30. Exemplo 5, $x \neq 0$.

31. Exemplo 6, $x \neq 3$.

32. Exemplo 7, $a \neq b$.

Nos exercícios de 33 a 44, escreva a expressão na forma reduzida.

33. $\frac{18x^3}{15x}$

34. $\frac{75y^2}{9y^4}$

35. $\frac{x^3}{x^2-2x}$

36. $\frac{2y^2+6y}{4y+12}$

37. $\frac{z^2-3z}{9-z^2}$

38. $\frac{x^2+6x+9}{x^2-x-12}$

39. $\frac{y^2-y-30}{y^2-3y-18}$

40. $\frac{y^3+4y^2-21y}{y^2-49}$

41. $\frac{8z^3-1}{2z^2+5z-3}$

42. $\frac{2z^3+6z^2+18z}{z^3-27}$

43. $\frac{x^3+2x^2-3x-6}{x^3+2x^2}$

44. $\frac{y^2+3y}{y^3+3y^2-5y-15}$

Nos exercícios de 45 a 62, simplifique.

45. $\frac{3}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{9}$

46. $\frac{x+3}{7} \cdot \frac{14}{2x+6}$

47. $\frac{x+3}{x-1} \cdot \frac{1-x}{x^2-9}$

48. $\frac{18x^2-3x}{3xy} \cdot \frac{12y^2}{6x-1}$

49. $\frac{x^3-1}{2x^2} \cdot \frac{4x}{x^2+x+1}$

50. $\frac{y^3+2y^2+4y}{y^3+2y^2} \cdot \frac{y^2-4}{y^3-8}$

51. $\frac{2y^2+9y-5}{y^2-25} \cdot \frac{y-5}{2y^2-y}$

52. $\frac{y^2+8y+16}{3y^2-y-2} \cdot \frac{3y^2+2y}{y+4}$

53. $\frac{1}{2x} \div \frac{1}{4}$

54. $\frac{4x}{y} \div \frac{8y}{x}$

55. $\frac{x^2-3x}{14y} \div \frac{2xy}{3y^2}$

56. $\frac{7x-7y}{4y} \div \frac{14x-14y}{3y}$

57. $\frac{\frac{2x^2y}{(x-3)^2}}{\frac{8xy}{x-3}}$

58. $\frac{\frac{x^2-y^2}{2xy}}{\frac{y^2-x^2}{4x^2y}}$

59. $\frac{2x+1}{x+5} - \frac{3}{x+5}$

60. $\frac{3}{x-2} + \frac{x+1}{x-2}$

$$61. \frac{3}{x^2 + 3x} - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2 - 9}$$

$$62. \frac{5}{x^2 + x - 6} - \frac{2}{x - 2} + \frac{4}{x^2 - 4}$$

Nos exercícios de 63 a 70, simplifique a fração composta.

$$63. \frac{\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}}{\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}}$$

$$64. \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}$$

$$65. \frac{2x + \frac{13x - 3}{x - 4}}{2x + \frac{x + 3}{x - 4}}$$

$$66. \frac{2 - \frac{13}{x + 5}}{2 + \frac{3}{x - 3}}$$

$$67. \frac{\frac{1}{(x + h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h}$$

$$68. \frac{\frac{x + h}{x + h + 2} - \frac{x}{x + 2}}{h}$$

$$69. \frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

$$70. \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}$$

Nos exercícios de 71 a 74, escreva com expoentes positivos e simplifique.

