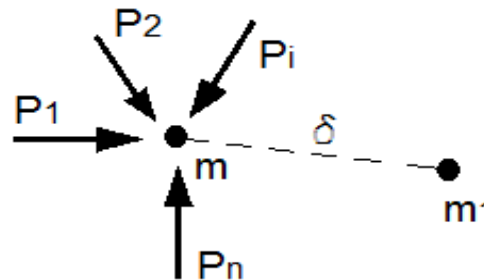


ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

02 – Princípio dos Trabalhos Virtuais

PTV – Princípio dos Trabalhos Virtuais

Desenvolvido por John Bernoulli em 1717, o princípio dos trabalhos virtuais permite obter o deslocamento e a inclinação em um determinado ponto de um sistema estrutural, seja este uma viga, grelha, pórtico ou treliça.

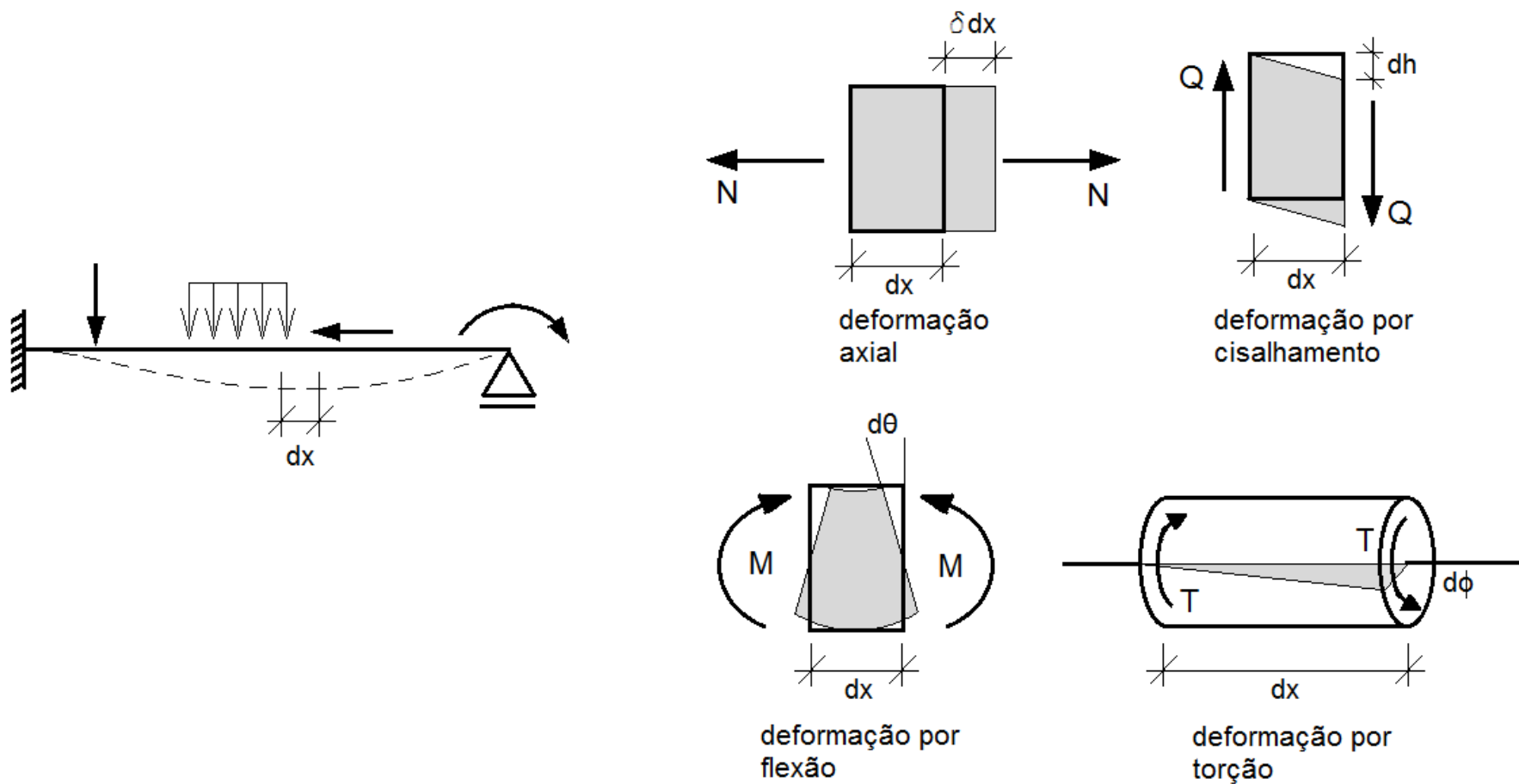


$$W_{ext} = W_{int} = 0$$

$$W_{ext} = W_{int} \rightarrow F.D = f.d$$



As figuras seguintes mostram um corpo elástico submetido a um carregamento e que atingiu sua configuração de equilíbrio:



