

Polinômios e fatoração

Objetivos de aprendizagem

- Adição, subtração e multiplicação de polinômios.
- Produtos notáveis.
- Fatoração de polinômios usando produtos notáveis.
- Fatoração de trinômios.
- Fatoração por agrupamento.

Adição, subtração e multiplicação de polinômios

Um **polinômio em x** é qualquer expressão que pode ser escrita na forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

onde n é um inteiro não negativo e $a_n \neq 0$. Os números $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ são números reais chamados **coeficientes**, e $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_1 x, a_0$ são os números chamados **termos**.

O **grau do polinômio** é n , e o **coeficiente principal** é o número real a_n . Polinômios com um, dois e três termos são chamados **monômios**, **binômios** e **trinômios**, respectivamente.

Um polinômio escrito com as potências de x na *ordem decrescente* está na **forma padrão**.

Para adicionar ou subtrair polinômios, nós adicionamos ou subtraímos os termos com o mesmo expoente na variável, chamados *termos semelhantes*. Caso haja termos que não sejam semelhantes, basta adicioná-los ou subtraí-los de 0 (zero).

EXEMPLO 1 Adição e subtração de polinômios

(a) $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 1) + (x^3 + 2x^2 - 5x + 3)$

(b) $(4x^2 + 3x - 4) - (2x^3 + x^2 - x + 2)$

SOLUÇÃO

(a) Agrupamos os termos semelhantes e então os combinamos, como segue:

$$\begin{aligned} (2x^3 + x^3) + (-3x^2 + 2x^2) + (4x + (-5x)) + (-1 + 3) \\ = 3x^3 - x^2 - x + 2 \end{aligned}$$

(b) Agrupamos os termos semelhantes e então os combinamos, como segue:

$$\begin{aligned} (0 - 2x^3) + (4x^2 - x^2) + (3x - (-x)) + (-4 - 2) \\ = -2x^3 + 3x^2 + 4x - 6 \end{aligned}$$

Para **calcular o produto** de dois polinômios, usamos a propriedade distributiva, por exemplo:

$$\begin{aligned}
 (3x + 2)(4x - 5) &= \\
 &= 3x(4x - 5) + 2(4x - 5) \\
 &= (3x)(4x) - (3x)(5) + (2)(4x) - (2)(5) \\
 &= \underbrace{12x^2}_{\text{produto dos primeiros termos}} - \underbrace{15x}_{\text{produto dos termos externos}} + \underbrace{8x}_{\text{produto dos termos internos}} - \underbrace{10}_{\text{produto dos últimos termos}}
 \end{aligned}$$

Os produtos dos termos externos e dos termos internos são termos semelhantes e podem ser adicionados, como na expressão a seguir:

$$(3x + 2)(4x - 5) = 12x^2 - 7x - 10$$

Como observamos, a multiplicação de dois polinômios requer a multiplicação de cada termo de um polinômio por todos os termos do outro.

Uma maneira conveniente de desenvolver o produto, para facilitar sua resolução, é organizar os polinômios na forma padrão, um sobre o outro, de modo que os termos iguais fiquem alinhados verticalmente, como no Exemplo 2.

EXEMPLO 2 Multiplicação de polinômios na forma vertical

Escreva $(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5)$ na forma padrão.

SOLUÇÃO

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 4x + 3 \\
 x^2 + 4x + 5 \\
 \hline
 x^4 - 4x^3 + 3x^2 \\
 4x^3 - 16x^2 + 12x \\
 5x^2 - 20x + 15 \\
 \hline
 x^4 + 0x^3 - 8x^2 - 8x + 15
 \end{array}$$

Assim:

$$(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5) = x^4 - 8x^2 - 8x + 15$$

Produtos notáveis

Alguns produtos são úteis quando, por exemplo, precisamos fatorar polinômios. Observe os principais produtos notáveis:

Alguns produtos notáveis

Sejam u e v números reais, variáveis ou expressões algébricas.

- | | |
|--|---|
| 1. Produto de uma soma e de uma diferença: | $(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$ |
| 2. Quadrado de uma soma de dois termos: | $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ |
| 3. Quadrado de uma diferença de dois termos: | $(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$ |
| 4. Cubo de uma soma de dois termos: | $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ |
| 5. Cubo de uma diferença de dois termos: | $(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$ |

EXEMPLO 3 Uso dos produtos notáveis

Calcule os produtos:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad (3x + 8)(3x - 8) &= (3x)^2 - 8^2 \\ &= 9x^2 - 64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad (5y - 4)^2 &= (5y)^2 - 2(5y)(4) + 4^2 \\ &= 25y^2 - 40y + 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad (2x - 3y)^3 &= (2x)^3 - 3(2x)^2(3y) \\ &\quad + 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3 \\ &= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3 \end{aligned}$$

Fatoração de polinômios com produtos notáveis

Fatorar um polinômio é escrever um produto de dois ou mais **fatores polinomiais**. Um polinômio que não pode ser fatorado com o uso de coeficientes inteiros é um **polinômio irredutível**.