$$71. \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) (x + y)^{-1}$$

$$72. \frac{(x + y)^{-1}}{(x - y)^{-1}}$$

$$73. x^{-1} + y^{-1}$$

$$74. (x^{-1} + y^{-1})^{-1}$$

54. $z^3 + 4^3 = (z + 4)[z^2 - (z)(4) + 4^2] = (z + 4)(z^2 - 4z + 16)$
55. $(3y)^3 - 2^3 = (3y - 2)[(3y)^2 + (3y)(2) + 2^2] = (3y - 2)(9y^2 + 6y + 4)$
56. $(4z)^3 + 3^3 = (4z + 3)[(4z)^2 - (4z)(3) + 3^2] = (4z + 3)(16z^2 - 12z + 9)$
57. $1^3 - x^3 = (1 - x)[1^2 + (1)(x) + x^2] = (1 - x)(1 + x + x^2) = (1 - x)(1 + x + x^2)$
58. $3^3 - y^3 = (3 - y)[3^2 + (3)(y) + y^2] = (3 - y)(9 + 3y + y^2) = (3 - y)(9 + 3y + y^2)$
59. $(x + 2)(x + 7)$
60. $(y - 5)(y - 6)$
61. $(z - 8)(z + 3)$
62. $(2t + 1)(3t + 1)$
63. $(2u - 5)(7u + 1)$
64. $(2v + 3)(5v + 4)$
65. $(3x + 5)(4x - 3)$
66. $(x - y)(2x - y)$
67. $(2x + 5y)(3x - 2y)$
68. $(3x + 7y)(5x - 2y)$
69. $(x^3 - 4x^2) + (5x - 20) = x^2(x - 4) + 5(x - 4) = (x - 4)(x^2 + 5)$
70. $(2x^3 - 3x^2) + (2x - 3) = x^2(2x - 3) + 1(2x - 3) = (2x - 3)(x^2 + 1)$
71. $(x^6 - 3x^4) + (x^2 - 3) = x^4(x^2 - 3) + 1(x^2 - 3) = (x^2 - 3)(x^4 + 1)$
72. $(x^6 + 2x^4) + (x^2 + 2) = x^4(x^2 + 2) + 1(x^2 + 2) = (x^2 + 2)(x^4 + 1)$
73. $(2ac + 6ad) - (bc + 3bd) = 2a(c + 3d) - b(c + 3d) = (c + 3d)(2a - b)$
74. $(3uw + 12uz) - (2vw + 8vz) = 3u(w + 4z) - 2v(w + 4z) = (w + 4z)(3u - 2v)$
75. $x(x^2 + 1)$
76. $y(4y^2 - 20y + 25) = y[(2y)^2 - 2(2y)(5) + 5^2] = y(2y - 5)^2$
77. $2y(9y^2 + 24y + 16) = 2y[(3y)^2 + 2(3y)(4) + 4^2] = 2y(3y + 4)^2$
78. $2x(x^2 - 8x + 7) = 2x(x - 1)(x - 7)$
79. $y(16 - y^2) = y(4^2 - y^2) = y(4 + y)(4 - y)$
80. $3x(x^3 + 8) = 3x(x^3 + 2^3) = 3x(x + 2)[x^2 - (x)(2) + 2^2] = 3x(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
81. $y(5 + 3y - 2y^2) = y(1 + y)(5 - 2y)$
82. $z(1 - 8z^3) = z[1^3 (2z)^3] = z(1 - 2z)[1^2 + (1)(2z) + (2z)^2] = z(1 - 2z)(1 + 2z + 4z^2)$
83. $2[(5x + 1)^2 - 9] = 2[(5x + 1)^2 - 3^2] = 2[(5x + 1) + 3][(5x + 1) - 3] = 2(5x + 4)(5x - 2)$
84. $5[(2x - 3)^2 - 4] = 5[(2x - 3)^2 - 2^2] = 5[(2x - 3) + 2][(2x - 3) - 2] = 5(2x - 1)(2x - 5)$
85. $2(6x^2 + 11x - 10) = 2(2x + 5)(3x - 2)$
86. $(x + 5y)(3x - 2y)$
87. $(2ac + 4ad) - (2bd + bc) = 2a(c + 2d) - b(2d + c) = (c + 2d)(2a - b) = (2c - b)(c + 2d)$
88. $(6ac + 4bc) - (2bd + 3ad) = 2c(3a + 2b) - d(2b + 3a) = (3a + 2b)(2a - d)$
89. $(x^3 - 3x^2) - (4x - 12) = x^2(x - 3) - 4(x - 3) = (x - 3)(x^2 - 4) = (x - 3)(x + 2)(x - 2)$
90. $x(x^3 - 4x^2 - x + 4) = x(x - 1)(x^2 - 3x - 4) = x(x - 1)(x + 1)(x - 4)$
91. $(2ac + bc) - (2ad + bd) = c(2a + b) - d(2a + b) = (c - d)(2a + b)$.
Nenhum dos agrupamentos $(2ac - bd)$ e $(-2ad + bc)$ tem um fator comum para remover.

