

Radiciação e potenciação

Objetivos de aprendizagem

- Radicais.
- Simplificação de expressões com radicais.
- Racionalização.
- Potenciação com expoentes racionais.

Radicais

Se $b^2 = a$, então b é a **raiz quadrada** de a . Por exemplo, 2 e -2 são raízes quadradas de 4 porque $2^2 = (-2)^2 = 4$. Da mesma maneira, se $b^3 = a$, então b é a **raiz cúbica** de a . Por exemplo, 2 é a raiz cúbica de 8 porque $2^3 = 8$.

DEFINIÇÃO Raiz n -ésima de um número real

Dado um número n inteiro, maior do que 1, e a e b como números reais, temos:

1. Se $b^n = a$, então b é uma **raiz n -ésima** de a . Escrevemos:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \text{ e } b \geq 0$$

2. O símbolo $\sqrt{}$ é conhecido por **radical**, a é o **radicando** e n é o **índice**.
3. Se a tem uma raiz n -ésima, então sua **principal raiz n -ésima** terá o mesmo sinal de a .

Se n for ímpar, qualquer número real tem apenas uma **raiz n -ésima** real. Por exemplo, 2 é a única raiz cúbica real de 8.

Se n for par, os números reais positivos têm duas **raízes n -ésimas** reais. Por exemplo, 4 ou -4 são raízes quadradas reais de 16. Os números reais negativos não têm raízes n -ésimas reais. Por exemplo, não existe $b^2 = -9$.

Quando $n = 2$, em geral, omitimos o índice na representação da raiz e escrevemos \sqrt{a} , em vez de $\sqrt[2]{a}$.

Se a é um número real positivo e n é um inteiro par positivo, suas duas raízes n -ésimas são denotadas por $\sqrt[n]{a}$ e $-\sqrt[n]{a}$.

EXEMPLO 1 Verificação das raízes n -ésimas principais

(a) $\sqrt{36} = 6$, porque $6^2 = 36$.

(b) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$, porque $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$.

(c) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2}$, porque $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$.

(d) $\sqrt[4]{-625}$ não é um número real porque o índice 4 é par, e o radicando -625 é negativo (*não* existe número real cuja quarta potência seja negativa).

Veja algumas propriedades de radicais e exemplos que ilustram seu significado.

Propriedades dos radicais

Considere u e v números reais, variáveis ou expressões algébricas, e m e n números positivos inteiros maiores do que 1. Convencionamos que todas as raízes são números reais e todos os denominadores são diferentes de zero.

Propriedade

1. $\sqrt[n]{uv} = \sqrt[n]{u} \cdot \sqrt[n]{v}$

2. $\sqrt[n]{\frac{u}{v}} = \frac{\sqrt[n]{u}}{\sqrt[n]{v}}$

3. $\sqrt[n]{\sqrt[n]{u}} = \sqrt[n \cdot n]{u}$

4. $(\sqrt[n]{u})^n = u$

5. $\sqrt[n]{u^m} = (\sqrt[n]{u})^m$

6. $\sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} |u| & \text{para } n \text{ par} \\ u & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases}$

Exemplo

$$\begin{aligned}\sqrt{75} &= \sqrt{25 \cdot 3} \\ &= \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt[4]{96}}{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[4]{\frac{96}{6}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[2 \cdot 3]{7} = \sqrt[6]{7}$$

$$(\sqrt[4]{5})^4 = 5$$

$$\sqrt[3]{27^2} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$$

$$\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6$$

$$\sqrt[3]{(-6)^3} = -6$$

Simplificação de expressões com radicais

Muitas técnicas de simplificação de raízes de números reais não são mais usadas em virtude da facilidade das calculadoras. No entanto, vamos mostrar alguns exemplos de como podemos solucionar tais questões na ausência dessas máquinas.