Um polinômio está **fatorado completamente** se estiver escrito como um produto de seus fatores irredutíveis. Por exemplo,

$$2x^2 + 7x - 4 = (2x - 1)(x + 4)$$

e

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$$

estão fatorados completamente (pode ser mostrado que $x^2 + 1$ é irredutível). Mas,

$$x^3 - 9x = x(x^2 - 9)$$

não está fatorado completamente porque $(x^2 - 9)$ não é irredutível. De fato,

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

e

$$x^3 - 9x = x(x - 3)(x + 3).$$

Agora o polinômio está fatorado completamente.

O primeiro passo na fatoração de um polinômio é colocar em evidência fatores comuns de seus termos, usando a propriedade distributiva, como no Exemplo 4.

EXEMPLO 4 Colocação dos fatores comuns em evidência

(a) $2x^3 + 2x^2 - 6x = 2x(x^2 + x - 3)$

(b) $u^3v + uv^3 = uv(u^2 + v^2)$

Reconhecer a forma expandida dos cinco produtos notáveis citados nos auxiliará a fatorar uma expressão algébrica.

Dos produtos notáveis, a forma mais fácil de ser identificada é a diferença de dois quadrados.

EXEMPLO 5 Fatoração da diferença de dois quadrados

(a) $25x^2 - 36 = (5x)^2 - 6^2$
 $= (5x + 6)(5x - 6)$

(b) $4x^2 - (y + 3)^2 = (2x)^2 - (y + 3)^2$
 $= [2x + (y + 3)][2x - (y + 3)]$
 $= (2x + y + 3)(2x - y - 3)$

Um trinômio quadrado perfeito é o quadrado de um binômio e tem uma das duas formas observadas anteriormente. O primeiro e o último termo são quadrados de u e v , e o termo central é duas vezes o produto de u e v . Os sinais da operação antes do termo central e no binômio são os mesmos.

EXEMPLO 6 Fatoração de trinômios quadrados perfeitos

(a) $9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2(3x)(1) + 1^2$
 $= (3x + 1)^2$

(b) $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2$
 $= (2x - 3y)^2$

Observe agora a soma e a diferença de dois cubos (mais dois casos de produtos notáveis).

<p>Mesmos sinais</p> $u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2)$ <p style="text-align: center;">Sinais opostos</p>	<p>Mesmos sinais</p> $u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$ <p style="text-align: center;">Sinais opostos</p>
--	--

EXEMPLO 7 Fatoração da soma e da diferença de dois cubos

(a) $x^3 - 64 = x^3 - 4^3$

$$= (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$$

(b) $8x^3 + 27 = (2x)^3 + 3^3$

$$= (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$$

Fatoração de trinômios

Fatorar o trinômio $ax^2 + bx + c$ como um produto de binômios com coeficientes inteiros requer fatorar os inteiros a e c , isto é, transformá-los em produtos de 2 números. Vejamos:

$$\begin{array}{c}
 \text{Fatores de } a \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 ax^2 + bx + c = (\square x + \square)(\square x + \square) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \text{Fatores de } c
 \end{array}$$

A quantidade de pares formados fatorando-se a e c é finito. Então, podemos listar todos os possíveis fatores binomiais, isto é, os possíveis fatores formados pela soma de dois monômios. Para isso, iniciamos checando cada par encontrado até descobrir um que funcione (se nenhum par funcionar, então o trinômio é irredutível).

Vejamos o Exemplo 8.

EXEMPLO 8 Fatoração de um trinômio com coeficiente principal igual a 1

Fatore $x^2 + 5x - 14$.

SOLUÇÃO

O inteiro que representa a nesse trinômio é o 1. Fatorando o 1, o único par de fatores que pode existir é 1 e 1, pois não existe nenhum outro par de números cujo produto resulte em 1.

O inteiro que representa c nesse trinômio é o 14. Os únicos pares de fatores são 1 e 14, e também 2 e 7. Então, substituindo os números encontrados, as quatro possíveis fatorações do trinômio são:

$$\begin{array}{ll}
 (x + 1)(x - 14) & (x - 1)(x + 14) \\
 (x + 2)(x - 7) & (x - 2)(x + 7)
 \end{array}$$

Ao comparar a soma dos produtos dos termos externos e internos da forma fatorada com o termo central do trinômio, vemos que o correto é:

$$x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7)$$

Com a prática, você verá que não é necessário listar todos os possíveis fatores binomiais para fatorar um trinômio. Muitas vezes, podemos testar as possibilidades mentalmente.