CAPÍTULO 4

Exercícios

1. $\frac{5}{9} + \frac{10}{9} = \frac{5 + 10}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$
2. $\frac{17}{32} - \frac{9}{32} = \frac{17 - 9}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$
3. $\frac{20}{21} \cdot \frac{9}{22} = \frac{20 \cdot 9}{21 \cdot 22} = \frac{180}{462} = \frac{30}{77}$
4. $\frac{33}{25} \cdot \frac{20}{77} = \frac{33 \cdot 20}{25 \cdot 77} = \frac{660}{1.925} = \frac{12}{35}$

$$5. \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$6. \frac{9}{4} \div \frac{15}{10} = \frac{9}{4} \div \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{9 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

7. O mínimo múltiplo comum dos denominadores é $2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 210$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{14} + \frac{4}{15} - \frac{5}{21} &= \frac{15}{210} + \frac{56}{210} - \frac{50}{210} \\ &= \frac{15 + 56 - 50}{210} = \frac{21}{210} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

8. O mínimo múltiplo comum dos denominadores é $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} + \frac{6}{35} - \frac{4}{15} &= \frac{35}{210} + \frac{36}{210} - \frac{56}{210} \\ &= \frac{35 + 36 - 56}{210} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14} \end{aligned}$$

9. Nenhum valor é restrito, assim o domínio é o de todos os números reais.

10. Nenhum valor é restrito, assim o domínio é o de todos os números reais.

11. O valor sob o radical deve ser não negativo, assim $x - 4 \geq 0$, ou seja, $x \geq 4$: domínio é $[4, +\infty[$.

12. O valor sob o radical deve ser positivo, assim $x + 3 > 0$, ou seja, $x > -3$: domínio é $]-3, +\infty[$.

13. O denominador não pode ser 0, assim $x^2 + 3x \neq 0$ ou $x(x + 3) \neq 0$. Então, $x \neq 0$ e $x + 3 \neq 0$, ou seja, $x \neq 0$ e $x \neq -3$.

14. O denominador não pode ser 0, assim $x^2 - 4 \neq 0$ ou $(x + 2)(x - 2) \neq 0$. Então, $x + 2 \neq 0$ e $x - 2 \neq 0$, ou seja, $x \neq -2$ e $x \neq 2$.

15. O denominador não pode ser 0, assim $x - 1 \neq 0$ ou $x \neq 1$. Então $x \neq 2$ e $x \neq 1$.

16. O denominador não pode ser 0, assim $x - 2 \neq 0$ ou $x \neq 2$. Então $x \neq 2$ e $x \neq 0$.

17. $x^{-1} = 1/x$ e o denominador não pode ser 0, assim $x \neq 0$.

18. $x(x + 1)^{-2} = \frac{x}{(x + 1)^2}$ e o denominador não pode ser 0, assim $(x + 1)^2 \neq 0$ ou $x + 1 \neq 0$, ou seja, $x \neq -1$.

19. O denominador é $12x^3 = (3x)(4x^2)$, assim, o novo numerador é $2(4x^2) = 8x^2$.

20. O numerador é $15y = (5)(3y)$, assim, o novo denominador é $(2y)(3y) = 6y^2$.

21. O numerador é $x^2 - 4x = (x - 4)(x)$, assim, o novo denominador é $(x)(x) = x^2$.

22. O denominador é $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, assim, o novo numerador é $x(x - 2) = x^2 - 2x$.