EXEMPLO 2 Remoção de fatores dos radicandos

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \sqrt[4]{80} &= \sqrt[4]{16 \cdot 5} \\
 &= \sqrt[4]{2^4 \cdot 5} \\
 &= \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{5} \\
 &= 2\sqrt[4]{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \sqrt{18x^5} &= \sqrt{9x^4 \cdot 2x} \\
 &= \sqrt{(3x^2)^2 \cdot 2x} \\
 &= 3x^2\sqrt{2x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad \sqrt[4]{x^4y^4} &= \sqrt[4]{(xy)^4} \\
 &= |xy|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad \sqrt[3]{-24y^6} &= \sqrt[3]{(-2y^2)^3 \cdot 3} \\
 &= -2y^2\sqrt[3]{3}
 \end{aligned}$$

Racionalização

A **racionalização** é o processo de retirar as raízes do denominador das frações. Quando o denominador tem a forma $\sqrt[n]{u^k}$, multiplicamos o numerador e o denominador por $\sqrt[n]{u^{n-k}}$ para eliminar o radical do denominador. Veja:

$$\sqrt[n]{u^k} \cdot \sqrt[n]{u^{n-k}} = \sqrt[n]{u^k \cdot u^{n-k}} = \sqrt[n]{u^{k+n-k}} = \sqrt[n]{u^n} = u.$$

O Exemplo 3 ilustra o processo.

EXEMPLO 3 Racionalização

$$\text{(a)} \quad \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{(b)} \quad \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^4}} = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{|x|}$$

$$\text{(c)} \quad \sqrt[5]{\frac{x^2}{y^3}} = \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{y^3}} = \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{y^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{y^2}}{\sqrt[5]{y^2}} = \frac{\sqrt[5]{x^2y^2}}{\sqrt[5]{y^5}} = \frac{\sqrt[5]{x^2y^2}}{y}$$

Potenciação com expoentes racionais

Sabemos como manipular expressões exponenciais com expoentes inteiros. Por exemplo, $x^3 \cdot x^4 = x^7$, $(x^3)^2 = x^6$, $\frac{x^5}{x^2} = x^3$, $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$. Mas os expoentes também podem ser números racionais. Como deveríamos determinar, por exemplo, $x^{1/2}$? Para começar, podemos supor que as mesmas regras que aplicamos para expoentes inteiros também se aplicam para expoentes racionais.

DEFINIÇÃO Expoentes racionais

Seja u um número real, variável ou expressão algébrica, e n um inteiro maior do que 1. Então:

$$u^{1/n} = \sqrt[n]{u}.$$

Se m é um inteiro positivo, m/n está na forma reduzida e todas as raízes são números reais. Assim:

$$u^{m/n} = (u^{1/n})^m = (\sqrt[n]{u})^m \quad \text{e} \quad u^{m/n} = (u^m)^{1/n} = \sqrt[n]{u^m}.$$

O numerador de um expoente racional é a *potência* para a qual a base está elevada, e o denominador é o índice da *raiz*. A fração m/n precisa estar na forma reduzida, caso contrário, isso pode ocasionar algum problema de definição. Vejamos:

$$u^{2/3} = (\sqrt[3]{u})^2$$

e essa expressão está definida para todo número u real, mas:

$$u^{4/6} = (\sqrt[6]{u})^4$$

está definida somente para $u \geq 0$.

EXEMPLO 4 Conversão de radicais para potências, e vice-versa

$$(a) \sqrt{(x+y)^3} = (x+y)^{3/2}$$

$$(b) 3x\sqrt[5]{x^2} = 3x \cdot x^{2/5} = 3x^{7/5}$$

$$(c) x^{2/3}y^{1/3} = (x^2y)^{1/3} = \sqrt[3]{x^2y}$$

$$(d) z^{-3/2} = \frac{1}{z^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{z^3}}$$

Uma expressão envolvendo potências está *simplificada* se cada fator aparece somente uma vez e todos os expoentes são positivos.

EXEMPLO 5 Simplificação de expressões com potências

$$(a) (x^2y^9)^{1/3}(xy^2) = (x^{2/3}y^3)(xy^2) = x^{5/3}y^5$$

$$(b) \left(\frac{3x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)\left(\frac{2x^{-1/2}}{y^{2/5}}\right) = \frac{6x^{1/6}}{y^{9/10}}$$

O Exemplo 6 sugere uma forma de simplificar uma soma ou uma diferença de radicais.