EXEMPLO 9 Fatoração de um trinômio com coeficiente principal diferente de 1

Fatore $35x^2 - x - 12$.

SOLUÇÃO

Os pares de fatores do coeficiente principal são 1 e 35, e também 5 e 7. Os pares de fatores de 12 são 1 e 12, 2 e 6, e também 3 e 4. Portanto, as possíveis fatorações precisam ser da forma:

$$\begin{array}{ll} (x - *)(35x + ?) & (x + *)(35x - ?) \\ (5x - *)(7x + ?) & (5x + *)(7x - ?) \end{array}$$

onde * e ? são um dos pares de fatores de 12. Como os dois fatores binômiais têm sinais opostos, existem seis possibilidades para cada uma das quatro formas, um total de 24 possibilidades. Se você tentar, mental e sistematicamente, deverá encontrar:

$$35x^2 - x - 12 = (5x - 3)(7x + 4).$$

Outra opção para fatorar o trinômio é utilizar o seguinte resultado:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

sendo x_1 e x_2 soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$ (veremos a resolução dessa equação no Capítulo 5).

Podemos estender a técnica dos Exemplos 8 e 9 para trinômios com duas variáveis, como temos no Exemplo 10.

EXEMPLO 10 Fatoração de trinômios em x e y

Fatore $3x^2 - 7xy + 2y^2$.

SOLUÇÃO

A única maneira de obter $-7xy$ como termo central é com $3x^2 - 7xy + 2y^2 = (3x - ?y)(x - ?y)$. Os sinais nos binômios precisam ser negativos, porque o coeficiente de y^2 é positivo e o coeficiente do termo central é negativo. Conferindo as duas possibilidades, $(3x - y)(x - 2y)$ e $(3x - 2y)(x - y)$, temos que:

$$3x^2 - 7xy + 2y^2 = (3x - y)(x - 2y).$$

Fatoração por agrupamento

Note que $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$. Se um polinômio com quatro termos é o produto de dois binômios, podemos agrupar os termos para fatorar. Para isso, utilizamos a fatoração colocando o termo comum em evidência duas vezes.

EXEMPLO 11 Fatoração por agrupamento

(a) $3x^3 + x^2 - 6x - 2$

$$= (3x^3 + x^2) - (6x + 2)$$

$$= x^2(3x + 1) - 2(3x + 1)$$

$$= (3x + 1)(x^2 - 2)$$

(b) $2ac - 2ad + bc - bd$

$$= (2ac - 2ad) + (bc - bd)$$

$$= 2a(c - d) + b(c - d)$$

$$= (c - d)(2a + b)$$

Abaixo temos algumas orientações para fatorar polinômios:

Fatoração de polinômios

1. Observar os fatores comuns.
2. Observar as formas especiais dos polinômios.
3. Usar pares de fatores.
4. Se existirem quatro termos, tentar agrupá-los.

Algumas fórmulas importantes de álgebra

Para facilitar o estudo, reunimos a seguir as principais fórmulas dos conteúdos vistos até o momento.

Potências

Se todas as bases são diferentes de zero:

$$u^m u^n = u^{m+n}$$

$$u^0 = 1$$

$$(uv)^m = u^m v^m$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)^m = \frac{u^m}{v^m}$$

$$\frac{u^m}{u^n} = u^{m-n}$$

$$u^{-n} = \frac{1}{u^n}$$

$$(u^m)^n = u^{mn}$$

$$\sqrt[n]{u^m} = (\sqrt[n]{u})^m$$

$$\sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} |u| & n \text{ par} \\ u & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$u^{1/n} = \sqrt[n]{u} \quad u^{m/n} = (u^{1/n})^m = (\sqrt[n]{u})^m$$

$$u^{m/n} = (u^m)^{1/n} = \sqrt[n]{u^m}$$

Produtos notáveis e fatoração de polinômios

$$(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$$

$$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$$

$$(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$$

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

$$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$$

$$(u + v)(u^2 - uv + v^2) = u^3 + v^3$$

$$(u - v)(u^2 + uv + v^2) = u^3 - v^3$$

Radicais e expoentes racionais

Se todas as raízes são números reais:

$$\sqrt[n]{uv} = \sqrt[n]{u} \cdot \sqrt[n]{v} \quad \sqrt[n]{\frac{u}{v}} = \frac{\sqrt[n]{u}}{\sqrt[n]{v}} \quad (v \neq 0)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{u}} = \sqrt[nm]{u} \quad (\sqrt[n]{u})^m = u^{m/n}$$

EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 4, escreva o polinômio na forma padrão e verifique o seu grau.