A equação geral para sistemas estruturais deformáveis no plano, em um regime elástico-linear, considerando-se a existência dos esforços solicitantes N, Q, M e T pela superposição de efeitos causados por um carregamento externo sobre cada elemento de barra dx qualquer, será:

$$\varepsilon = \frac{\delta \cdot dx}{dx} \therefore \sigma = \frac{N}{A} \therefore \sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\frac{N}{A} = E \cdot \frac{\delta \cdot dx}{dx} \rightarrow \delta \cdot dx = \frac{N}{A \cdot E} dx$$

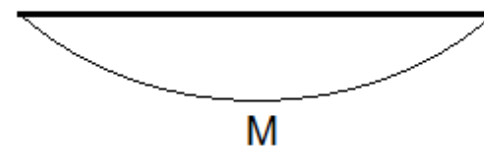
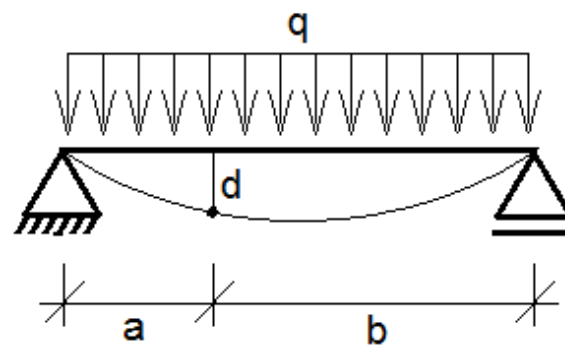
$$W_{\text{int}} = \int \frac{N \cdot dx}{A \cdot E} + \int \frac{Q \cdot dx}{AG} + \int \frac{M \cdot dx}{IE} + \int \frac{T \cdot dx}{I_p \cdot G}$$

De forma análoga ao Princípio dos Trabalhos Virtuais para deslocamentos virtuais, tem-se o Princípio das Forças Virtuais.

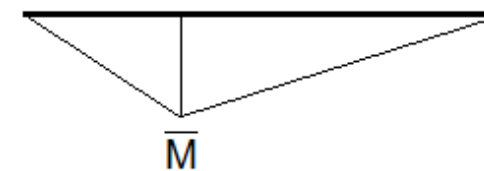
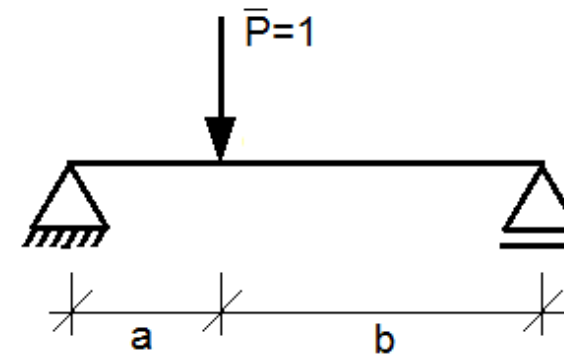


Método da Carga Unitária

De maneira particular o Princípio dos Trabalhos Virtuais considera a força virtual com valor unitário é conhecida como Método da Carga Unitária e pode ser utilizado para determinar o valor dos deslocamentos reais em sistemas estruturais.



Sistema Real



Sistema Virtual



Trabalho virtual das forças externas (cargas e reações):

$$W_{ext} = \bar{P} \cdot \delta$$

Trabalho virtual das forças internas será a soma dos trabalhos virtuais de deformação de cada um dos esforços internos atuantes:

$$W_{int} = \int \bar{N} \cdot \delta dx + \int \bar{Q} \cdot dh + \int \bar{M} \cdot d\theta + \int \bar{T} \cdot d\phi$$

$$1 \cdot \delta = \int \frac{N \bar{N}}{A \cdot E} dx + \int \frac{Q \bar{Q}}{AG} dx + \int \frac{M \bar{M}}{IE} dx + \int \frac{T \bar{T}}{I_p \cdot G} dx$$

que é a Equação Geral de Maxwell-Mohr, para o cálculo de deslocamentos em sistemas estruturais de comportamento elástico-linear devido a cargas externas atuantes.