EXEMPLO 6 Simplificação de expressões com radicais

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad 2\sqrt{80} - \sqrt{125} &= 2\sqrt{16 \cdot 5} - \sqrt{25 \cdot 5} \\
 &= 8\sqrt{5} - 5\sqrt{5} \\
 &= 3\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \sqrt{4x^2y} - \sqrt{y^3} &= \sqrt{(2x)^2y} - \sqrt{y^2y} \\
 &= 2|x|\sqrt{y} - |y|\sqrt{y} \\
 &= (2|x| - |y|)\sqrt{y}
 \end{aligned}$$

Segue um resumo dos procedimentos usados para *simplificar expressões* que envolvem radicais.

Simplificação de expressões com radicais

1. Remover os fatores dos radicais (Exemplo 2).
2. Eliminar os radicais dos denominadores, e os denominadores dos radicandos (Exemplo 3).
3. Combinar somas e diferenças dos radicais, se possível (Exemplo 6).

EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 6, encontre as raízes reais indicadas.

1. Raiz quadrada de 81.
2. Raiz quarta de 81.
3. Raiz cúbica de 64.
4. Raiz quinta de 243.
5. Raiz quadrada de $\frac{16}{9}$.
6. Raiz cúbica de $\frac{-27}{8}$.

Nos exercícios de 7 a 12, calcule a expressão sem usar a calculadora.

7. $\sqrt{144}$
8. $\sqrt{-16}$
9. $\sqrt[3]{-216}$
10. $\sqrt[3]{216}$
11. $\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}$
12. $\sqrt{\frac{64}{25}}$

Nos exercícios de 13 a 22, use uma calculadora para encontrar o valor da expressão.

13. $\sqrt[4]{256}$
14. $\sqrt[5]{3125}$
15. $\sqrt[3]{15,625}$
16. $\sqrt{12,25}$
17. $81^{3/2}$
18. $16^{5/4}$
19. $32^{-2/5}$
20. $27^{-4/3}$
21. $\left(-\frac{1}{8}\right)^{-1/3}$
22. $\left(-\frac{125}{64}\right)^{-1/3}$

Nos exercícios de 23 a 32, simplifique a expressão removendo fatores do radicando.

23. $\sqrt{288}$
24. $\sqrt[3]{500}$
25. $\sqrt[3]{-250}$
26. $\sqrt[4]{192}$
27. $\sqrt{2x^3y^4}$
28. $\sqrt[3]{-27x^3y^6}$
29. $\sqrt[4]{3x^8y^6}$
30. $\sqrt[3]{8x^6y^4}$
31. $\sqrt[5]{96x^{10}}$
32. $\sqrt{108x^4y^9}$

Nos exercícios de 33 a 38, racionalize o denominador.

33. $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$
34. $\frac{1}{\sqrt{5}}$
35. $\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$
36. $\frac{2}{\sqrt[4]{y}}$
37. $\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}$
38. $\sqrt[5]{\frac{a^3}{b^2}}$

Nos exercícios de 39 a 42, converta para a forma exponencial (forma de potência).

39. $\sqrt[3]{(a+2b)^2}$
40. $\sqrt[5]{x^2y^3}$
41. $2x\sqrt[3]{x^2y}$
42. $xy\sqrt[4]{xy^3}$

Nos exercícios de 43 a 46, converta para a forma radical.

43. $a^{2/3}b^{1/4}$
44. $x^{2/3}y^{1/3}$
45. $x^{-5/3}$
46. $(xy)^{-3/4}$

Nos exercícios de 47 a 52, escreva usando um radical simples.

47. $\sqrt{\sqrt{2x}}$

48. $\sqrt{\sqrt[3]{3x^2}}$

49. $\sqrt[4]{\sqrt{xy}}$

50. $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}$

51. $\frac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[3]{a}}$

52. $\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}$

Nos exercícios de 53 a 60, simplifique as expressões exponenciais.