1. $2x - 1 + 3x^2$ 2. $x^2 - 2x - 2x^3 + 1$
 3. $1 - x^7$ 4. $x^2 - x^4 + x - 3$

Nos exercícios de 5 a 8, verifique se a expressão é um polinômio.

5. $x^3 - 2x^2 + x^{-1}$ 6. $\frac{2x-4}{x}$
 7. $(x^2 + x + 1)^2$ 8. $1 - 3x + x^4$

Nos exercícios de 9 a 18, simplifique a expressão. Escreva sua resposta na forma padrão.

9. $(x^2 - 3x + 7) + (3x^2 + 5x - 3)$
 10. $(-3x^2 - 5) - (x^2 + 7x + 12)$
 11. $(4x^3 - x^2 + 3x) - (x^3 + 12x - 3)$
 12. $-(y^2 + 2y - 3) + (5y^2 + 3y + 4)$
 13. $2x(x^2 - x + 3)$ 14. $y^2(2y^2 + 3y - 4)$
 15. $-3u(4u - 1)$ 16. $-4v(2 - 3v^3)$
 17. $(2 - x - 3x^2)(5x)$ 18. $(1 - x^2 + x^4)(2x)$

Nos exercícios de 19 a 40, calcule o produto. Use alinhamento vertical nos exercícios 33 e 34.

19. $(x - 2)(x + 5)$ 20. $(2x + 3)(4x + 1)$
 21. $(3x - 5)(x + 2)$ 22. $(2x - 3)(2x + 3)$
 23. $(3x - y)(3x + y)$ 24. $(3 - 5x)^2$
 25. $(3x + 4y)^2$ 26. $(x - 1)^3$
 27. $(2u - v)^3$ 28. $(u + 3v)^3$
 29. $(2x^3 - 3y)(2x^3 + 3y)$ 30. $(5x^3 - 1)^2$
 31. $(x^2 - 2x + 3)(x + 4)$
 32. $(x^2 + 3x - 2)(x - 3)$
 33. $(x^2 + x - 3)(x^2 + x + 1)$
 34. $(2x^2 - 3x + 1)(x^2 - x + 2)$
 35. $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$
 36. $(x^{1/2} - y^{1/2})(x^{1/2} + y^{1/2})$
 37. $(\sqrt{u} + \sqrt{v})(\sqrt{u} - \sqrt{v})$
 38. $(x^2 - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3})$
 39. $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
 40. $(x + 1)(x^2 - x + 1)$

Nos exercícios de 41 a 44, fator colocando o fator comum em evidência.

41. $5x - 15$ 42. $5x^3 - 20x$
 43. $yz^3 - 3yz^2 + 2yz$ 44. $2x(x + 3) - 5(x + 3)$

Nos exercícios de 45 a 48, fator as diferenças de dois quadrados.

45. $z^2 - 49$ 46. $9y^2 - 16$
 47. $64 - 25y^2$ 48. $16 - (x + 2)^2$

Nos exercícios de 49 a 52, fator o trinômio quadrado perfeito.

49. $y^2 + 8y + 16$ 50. $36y^2 + 12y + 1$
 51. $4z^2 - 4z + 1$ 52. $9z^2 - 24z + 16$

Nos exercícios de 53 a 58, fator a soma ou a diferença de dois cubos.

53. $y^3 - 8$ 54. $z^3 + 64$
 55. $27y^3 - 8$ 56. $64z^3 + 27$
 57. $1 - x^3$ 58. $27 - y^3$

Nos exercícios de 59 a 68, fator o trinômio.

59. $x^2 + 9x + 14$ 60. $y^2 - 11y + 30$
 61. $z^2 - 5z - 24$ 62. $6t^2 + 5t + 1$
 63. $14u^2 - 33u - 5$ 64. $10v^2 + 23v + 12$
 65. $12x^2 + 11x - 15$ 66. $2x^2 - 3xy + y^2$
 67. $6x^2 + 11xy - 10y^2$ 68. $15x^2 + 29xy - 14y^2$

Nos exercícios de 69 a 74, fator por agrupamento.

69. $x^3 - 4x^2 + 5x - 20$
 70. $2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$
 71. $x^6 - 3x^4 + x^2 - 3$
 72. $x^6 + 2x^4 + x^2 + 2$
 73. $2ac + 6ad - bc - 3bd$
 74. $3uw + 12uz - 2vw - 8vz$

Nos exercícios de 75 a 90, fator completamente.