23. O denominador é $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$, assim, o novo numerador é $(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$.

24. O numerador é $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$, assim, o novo denominador é $(x + 5)(x + 3) = x^2 + 8x + 15$.

25. O numerador é $x^2 - 3x = x(x - 3)$, assim, o novo denominador é $x(x^2 + 2x)$ ou $x^3 + 2x^2$.

26. O denominador é $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$, assim, o novo numerador é

$$\begin{aligned} (x + 3)(x^2 + x - 6) &= x(x^2 + x - 6) \\ &+ 3(x^2 + x - 6) = x^3 + x^2 - 6x + 3x^2 \\ &+ 3x - 18 = x^3 + 4x^2 - 3x - 18 \end{aligned}$$

27. $(x - 2)(x + 7)$ cancela durante a simplificação; a restrição indica que os valores 2 e -7 não são válidos na expressão original.

28. $(x + 1)(x - 2)$ cancela durante a simplificação; a restrição indica que os valores -1 e 2 não são válidos na expressão original.

29. Nenhum fator foi removido da expressão; podemos ver pela inspeção que $2/3$ e 5 não são válidos.

30. x cancela durante a simplificação; a restrição indica que 0 não era válido na expressão original.

31. $(x - 3)$ termina no numerador da expressão simplificada; a restrição lembra que começa no denominador, assim, 3 não é permitido.

32. Quando $a = b$ na origem, dividimos por 0 ; isso não é aparente na expressão simplificada, pois cancelamos um fator de $b - a$.

$$33. \frac{3x(6x^2)}{3x(5)} = \frac{6x^2}{5}, x \neq 0$$

$$34. \frac{3y^2(25)}{3y^2(3y^2)} = \frac{25}{3y^2}$$

$$35. \frac{x(x^2)}{x(x - 2)} = \frac{x^2}{x - 2}, x \neq 0$$

$$36. \frac{2y(y + 3)}{4(y + 3)} = \frac{y}{2}, y \neq -3$$

$$37. \frac{z(z - 3)}{(3 - z)(3 + z)} = -\frac{z}{z + 3}, z \neq 3$$

$$38. \frac{(x + 3)^2}{(x + 3)(x - 4)} = \frac{x + 3}{x - 4}, x \neq -3$$

$$39. \frac{(y+5)(y-6)}{(y+3)(y-6)} = \frac{y+5}{y+3}, y \neq 6$$

$$40. \frac{y(y^2+4y-21)}{(y+7)(y-7)} = \frac{y(y+7)(y-3)}{(y+7)(y-7)} = \frac{y(y-3)}{y-7}, y \neq -7$$

$$41. \frac{(2z)^3-1^3}{(z+3)(2z-1)} = \frac{(2z-1)[(2z)^2+(2z)(1)+1^2]}{(z+3)(2z-1)} = \frac{4z^2+2z+1}{z+3}, z \neq \frac{1}{2}$$

$$42. \frac{2z(z^2+3z+9)}{z^3-3^3} = \frac{2z(z^2+3z+9)}{(z-3)[z^2+(z)(3)+3^2]} = \frac{2z(z^2+3z+9)}{(z-3)(z^2+3z+9)} = \frac{2z}{z-3}$$

$$43. \frac{(x^3+2x^2)-(3x+6)}{x^2(x+2)} = \frac{x^2(x+2)-3(x+2)}{x^2(x+2)} = \frac{(x+2)(x^2-3)}{x^2(x+2)} = \frac{x^2-3}{x^2}, x \neq -2$$

$$44. \frac{y(y+3)}{(y^3+3y^2)-(5y+15)} = \frac{y(y+3)}{y^2(y+3)-5(y+3)} = \frac{y(y+3)}{(y+3)(y^2-5)} = \frac{y}{y^2-5}, y \neq -3$$