53. $\frac{a^{3/5}a^{1/3}}{a^{3/2}}$

54. $(x^2y^4)^{1/2}$

55. $(a^{5/3}b^{3/4})(3a^{1/3}b^{5/4})$

56. $\left(\frac{x^{1/2}}{y^{2/3}}\right)^6$

57. $\left(\frac{-8x^6}{y^{-3}}\right)^{2/3}$

58. $\frac{(p^2q^4)^{1/2}}{(27q^3p^6)^{1/3}}$

59. $\frac{(x^9y^6)^{-1/3}}{(x^6y^2)^{-1/2}}$

60. $\left(\frac{2x^{1/2}}{y^{2/3}}\right)\left(\frac{3x^{-2/3}}{y^{1/2}}\right)$

Nos exercícios de 61 a 70, simplifique as expressões radicais.

61. $\sqrt{9x^{-6}y^4}$

62. $\sqrt{16y^8z^{-2}}$

63. $\sqrt[4]{\frac{3x^8y^2}{8x^2}}$

64. $\sqrt[5]{\frac{4x^6y}{9x^3}}$

65. $\sqrt[3]{\frac{4x^2}{y^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2x^2}{y}}$

66. $\sqrt[5]{9ab^6} \cdot \sqrt[5]{27a^2b^{-1}}$

67. $3\sqrt{48} - 2\sqrt{108}$

68. $2\sqrt{175} - 4\sqrt{28}$

69. $\sqrt{x^3} - \sqrt{4xy^2}$

70. $\sqrt{18x^2y} + \sqrt{2y^3}$

Nos exercícios de 71 a 78, substitua \circ por $<$, $=$ ou $>$ para tornar a expressão verdadeira.

71. $\sqrt{2+6} \circ \sqrt{2} + \sqrt{6}$

72. $\sqrt{4} + \sqrt{9} \circ \sqrt{4+9}$

73. $(3^{-2})^{-1/2} \circ 3$

74. $(2^{-3})^{1/3} \circ 2$

75. $\sqrt[4]{(-2)^4} \circ -2$

76. $\sqrt[3]{(-2)^3} \circ -2$

77. $2^{2/3} \circ 3^{3/4}$

78. $4^{-2/3} \circ 3^{-3/4}$

79. O tempo t (em segundos) que uma pedra leva para cair de uma distância d (em metros) é aproximadamente $t = 0,45 \cdot \sqrt{d}$. Quanto tempo uma pedra leva para cair de uma distância de 200 metros?

39. $ax^2 + dx^2 = a \cdot x^2 + d \cdot x^2 = (a + d)x^2$
 40. $a^3z + a^3w = a^3 \cdot z + a^3 \cdot w = a^3(z + w)$
 41. A inversa de $6 - \pi$, ou $-(6 - \pi) = -6 + \pi = \pi - 6$
 42. A inversa de -7 , ou $-(-7) = 7$
 43. Em -5^2 , a base é 5.
 44. Em $(-2)^7$, a base é -2 .

45. $\frac{x^2}{y^2}$

46. $\frac{(3x^2)^2y^4}{3y^2} = \frac{3^2(x^2)^2y^4}{3y^2} = \frac{9x^4y^4}{3y^2} = 3x^4y^2$

47. $\left(\frac{4}{x^2}\right)^2 = \frac{4^2}{(x^2)^2} = \frac{16}{x^4}$

48. $\left(\frac{2}{xy}\right)^{-3} = \left(\frac{xy}{2}\right)^3 = \frac{x^3y^3}{2^3} = \frac{x^3y^3}{8}$

49. $\frac{(x^{-3}y^2)^{-4}}{(y^6x^{-4})^{-2}} = \frac{x^{12}y^{-8}}{y^{-12}x^8} = \frac{x^4}{y^{-4}} = x^4y^4$

50. $\left(\frac{4a^3b}{a^2b^3}\right)\left(\frac{3b^2}{2a^2b^4}\right) = \left(\frac{4a}{b^2}\right)\left(\frac{3}{2a^2b^2}\right) = \frac{12a}{2a^2b^4} = \frac{6}{ab^4}$

51. $7,8 \times 10^8$

52. $-1,6 \times 10^{-19}$

53. 0,000 000 033 3

54. 673.000.000.000

55. 9.500.000.000.000

56. 0,000 000 000 000 000 000 000 001 674 7 (23 zeros entre o ponto decimal e 1).