75. $x^3 + x$ 76. $4y^3 - 20y^2 + 25y$
 77. $18y^3 + 48y^2 + 32y$ 78. $2x^3 - 16x^2 + 14x$
 79. $16y - y^3$ 80. $3x^4 + 24x$
 81. $5y + 3y^2 - 2y^3$ 82. $z - 8z^4$

83. $2(5x + 1)^2 - 18$

84. $5(2x - 3)^2 - 20$

85. $12x^2 + 22x - 20$

86. $3x^2 + 13xy - 10y^2$

87. $2ac - 2bd + 4ad - bc$

88. $6ac - 2bd + 4bc - 3ad$

89. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

90. $x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x$

91. Mostre que o agrupamento $(2ac + bc) - (2ad + bd)$ leva à mesma fatoração que no Exemplo 11b. Explique por que a terceira possibilidade, $(2ac - bd) + (-2ad + bc)$ não leva a uma fatoração.

$$57. \left(\frac{-8x^6}{y^{-3}}\right)^{2/3} = (-8x^6y^3)^{2/3} = (-8)^{2/3}(x^6)^{2/3}(y^3)^{2/3} \\ = [(-8)^2]^{1/3} x^{12/3} y^{6/3} = 64^{1/3} x^4 y^2 = 4x^4 y^2$$

$$58. \frac{(p^2q^4)^{1/2}}{(27q^3p^6)^{1/3}} = \frac{\sqrt{p^2q^4}}{\sqrt[3]{27q^3p^6}} = \frac{\sqrt{(pq^2)^2}}{\sqrt[3]{(3qp^2)^3}} = \frac{|pq^2|}{3qp^2} \\ = \frac{|p|q^2}{3qp^2} = \frac{q}{3|p|}$$

$$59. \frac{(x^9y^6)^{-1/3}}{(x^6y^2)^{-1/2}} = \frac{(x^6y^2)^{1/2}}{(x^9y^6)^{1/3}} = \frac{\sqrt{x^6y^2}}{\sqrt[3]{x^9y^6}} = \frac{|x^3y|}{x^3y^2} \\ = \frac{1}{|y|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{|x|}{x|y|}$$

$$60. \left(\frac{2x^{1/2}}{y^{2/3}}\right)\left(\frac{3x^{-2/3}}{y^{1/2}}\right) = \frac{6x^{1/2-2/3}}{y^{2/3+1/2}} = \frac{6x^{-1/6}}{y^{7/6}} = \frac{6}{x^{1/6}y^{7/6}}$$

$$61. \sqrt{9x^{-6}y^4} = |3x^{-3}y^2| = 3y^2|x^{-3}| = \frac{3y^2}{|x^3|}$$

$$62. \sqrt{16y^8z^{-2}} = |4y^4z^{-1}| = 4y^4|z^{-1}| = \frac{4y^4}{|z|}$$

$$63. \sqrt[4]{\frac{3x^8y^2}{8x^2}} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 3x^8y^2}{2 \cdot 8x^2}} = \frac{\sqrt[4]{6x^6y^2}}{2} = \frac{\sqrt[4]{6x^4x^2y^2}}{2} \\ = \frac{|x|\sqrt[4]{6x^2y^2}}{2}$$

$$64. \sqrt[5]{\frac{4x^6y}{9x^3}} = \sqrt[5]{\frac{27 \cdot 4x^6y}{27 \cdot 9x^3}} = \sqrt[5]{\frac{108x^6y}{3^5x^3}} = \frac{\sqrt[5]{108x^3y}}{3}$$

$$65. \sqrt[3]{\frac{4x^2}{y^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2x^2}{y}} = \sqrt[3]{\frac{(4x^2)(2x^2)}{(y^2)(y)}} = \sqrt[3]{\frac{8x^4}{y^3}} = \frac{2\sqrt[3]{x^4}}{y} \\ = \frac{2x\sqrt[3]{x}}{y}$$

$$66. \sqrt[5]{9ab^6} \cdot \sqrt[5]{27a^2b^{-1}} = \sqrt[5]{(9ab^6)(27a^2b^{-1})} \\ = \sqrt[5]{243a^3b^5} = 3b\sqrt[5]{a^3}$$

$$67. 3\sqrt{4^2 \cdot 3} - 2\sqrt{6^2 \cdot 3} = 3 \cdot 4\sqrt{3} - 2 \cdot 6\sqrt{3} \\ = 12\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 0$$

$$68. 2\sqrt{5^2 \cdot 7} - 4\sqrt{2^2 \cdot 7} = 2 \cdot 5\sqrt{7} - 4 \cdot 2\sqrt{7} \\ = 10\sqrt{7} - 8\sqrt{7} = 2\sqrt{7}$$