$$45. \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{3} = \frac{x+1}{3}, x \neq 1$$

$$46. \frac{x+3}{7} \cdot \frac{14}{2(x+3)} = 1, x \neq -3$$

$$47. \frac{x+3}{x-1} \cdot \frac{-(x-1)}{(x+3)(x-3)} = \frac{1}{x-3}, x \neq 1 \text{ e } x \neq -3$$

$$48. \frac{3x(6x+1)}{3xy} \cdot \frac{12y^2}{6x-1} = 12y$$

$$x \neq 0, y \neq 0 \text{ e } x \neq \frac{1}{6}$$

$$49. \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{2x^2} \cdot \frac{4x}{x^2+x+1} = \frac{2(x-1)}{x}$$

$$50. \frac{y(y^2+2y+4)}{y^2(y+2)} \cdot \frac{(y+2)(y-2)}{(y-2)(y^2+2y+4)} = \frac{1}{y},$$

$$y \neq -2 \text{ e } y \neq 2$$

$$51. \frac{(y+5)(2y-1)}{(y+5)(y-5)} \cdot \frac{y-5}{y(2y-1)} = \frac{1}{y}, y \neq 5, y \neq -5$$

$$\text{e } y \neq \frac{1}{2}$$

$$52. \frac{(y+4)^2}{(3y+2)(y-1)} \cdot \frac{y(3y+2)}{y+4} = \frac{y(y+4)}{y+4}, y \neq -4 \text{ e }$$

$$y \neq -\frac{2}{3}$$

$$53. \frac{1}{2x} \cdot \frac{4}{1} = \frac{2}{x}$$

$$54. \frac{4x}{y} \cdot \frac{x}{8y} = \frac{x^2}{2y^2}, x \neq 0$$

$$55. \frac{x(x-3)}{14y} \cdot \frac{3y^2}{2xy} = \frac{3(x-3)}{28}, x \neq y \text{ e } y \neq 0$$

$$56. \frac{7(x-y)}{14(x-y)} = \frac{3}{8}, x \neq y \text{ e } y \neq 0$$

$$57. \frac{2x^2y}{(x+3)^2} \cdot \frac{x-3}{8xy} = \frac{x}{4(x-3)}, x \neq 0 \text{ e } y \neq 0$$