57. $\frac{(1,35)(2,41) \times 10^{-7+8}}{1,25 \times 10^9} = \frac{3,2535 \times 10^1}{1,25 \times 10^9}$
 $= \frac{3,2535}{1,25} \times 10^{1-9} = 2,6028 \times 10^{-8}$

58. $\frac{(3,7)(4,3) \times 10^{-7+6}}{2,5 \times 10^7} = \frac{15,91 \times 10^{-1}}{2,5 \times 10^7}$
 $= \frac{15,91}{2,5} \times 10^{-1-7} = 6,364 \times 10^{-8}$

59. (a) Quando $n = 0$, a equação $a^m a^n = a^{m+n}$ torna-se $a^m a^0 = a^{m+0}$, isto é, $a^m a^0 = a^m$. Como $a \neq 0$, podemos dividir os dois lados da equação por a^m , portanto, $a^0 = 1$.

(b) Quando $n = -m$, a equação $a^m a^n = a^{m+n}$ torna-se $a^m a^{-m} = a^{m+(-m)}$, isto é, $a^m a^{-m} = a^0$. Sabemos por (a) que $a^0 = 1$. Como $a \neq 0$, podemos dividir os dois lados da equação $a^m a^{-m} = 1$ por a^m . Portanto, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

60. Falso.

61. Falso.

62. O intervalo $[-2, 1[$ corresponde a $-2 \leq x < 1$. A resposta é E.

63. $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$. A resposta é A.

64. Em $-7^2 = -(7^2)$, a base é 7. A resposta é B.

65. $\frac{x^6}{x^2} = \frac{x^2 \cdot x^4}{x^2} = x^4$ A resposta é D.

66. Os números reais com magnitude menor que 7 são representados pelo intervalo $] -7, 7[$.

67. Os números naturais com magnitude menor que 7 são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

68. Os números inteiros com magnitude menor que 7 são $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

CAPÍTULO 2

Exercícios

1. $\sqrt{81} = 9$ ou -9 , pois $81 = (\pm 9)^2$

2. $\sqrt[4]{81} = 3$ ou -3 , pois $81 = (\pm 3)^4$

3. $\sqrt[3]{64} = 4$, pois $64 = 4^3$

4. $\sqrt[5]{243} = 3$, pois $243 = 3^5$

5. $\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$ ou $-\frac{4}{3}$, pois $\frac{16}{9} = \left(\pm \frac{4}{3}\right)^2$

6. $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = -\frac{3}{2}$, pois $-\frac{27}{8} = \left(-\frac{3}{2}\right)^3$

7. $\sqrt{144} = 12$, pois $12 \cdot 12 = 144$

8. Nenhum número real multiplicado por ele mesmo resulta em -16 .

9. $\sqrt[3]{-216} = -6$, pois $(-6)^3 = -216$

10. $\sqrt[3]{216} = 6$, pois $6^3 = 216$

11. $\sqrt[3]{-\frac{64}{27}} = -\frac{4}{3}$, pois $\left(-\frac{4}{3}\right)^3 = -\frac{64}{27}$

12. $\sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{8}{5}$, pois $8^2 = 64$ e $5^2 = 25$

13. 4

14. 5

15. $\frac{5}{2}$ ou $2,5$

16. $\frac{7}{2}$ ou $3,5$

17. 729

18. 32

19. $\frac{1}{4}$ ou 0,25

20. $\frac{1}{81}$ ou 0,012345679

21. -2

22. $-\frac{4}{5}$ ou -0,8

23. $\sqrt{288} = \sqrt{12^2 \cdot 2} = \sqrt{12^2} \cdot \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