$$69. \sqrt{x^2 \cdot x} - \sqrt{(2y)^2 \cdot x} = |x|\sqrt{x} - 2|y| \cdot \sqrt{x} \\ = (|x| - 2|y|)\sqrt{x} = (x - 2|y|)\sqrt{x} \text{ (como a raiz} \\ \text{quadrada é indefinida quando } x < 0).$$

$$70. \sqrt{(3x)^2 \cdot 2y} + \sqrt{y^2 \cdot 2y} \\ = 3|x|\sqrt{2y} + |y| \cdot \sqrt{2y} = \\ (3|x| + |y|)\sqrt{2y} = (3|x| + y)\sqrt{2y} \text{ (como a raiz} \\ \text{quadrada é indefinida quando } y < 0).$$

$$71. \sqrt{2+6} < \sqrt{2} + \sqrt{6} \text{ (2,828... < 3,863...)}$$

$$72. \sqrt{4} + \sqrt{9} > \sqrt{4+9} \text{ (5 > 3,605...)}$$

$$73. (3^{-2})^{-1/2} = 3$$

$$74. (2^{-3})^{1/3} < 2 \left(\frac{1}{2} < 2\right)$$

$$75. \sqrt[4]{(-2)^4} > -2 \text{ (2 > -2)}$$

$$76. \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

$$77. 2^{2/2} < 3^{3/4} \text{ (1,587... < 2,279...)}$$

$$78. 4^{-2/3} < 3^{-3/4} \text{ (0,396... < 0,438...)}$$

$$79. t = 0,45\sqrt{200} = 4,5\sqrt{2} \approx 6,36 \text{ s}$$

CAPÍTULO 3

Exercícios

1. $3x^2 + 2x - 1$; grau 2.

2. $-2x^3 + x^2 - 2x + 1$; grau 3.

3. $-x^7 + 1$; grau 7.

4. $-x^4 + x^2 + x - 3$; grau 4.

5. Não, não pode haver um expoente negativo como x^{-1} .

6. Não, não pode haver uma variável no denominador.

7. Sim.

8. Sim.

9. $(x^2 - 3x + 7) + (3x^2 + 5x - 3) = (x^2 + 3x^2) + (-3x + 5x) + (7 - 3) = 4x^2 + 2x + 4$

10. $(-3x^2 - 5) + (-x^2 - 7x - 12) = (-3x^2 - x^2) - 7x + (-5 - 12) = -4x^2 - 7x - 17$

11. $(4x^3 - x^2 + 3x) + (-x^3 - 12x + 3) = (4x^3 - x^3) - x^2 + (3x - 12x) + 3 = 3x^3 - x^2 - 9x + 3$

