

MA093 – Matemática básica 2

Identidades trigonométricas

Francisco A. M. Gomes

UNICAMP - IMECC

Setembro de 2018

Tópicos importantes

O objetivo dessa aula é investigar

- 1 Principais identidades trigonométricas.
- 2 Usos de identidades:
 - 1 Cálculo de funções.
 - 2 Simplificação de expressões.
 - 3 Demonstração de outras identidades.

Identidades

Identidade

Uma identidade é uma igualdade que é sempre verdadeira, independentemente do valor das variáveis que nela aparecem.

Exemplo: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Usamos identidades trigonométricas para

- Calcular funções trigonométricas
- Simplificar expressões
- Provar outras identidades
- Resolver equações

Identidades recíprocas e de quociente

Identidades de quociente

$$\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$$

Identidades recíprocas

$$\begin{aligned} \sec(x) &= \frac{1}{\cos(x)} & \csc(x) &= \frac{1}{\text{sen}(x)} \\ \tan(x) &= \frac{1}{\cot(x)} & \cot(x) &= \frac{1}{\tan(x)} \end{aligned}$$

Identidades Pitagóricas

Identidades Pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$

$$1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$$

- A segunda identidade pode ser obtida dividindo os dois lados da primeira por $\cos^2(\theta)$
- A terceira identidade pode ser obtida dividindo os dois lados da primeira por $\operatorname{sen}^2(\theta)$

Identidades de funções pares e ímpares

Identidades associadas à paridade

$$\textit{sen}(-x) = -\textit{sen}(x)$$

$$\textit{cos}(-x) = \textit{cos}(x)$$

$$\textit{tan}(-x) = -\textit{tan}(x)$$

Identities de arcos complementares

Identities de arcos complementares

$$\operatorname{sen}(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \cos(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\tan(x) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \cot(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sec(x) = \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \csc(x) = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Usando identidades para calcular funções

Obtendo $\cos(\theta)$ e $\tan(\theta)$ a partir de $\sin(\theta)$

Um ângulo $\theta \in [0, \pi/2)$ é tal que $\sin(\theta) = \sqrt{0,99}$.
Calcule $\cos(\theta)$ e $\tan(\theta)$.

Como $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$, temos

$$(\sqrt{0,99})^2 + \cos^2(\theta) = 1$$

$$\cos^2(\theta) = 1 - 0,99 = 0,01$$

Como $\theta \in [0, \pi/2)$, desprezamos o valor negativo de $\cos(\theta)$, logo

$$\cos(\theta) = \sqrt{0,01} = 0,1$$

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\sqrt{0,99}}{0,1} = \sqrt{\frac{0,99}{0,01}} = \sqrt{99} \approx 9,95.$$

Usando identidades para simplificar expressões

Problema

Simplifique a expressão

$$\operatorname{sen}(x) \cos^2(x) - \operatorname{sen}(x)$$

Usando a identidade Pitagórica $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$:

$$\operatorname{sen}(x) [1 - \operatorname{sen}^2(x)] - \operatorname{sen}(x)$$

$$\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}^3(x) - \operatorname{sen}(x)$$

$$-\operatorname{sen}^3(x)$$

Usando identidades para simplificar expressões

Problema

Simplifique a expressão

$$\tan(x) + \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}$$

Nesse caso, podemos converter a expressão em outra que só envolva $\sin(x)$ e $\cos(x)$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}$$

$$\frac{\sin(x)[1 + \sin(x)] + \cos^2(x)}{\cos(x)[1 + \sin(x)]}$$

$$\frac{\sin(x) + \sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos(x)[1 + \sin(x)]}$$

$$\frac{\sin(x) + 1}{\cos(x)[1 + \sin(x)]}$$

$$\frac{1}{\cos(x)}$$

$$\sec(x)$$

Usando identidades para provar outras identidades

Problema

Mostre que $\sec(x) - \cos(x) = \sec(x) \tan(x)$

O lado esquerdo da equação é equivalente a

$$\frac{1}{\cos(x)} - \cos(x) \longrightarrow \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos(x)}$$

$$\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} \longrightarrow \frac{\sin(x) \cdot \sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\sin(x) \cdot \tan(x)$$

Que é igual à expressão do lado direito

Usando identidades para provar outras identidades

Problema

Mostre que $\frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)} = \cos(x) - \frac{\cos(x)}{1 - \tan(x)}$

O denominador do segundo termo do lado direito equivale a:

$$1 - \tan(x) = 1 - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x)}$$

Substituindo essa expressão no lado direito da equação, obtemos

$$\begin{aligned} \cos(x) - \frac{\cos(x)}{\frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x)}} &\longrightarrow \cos(x) - \frac{\cos^2(x)}{\cos(x) - \sin(x)} \\ \frac{\cos^2(x) - \sin(x)\cos(x) - \cos^2(x)}{\cos(x) - \sin(x)} &\longrightarrow \frac{-\sin(x)\cos(x)}{\cos(x) - \sin(x)} \\ \frac{\sin(x)\cos(x)}{-[\cos(x) - \sin(x)]} &\longrightarrow \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)} \end{aligned}$$

Exercício 1

Problema

Sabendo que $\sin(x) = \sqrt{5}/5$ e que $0 \leq x < 90^\circ$, determine $\tan(x)$.

1/2

Exercício 2

Problema

Sabendo que $\sec(x) = 5/3$ e que $0 < x < 90^\circ$, determine $\cot(x)$.

3/4

Exercício 3

Problema

Simplifique a expressão

$$\cos(x) \tan(x) + \sin(x)$$

Convertendo a expressão em outra que só envolva $\sin(x)$ e $\cos(x)$:

$$\cos(x) \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \sin(x)$$

$$\sin(x) + \sin(x)$$

$$2\sin(x)$$

Exercício 4

Problema

Simplifique a expressão

$$\frac{1 + \operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{1 + \operatorname{sen}(x)}$$

$$2\sec(x)$$

Exercício 5

Problema

Prove que

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan(x) = 1$$

Exercício 6

Problema

Prove que

$$[1 + \cot^2(x)] \cos^2(x) = \cot^2(x)$$

Exercício 7

Problema

Prove que

$$\frac{\cos(x) - \cos(y)}{\sin(x) + \sin(y)} + \frac{\sin(x) - \sin(y)}{\cos(x) + \cos(y)} = 0$$