24. $\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{4} = 5\sqrt[3]{4}$

25. $\sqrt[3]{-250} = \sqrt[3]{(-5)^3 \cdot 2}$
 $= \sqrt[3]{(-5)^3} \cdot \sqrt[3]{2} = -5\sqrt[3]{2}$

26. $\sqrt[4]{192} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 12} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{12} = 2\sqrt[4]{12}$

27. $\sqrt{2x^3y^4} = \sqrt{(xy^2)^2 \cdot 2x} =$
 $= \sqrt{(xy^2)^2} \cdot \sqrt{2x} = |x|y^2\sqrt{2x}$

28. $\sqrt[3]{-27x^3y^6} = \sqrt[3]{(-3xy^2)^3} = -3xy^2$

29. $\sqrt[4]{3x^8y^6} = \sqrt[4]{(x^2y)^4 \cdot 3y^2} =$
 $= \sqrt[4]{(x^2y)^4} \cdot \sqrt[4]{3y^2} = |x^2y|\sqrt[4]{3y^2} = x^2|y|\sqrt[4]{3y^2}$

30. $\sqrt[3]{8x^6y^4} = \sqrt[3]{(2x^2y)^3 \cdot y} =$
 $= \sqrt[3]{(2x^2y)^3} \cdot \sqrt[3]{y} = 2x^2y\sqrt[3]{y}$

31. $\sqrt[5]{96x^{10}} = \sqrt[5]{(2x^2)^5 \cdot 3} = \sqrt[5]{(2x^2)^5} \cdot \sqrt[5]{3} =$
 $= 2x^2\sqrt[5]{3}$

32. $\sqrt{108x^4y^9} = \sqrt{(6x^2y^4)^2 \cdot 3y} =$
 $= \sqrt{(6x^2y^4)^2} \cdot \sqrt{3y} = 6x^2y^4\sqrt{3y}$

33. $\frac{4}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} = 2\sqrt[3]{4}$

34. $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

35. $\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^5}} = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{x}$

36. $\frac{2}{\sqrt[4]{y}} \cdot \frac{\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt[4]{y^3}} = \frac{2\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt[4]{y^4}} = \frac{2\sqrt[4]{y^3}}{y}$

37. $\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{y}} \cdot \frac{\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2y^2}}{\sqrt[3]{y^3}} = \frac{\sqrt[3]{x^2y^2}}{y}$

38. $\sqrt[5]{\frac{a^3}{b^2}} = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{b^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[5]{b^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^3b^3}}{\sqrt[5]{b^5}} = \frac{\sqrt[5]{a^3b^3}}{b}$

39. $[(a+2b)^2]^{1/3} = (a+2b)^{2/3}$

40. $(x^2y^3)^{1/5} = (x^2)^{1/5}(y^3)^{1/5} = x^{2/5}y^{3/5}$

41. $2x(x^2y)^{1/3} = 2x(x^2)^{1/3}y^{1/3} = 2x^{3/3}x^{2/3}y^{1/3} = 2x^{5/3}y^{1/3}$

42. $xy(xy^3)^{1/4} = xyx^{1/4}(y^3)^{1/4} = x^{4/4}y^{4/4}x^{1/4}y^{3/4} =$
 $= x^{5/4}y^{7/4}$

43. $a^{3/4}b^{1/4} = \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a^3b}$

44. $x^{2/3}y^{1/3} = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^2y}$

45. $x^{-5/3} = \sqrt[3]{x^{-5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$

46. $(xy)^{-3/4} = \sqrt[4]{x^{-3}y^{-3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3y^3}}$