$$58. \frac{(x+y)(x-y)}{2xy} \cdot \frac{4x^2y}{(y+x)(y-x)} = -2x, x \neq 0,$$

$$y \neq 0, x \neq y \text{ e } x \neq -y$$

$$59. \frac{2x+1-3}{x+5} = \frac{2x-2}{x+5}$$

$$60. \frac{3+x+1}{x-2} = \frac{x+4}{x-2}$$

$$\begin{aligned}
 61. \quad & \frac{3}{x(x+3)} - \frac{1}{x} - \frac{6}{(x+3)(x-3)} \\
 &= \frac{3(x-3)}{x(x+3)(x-3)} - \frac{1(x+3)(x-3)}{x(x+3)(x-3)} \\
 & - \frac{6x}{x(x+3)(x-3)} = \frac{(3x-9) - (x^2-9) - (6x)}{x(x+3)(x-3)} \\
 &= \frac{-x^2-3x}{x(x+3)(x-3)} = \frac{x(x+3)}{x(x+3)(x-3)} \\
 &= -\frac{1}{x-3} = \frac{1}{3-x}, x \neq 0 \text{ e } x \neq -3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 62. \quad & \frac{5}{(x+3)(x-2)} - \frac{2}{x-2} + \frac{4}{(x+2)(x-2)} \\
 &= \frac{5(x+2)}{(x+2)(x+3)(x-2)} - \frac{2(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x-2)} \\
 & + \frac{4(x+3)}{(x+2)(x+3)(x-2)} \\
 &= \frac{(5x+10) - (2x^2+10x+12) + (4x+12)}{(x+2)(x+3)(x-2)} \\
 &= \frac{-2x^2-x+10}{(x+2)(x+3)(x-2)} \\
 &= \frac{(2x+5)(x-2)}{(x+2)(x+3)(x-2)} \\
 &= -\frac{2x-5}{(x+2)(x+3)} \\
 &= \frac{2x+5}{x^2+5x+6}, x \neq 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 63. \quad & \frac{\frac{x^3-y^3}{x^2y^2}}{\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}} = \frac{x^2-y^3}{x^2y^2} \cdot \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \\
 &= \frac{(x-y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x+y)} = \frac{x^2+xy+y^2}{x+y}, \\
 & x \neq y, x \neq 0 \text{ e } y \neq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 64. \quad & \frac{\frac{y+x}{xy}}{\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}} = \frac{y+x}{xy} \cdot \frac{x^2y^2}{y^2-x^2} \\
 &= \frac{xy(y+x)}{(y-x)(x+y)} = \frac{xy}{y-x}, x \neq -y, x \neq 0 \text{ e } y \neq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2x(x-4)+13x-3}{x-4} \\
 65. \quad & \frac{2x(x-4)+x+3}{x-4} \\
 &= \frac{2x^2+5x-3}{x-4} \cdot \frac{x-4}{2x^2-7x+3} \\
 &= \frac{(2x-1)(x+3)}{(2x-1)(x-3)} \\
 &= \frac{x+3}{x-3}, x \neq 4 \text{ e } x \neq \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2(x+5)-13}{x-3} \\
 66. \quad & \frac{x+5}{2(x-3)+3} = \frac{2x-3}{x+5} \cdot \frac{x-3}{2x-3} = \frac{x-3}{x+5}, \\
 & x \neq 3, \text{ e } x \neq \frac{3}{2} \\
 & \frac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2} \\
 67. \quad & \frac{x^2-(x+h)^2}{h} - \frac{x^2-(x^2+2xh+h^2)}{x^2(x+h)^2} \cdot \frac{1}{h} \\
 &= \frac{-2xh-h^2}{hx^2(x+h)^2} = \frac{-h(2x+h)}{hx^2(x+h)^2} = -\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2},
 \end{aligned}$$

$h \neq 0.$

$$\begin{aligned}
 & \frac{(x+h)(x+2)-x(x+h+2)}{(x+h+2)(x+2)} \\
 68. \quad & \frac{(x+h+2)(x+2)}{h} \\
 &= \frac{x^2+2x+hx+2h-x^2-hx-2x}{(x+h+2)(x+2)} \cdot \frac{1}{h} \\
 &= \frac{2h}{h(x+h+2)(x+2)} = \frac{2}{(x+h+2)(x+2)}, \\
 & h \neq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{b^2-a^2}{ab} \\
 69. \quad & \frac{\frac{ab}{b-a}}{\frac{ab}{ab}} = \frac{(b+a)(b-a)}{ab} \cdot \frac{ab}{b-a} = b+a \\
 &= a+b, a \neq 0 \text{ e } b \neq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{ab}{b^2-a^2}} = \frac{b+a}{ab} \cdot \frac{ab}{(b+a)(b-a)} = \frac{1}{b-a}, \\
 70. \quad & \frac{ab}{b^2-a^2} \\
 & a \neq 0, b \neq 0 \text{ e } a \neq -b.
 \end{aligned}$$

$$71. \left(\frac{x+y}{xy}\right)\left(\frac{1}{x+y}\right) = \frac{1}{xy}, x \neq -y.$$

$$72. \frac{x-y}{x+y}, x \neq y.$$

$$73. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} = \frac{x+y}{xy}$$

$$74. \frac{1}{x^{-1} + y^{-1}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{1}{\frac{y+x}{xy}} = \frac{xy}{y+x}, x \neq 0 \text{ e } y \neq 0$$