12. $(-y^2 - 2y + 3) + (5y^2 + 3y + 4) = (-y^2 + 5y^2) + (-2y + 3y) + (3 + 4) = 4y^2 + y + 7$
13. $2x(x^2) - 2x(x) + 2x(3) = 2x^3 - 2x^2 + 6x$
14. $y^2(2y^2) + y^2(3y) - y^2(4) = 2y^4 + 3y^3 - 4y^2$
15. $(-3u)(4u) + (-3u)(-1) = -12u^2 + 3u$
16. $(-4v)(2) + (-4v)(-3v^3) = -8v + 12v^4 = 12v^4 - 8v$
17. $2(5x) - x(5x) - 3x^2(5x) = 10x - 5x^2 - 15x^3 = -15x^3 - 5x^2 + 10x$
18. $1(2x) - x^2(2x) + x^4(2x) = 2x - 2x^3 + 2x^5 = 2x^5 - 2x^3 + 2x$
19. $x(x + 5) - 2(x + 5) = (x)(x) + (x)(5) - (2)(x) - (2)(5) = x^2 + 5x - 2x - 10 = x^2 + 3x - 10$
20. $2x(4x + 1) + 3(4x + 1) = (2x)(4x) + (2x)(1) + (3)(4x) + (3)(1) = 8x^2 + 2x + 12x + 3 = 8x^2 + 14x + 3$
21. $3x(x + 2) - 5(x + 2) = (3x)(x) + (3x)(2) - (5)(x) - (5)(2) = 3x^2 + 6x - 5x - 10 = 3x^2 + x - 10$
22. $(2x)^2 - (3)^2 = 4x^2 - 9$
23. $(3x)^2 - (y)^2 = 9x^2 - y^2$
24. $(3)^2 - 2(3)(5x) + (5x)^2 = 9 - 30x + 25x^2 = 25x^2 - 30x + 9$
25. $(3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$
26. $(x)^3 - 3(x)^2(1) + 3(x)(1)^2 - (1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
27. $(2u)^3 - 3(2u)^2(v) + 3(2u)(v)^2 - (v)^3 = 8u^3 - 3v(4u^2) + 6uv^2 - v^3 = 8u^3 - 12u^2v + 6uv^2 - v^3$
28. $(u)^3 + 3(u)^2(3v) + 3(u)(3v)^2 + (3v)^3 = u^3 + 9u^2v + 3u(9v^2) + 27v^3 = u^3 + 9u^2v + 27uv^2 + 27v^3$
29. $(2x^3)^2 - (3y)^2 = 4x^6 - 9y^2$
30. $(5x^3)^2 - 2(5x^3)(1) + (1)^2 = 25x^6 - 10x^3 + 1$
31. $x^2(x + 4) - 2x(x + 4) + 3(x + 4) = (x^2)(x) + (x^2)(4) - (2x)(x) - (2x)(4) + (3)(x) + (3)(4) = x^3 + 4x^2 - 2x^2 - 8x + 3x + 12 = x^3 + 2x^2 - 5x + 12$
32. $x^2(x - 3) + 3x(x - 3) - 2(x - 3) = (x^2)(x) + (x^2)(-3) + (3x)(x) + (3x)(-3) - (2)(x) - (2)(-3) = x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x - 2x + 6 = x^3 - 11x + 6$
33. $x^2(x^2 + x + 1) + x(x^2 + x + 1) - 3(x^2 + x + 1) = (x^2)(x^2) + (x^2)(x) + (x^2)(1) + (x)(x^2) + (x)(x) + (x)(1) - (3)(x^2) - (3)(x) - (3)(1) = x^4 + x^3 + x^2 + x^3 + x^2 + x - 3x^2 - 3x - 3 = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 3$
34. $2x^2(x^2 - x + 2) - 3x(x^2 - x + 2) + 1(x^2 - x + 2) = (2x^2)(x^2) + (2x^2)(-x) + (2x^2)(2) - (3x)(x^2) - (3x)(-x) - (3x)(2) + (1)(x^2) + (1)(-x) + (1)(2) = 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x^3 + 3x^2 - 6x + x^2 - x + 2 = 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x + 2$
35. $(x^2) - (\sqrt{2})^2 = x^2 - 2$
36. $(x^{1/2})^2 - (y^{1/2})^2 = x - y, x \geq 0 \text{ e } y \geq 0$
37. $(\sqrt{u})^2 - (\sqrt{v})^2 = u - v, u \geq 0 \text{ e } v \geq 0$
38. $(x^2)^2 - (\sqrt{3})^2 = x^4 - 3$
39. $x(x^2 + 2x + 4) - 2(x^2 + 2x + 4) = (x)(x^2) + (x)(2x) + (x)(4) - (2)(x^2) - (2)(2x) - (2)(4) = x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8 = x^3 - 8$
40. $x(x^2 - x + 1) + 1(x^2 - x + 1) = (x)(x^2) + (x)(-x) + (x)(1) + (1)(x^2) + (1)(-x) + (1)(1) = x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^3 + 1$
41. $5(x - 3)$
42. $5x(x^2 - 4)$
43. $yz(z^2 - 3z + 2)$
44. $(x + 3)(2x - 5)$
45. $z^2 - 7^2 = (z + 7)(z - 7)$
46. $(3y)^2 - 4^2 = (3y + 4)(3y - 4)$
47. $8^2 - (5y)^2 = (8 + 5y)(8 - 5y)$
48. $4^2 - (x + 2)^2 = [4 + (x + 2)][4 - (x + 2)] = (6 + x)(2 - x)$
49. $y^2 + 2(y)(4) + 4^2 = (y + 4)^2$
50. $(6y)^2 + 2(6y)(1) + 1^2 = (6y + 1)^2$
51. $(2z)^2 - 2(2z)(1) + 1^2 = (2z - 1)^2$
52. $(3z)^2 - 2(3z)(4) + 4^2 = (3z - 4)^2$
53. $y^3 - 2^3 = (y - 2)[y^2 + (y)(2) + 2^2] = (y - 2)(y^2 + 2y + 4)$