47. $\sqrt{\sqrt{2x}} = [(2x)^{1/2}]^{1/2} = (2x)^{1/4} = \sqrt[4]{2x}$

48. $\sqrt{\sqrt[3]{3x^2}} = [(3x)^{1/3}]^{1/2} = (3x^2)^{1/6} = \sqrt[6]{3x^2}$

49. $\sqrt[4]{\sqrt{xy}} = [(xy)^{1/2}]^{1/4} = (xy)^{1/8} = \sqrt[8]{xy}$

50. $\sqrt[3]{\sqrt{ab}} = [(ab)^{1/2}]^{1/3} = (ab)^{1/6} = \sqrt[6]{ab}$

51. $\frac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{a^{2/5}}{a^{1/3}} = a^{2/5-1/3} = a^{1/15} = \sqrt[15]{a}$

52. $\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2} = a^{1/2}a^{2/3} = a^{1/2+2/3} = a^{7/6} =$
 $= \sqrt[6]{a^7} = a\sqrt[6]{a}$

53. $a^{3/5}a^{1/3}a^{-3/2} = a^{3/5+1/3-3/2} = a^{-17/30} = \frac{1}{a^{17/30}}$

54. $\sqrt{x^2y^4} = \sqrt{(xy^2)^2} = |xy^2| = |x|y^2$

55. $(a^{5/3}b^{3/4})(3a^{1/3}b^{5/4}) = 3 \cdot a^{5/3+1/3} \cdot b^{3/4+5/4} =$
 $3 \cdot a^{6/3} \cdot b^{8/4} = 3a^2b^2 \quad (b \geq 0)$

56. $\left(\frac{x^{1/2}}{y^{2/3}}\right)^6 = \frac{(x^{1/2})^6}{(y^{2/3})^6} = \frac{x^{6/2}}{y^{12/3}} = \frac{x^3}{y^4} \quad (x \geq 0)$

$$57. \left(\frac{-8x^6}{y^{-3}}\right)^{2/3} = (-8x^6y^3)^{2/3} = (-8)^{2/3}(x^6)^{2/3}(y^3)^{2/3} \\ = [(-8)^2]^{1/3} x^{12/3} y^{6/3} = 64^{1/3} x^4 y^2 = 4x^4 y^2$$

$$58. \frac{(p^2 q^4)^{1/2}}{(27 q^3 p^6)^{1/3}} = \frac{\sqrt{p^2 q^4}}{\sqrt[3]{27 q^3 p^6}} = \frac{\sqrt{(pq^2)^2}}{\sqrt[3]{(3qp^2)^3}} = \frac{|pq^2|}{3qp^2} \\ = \frac{|p|q^2}{3qp^2} = \frac{q}{3|p|}$$

$$59. \frac{(x^9 y^6)^{-1/3}}{(x^6 y^2)^{-1/2}} = \frac{(x^6 y^2)^{1/2}}{(x^9 y^6)^{1/3}} = \frac{\sqrt{x^6 y^2}}{\sqrt[3]{x^9 y^6}} = \frac{|x^3 y|}{x^3 y^2} \\ = \frac{1}{|y|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{|x|}{x|y|}$$

$$60. \left(\frac{2x^{1/2}}{y^{2/3}}\right)\left(\frac{3x^{-2/3}}{y^{1/2}}\right) = \frac{6x^{1/2-2/3}}{y^{2/3+1/2}} = \frac{6x^{-1/6}}{y^{7/6}} = \frac{6}{x^{1/6}y^{7/6}}$$

$$61. \sqrt{9x^{-6}y^4} = |3x^{-3}y^2| = 3y^2|x^{-3}| = \frac{3y^2}{|x^3|}$$

$$62. \sqrt{16y^8z^{-2}} = |4y^4z^{-1}| = 4y^4|z^{-1}| = \frac{4y^4}{|z|}$$

$$63. \sqrt[4]{\frac{3x^8y^2}{8x^2}} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 3x^8y^2}{2 \cdot 8x^2}} = \frac{\sqrt[4]{6x^6y^2}}{2} = \frac{\sqrt[4]{6x^4x^2y^2}}{2} \\ = \frac{|x|\sqrt[4]{6x^2y^2}}{2}$$