CAPÍTULO 5

Revisão rápida

$$1. 2x + 5x + 7 + y - 3x + 4y + 2 = (2x + 5x - 3x) + (y + 4y) + (7 + 2) = 4x + 5y + 9$$

$$2. 4 + 2x - 3z + 5y - x + 2y - z - 2 = (2x - x) + (5x + 2y) + (-3z - z) + (4 - 2) = x + 7y - 4z + 2$$

$$3. 3(2x - y) + 4(y - x) + x + y = 6x - 3y + 4y - 4x + x + y = 3x + 2y$$

$$4. 5(2x + y - 1) + 4(y - 3x + 2) + 1 = 10x + 5y - 5y - 5 + 4y - 12x + 8 + 1 = -2x + 9y + 4$$

$$5. \frac{2}{y} + \frac{3}{y} = \frac{5}{y}$$

$$6. \frac{1}{y-1} + \frac{3}{y-2} = \frac{y-2}{(y-1)(y-2)} + \frac{3(y-1)}{(y-1)(y-2)} = \frac{y-2+3y-3}{(y-1)(y-2)} = \frac{4y-5}{(y-1)(y-2)}$$

$$7. 2 + \frac{1}{x} = \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2x+1}{x}$$

$$8. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - x = \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} - \frac{x^2y}{xy} = \frac{y+x-x^2y}{xy}$$

$$9. \frac{x+4}{2} + \frac{3x-1}{5} = \frac{5(x+4)}{10} + \frac{2(3x-1)}{10} = \frac{5x+20+6x-2}{10} = \frac{11x+18}{10}$$

$$10. \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = \frac{4x}{12} + \frac{3x}{12} = \frac{7x}{12}$$

$$11. (3x-4)^2 = 9x^2 - 12x - 12x + 16 = 9x^2 - 24x + 16$$

$$12. (2x+3)^2 = 4x^2 + 6x + 6x + 9 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$13. (2x+1)(3x-5) = 6x^2 - 10x + 3x - 5 = 6x^2 - 7x - 5$$

$$14. (3y-1)(5y+4) = 15y^2 + 12y - 5y - 4 = 15y^2 + 7y - 4$$

$$15. 25x^2 - 20x + 4 = (5x-2)(5x-2) = (5x-2)^2$$

$$16. 15x^3 - 22x^2 + 8x = x(15x^2 - 22x + 8) = x(5x-4)(3x-2)$$

$$17. 3x^3 + x^2 - 15x - 5 = x^2(3x+1) - 5(3x+1) = (3x+1)(x^2-5)$$

$$18. y^4 - 13y^2 + 36 = (y^2-4)(y^2-9) = (y-2)(y+2)(y-3)(y+3)$$

$$19. \frac{x}{2x+1} - \frac{2}{x+3} = \frac{x(x+3)}{(2x+1)(x+3)} - \frac{2(2x+1)}{(2x+1)(x+3)} = \frac{x^2+3x-4x-2}{(2x+1)(x+3)} = \frac{x^2-x-2}{(2x+1)(x+3)} = \frac{(x-2)(x+1)}{(2x+1)(x+3)}$$

$$20. \frac{x+1}{x^2-5x-6} - \frac{3x+11}{x^2-x-6} = \frac{x+1}{(x-3)(x-2)} - \frac{3x+11}{(x-3)(x+2)} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-3)(x-2)(x+2)} - \frac{(3x+11)(x-2)}{(x-3)(x-2)(x+2)} = \frac{(x^2+3x+2) - (3x^2+5x-22)}{(x-3)(x-2)(x+2)} = \frac{-2x^2-2x+24}{(x-3)(x-2)(x+2)} = \frac{-2(x^2+x-12)}{(x-3)(x-2)(x+2)} = \frac{-2(x+4)(x-3)}{(x-3)(x-2)(x+2)} = \frac{-2(x+4)}{(x-2)(x+2)}, \text{ se } x \neq 3$$