54. $z^3 + 4^3 = (z + 4)[z^2 - (z)(4) + 4^2] = (z + 4)(z^2 - 4z + 16)$
55. $(3y)^3 - 2^3 = (3y - 2)[(3y)^2 + (3y)(2) + 2^2] = (3y - 2)(9y^2 + 6y + 4)$
56. $(4z)^3 + 3^3 = (4z + 3)[(4z)^2 - (4z)(3) + 3^2] = (4z + 3)(16z^2 - 12z + 9)$
57. $1^3 - x^3 = (1 - x)[1^2 + (1)(x) + x^2] = (1 - x)(1 + x + x^2) = (1 - x)(1 + x + x^2)$
58. $3^3 - y^3 = (3 - y)[3^2 + (3)(y) + y^2] = (3 - y)(9 + 3y + y^2) = (3 - y)(9 + 3y + y^2)$
59. $(x + 2)(x + 7)$
60. $(y - 5)(y - 6)$
61. $(z - 8)(z + 3)$
62. $(2t + 1)(3t + 1)$
63. $(2u - 5)(7u + 1)$
64. $(2v + 3)(5v + 4)$
65. $(3x + 5)(4x - 3)$
66. $(x - y)(2x - y)$
67. $(2x + 5y)(3x - 2y)$
68. $(3x + 7y)(5x - 2y)$
69. $(x^3 - 4x^2) + (5x - 20) = x^2(x - 4) + 5(x - 4) = (x - 4)(x^2 + 5)$
70. $(2x^3 - 3x^2) + (2x - 3) = x^2(2x - 3) + 1(2x - 3) = (2x - 3)(x^2 + 1)$
71. $(x^6 - 3x^4) + (x^2 - 3) = x^4(x^2 - 3) + 1(x^2 - 3) = (x^2 - 3)(x^4 + 1)$
72. $(x^6 + 2x^4) + (x^2 + 2) = x^4(x^2 + 2) + 1(x^2 + 2) = (x^2 + 2)(x^4 + 1)$
73. $(2ac + 6ad) - (bc + 3bd) = 2a(c + 3d) - b(c + 3d) = (c + 3d)(2a - b)$
74. $(3uw + 12uz) - (2vw + 8vz) = 3u(w + 4z) - 2v(w + 4z) = (w + 4z)(3u - 2v)$
75. $x(x^2 + 1)$
76. $y(4y^2 - 20y + 25) = y[(2y)^2 - 2(2y)(5) + 5^2] = y(2y - 5)^2$
77. $2y(9y^2 + 24y + 16) = 2y[(3y)^2 + 2(3y)(4) + 4^2] = 2y(3y + 4)^2$
78. $2x(x^2 - 8x + 7) = 2x(x - 1)(x - 7)$
79. $y(16 - y^2) = y(4^2 - y^2) = y(4 + y)(4 - y)$
80. $3x(x^3 + 8) = 3x(x^3 + 2^3) = 3x(x + 2)[x^2 - (x)(2) + 2^2] = 3x(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
81. $y(5 + 3y - 2y^2) = y(1 + y)(5 - 2y)$
82. $z(1 - 8z^3) = z[1^3 - (2z)^3] = z(1 - 2z)[1^2 + (1)(2z) + (2z)^2] = z(1 - 2z)(1 + 2z + 4z^2)$
83. $2[(5x + 1)^2 - 9] = 2[(5x + 1)^2 - 3^2] = 2[(5x + 1) + 3][(5x + 1) - 3] = 2(5x + 4)(5x - 2)$
84. $5[(2x - 3)^2 - 4] = 5[(2x - 3)^2 - 2^2] = 5[(2x - 3) + 2][(2x - 3) - 2] = 5(2x - 1)(2x - 5)$
85. $2(6x^2 + 11x - 10) = 2(2x + 5)(3x - 2)$
86. $(x + 5y)(3x - 2y)$
87. $(2ac + 4ad) - (2bd + bc) = 2a(c + 2d) - b(2d + c) = (c + 2d)(2a - b) = (2c - b)(c + 2d)$
88. $(6ac + 4bc) - (2bd + 3ad) = 2c(3a + 2b) - d(2b + 3a) = (3a + 2b)(2a - d)$
89. $(x^3 - 3x^2) - (4x - 12) = x^2(x - 3) - 4(x - 3) = (x - 3)(x^2 - 4) = (x - 3)(x + 2)(x - 2)$
90. $x(x^3 - 4x^2 - x + 4) = x(x - 1)(x^2 - 3x - 4) = x(x - 1)(x + 1)(x - 4)$
91. $(2ac + bc) - (2ad + bd) = c(2a + b) - d(2a + b) = (c - d)(2a + b)$
Nenhum dos agrupamentos $(2ac - bd)$ e $(-2ad + bc)$ tem um fator comum para remover.

CAPÍTULO 4

Exercícios

1. $\frac{5}{9} + \frac{10}{9} = \frac{5 + 10}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$
2. $\frac{17}{32} - \frac{9}{32} = \frac{17 - 9}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$
3. $\frac{20}{21} \cdot \frac{9}{22} = \frac{20 \cdot 9}{21 \cdot 22} = \frac{180}{462} = \frac{30}{77}$
4. $\frac{33}{25} \cdot \frac{20}{77} = \frac{33 \cdot 20}{25 \cdot 77} = \frac{660}{1.925} = \frac{12}{35}$