$$64. \sqrt[5]{\frac{4x^6y}{9x^3}} = \sqrt[5]{\frac{27 \cdot 4x^6y}{27 \cdot 9x^3}} = \sqrt[5]{\frac{108x^6y}{3^5x^3}} = \frac{\sqrt[5]{108x^3y}}{3}$$

$$65. \sqrt[3]{\frac{4x^2}{y^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2x^2}{y}} = \sqrt[3]{\frac{(4x^2)(2x^2)}{(y^2)(y)}} = \sqrt[3]{\frac{8x^4}{y^3}} = \frac{2\sqrt[3]{x^4}}{y} \\ = \frac{2x\sqrt[3]{x}}{y}$$

$$66. \sqrt[5]{9ab^6} \cdot \sqrt[5]{27a^2b^{-1}} = \sqrt[5]{(9ab^6)(27a^2b^{-1})} \\ = \sqrt[5]{243a^3b^5} = 3b\sqrt[5]{a^3}$$

$$67. 3\sqrt{4^2 \cdot 3} - 2\sqrt{6^2 \cdot 3} = 3 \cdot 4\sqrt{3} - 2 \cdot 6\sqrt{3} \\ = 12\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 0$$

$$68. 2\sqrt{5^2 \cdot 7} - 4\sqrt{2^2 \cdot 7} = 2 \cdot 5\sqrt{7} - 4 \cdot 2\sqrt{7} \\ = 10\sqrt{7} - 8\sqrt{7} = 2\sqrt{7}$$

$$69. \sqrt{x^2 \cdot x} - \sqrt{(2y)^2 \cdot x} = |x|\sqrt{x} - 2|y| \cdot \sqrt{x} \\ = (|x| - 2|y|)\sqrt{x} = (x - 2|y|)\sqrt{x} \text{ (como a raiz} \\ \text{quadrada é indefinida quando } x < 0).$$

$$70. \sqrt{(3x)^2 \cdot 2y} + \sqrt{y^2 \cdot 2y} \\ = 3|x|\sqrt{2y} + |y| \cdot \sqrt{2y} = \\ (3|x| + |y|)\sqrt{2y} = (3|x| + y)\sqrt{2y} \text{ (como a raiz} \\ \text{quadrada é indefinida quando } y < 0).$$

$$71. \sqrt{2+6} < \sqrt{2} + \sqrt{6} \text{ (2,828... < 3,863...)}$$

$$72. \sqrt{4} + \sqrt{9} > \sqrt{4+9} \text{ (5 > 3,605...)}$$

$$73. (3^{-2})^{-1/2} = 3$$

$$74. (2^{-3})^{1/3} < 2 \left(\frac{1}{2} < 2\right)$$

$$75. \sqrt[4]{(-2)^4} > -2 \text{ (2 > -2)}$$

$$76. \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

$$77. 2^{2/2} < 3^{3/4} \text{ (1,587... < 2,279...)}$$

$$78. 4^{-2/3} < 3^{-3/4} \text{ (0,396... < 0,438...)}$$

$$79. t = 0,45\sqrt{200} = 4,5\sqrt{2} \approx 6,36 \text{ s}$$

CAPÍTULO 3

Exercícios

1. $3x^2 + 2x - 1$; grau 2.

2. $-2x^3 + x^2 - 2x + 1$; grau 3.

3. $-x^7 + 1$; grau 7.

4. $-x^4 + x^2 + x - 3$; grau 4.

5. Não, não pode haver um expoente negativo como x^{-1} .

6. Não, não pode haver uma variável no denominador.

7. Sim.

8. Sim.

9. $(x^2 - 3x + 7) + (3x^2 + 5x - 3) = (x^2 + 3x^2) + (-3x + 5x) + (7 - 3) = 4x^2 + 2x + 4$

10. $(-3x^2 - 5) + (-x^2 - 7x - 12) = (-3x^2 - x^2) - 7x + (-5 - 12) = -4x^2 - 7x - 17$

11. $(4x^3 - x^2 + 3x) + (-x^3 - 12x + 3) = (4x^3 - x^3) - x^2 + (3x - 12x) + 3 = 3x^3 - x^2 - 9x + 3$