A parcela $\int \frac{\overline{QQ}}{AG} dx$ pode ser desprezada, já que a deformação por cisalhamento apresenta valores relativamente pequenos.

Da mesma maneira, podemos desprezar a parcela $\int \frac{\overline{NN}}{A.E} dx$ em elementos que não estejam solicitados a esforço normal. Em elementos de treliça, arcos, pilares e pórticos esta parcela de deformação deve ser considerada.

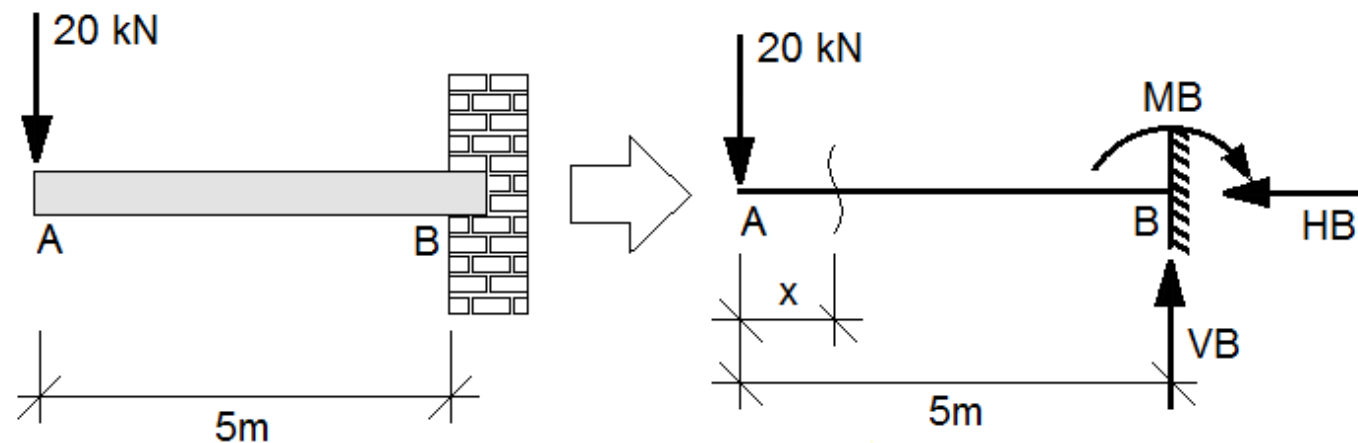
Em estruturas planas, exceto o sistema de grelhas, a parcela $\int \frac{\overline{TT}}{I_p.G} dx$ também pode ser desconsiderada.

Basicamente, a solução para o cálculo dos deslocamentos se resume a:

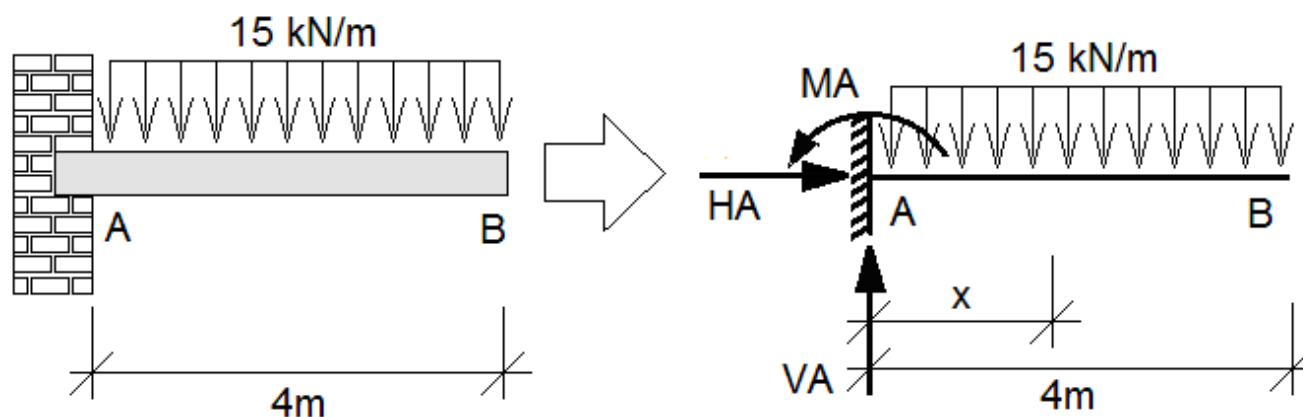
$$\delta = \int \frac{\overline{MM}}{IE} dx$$



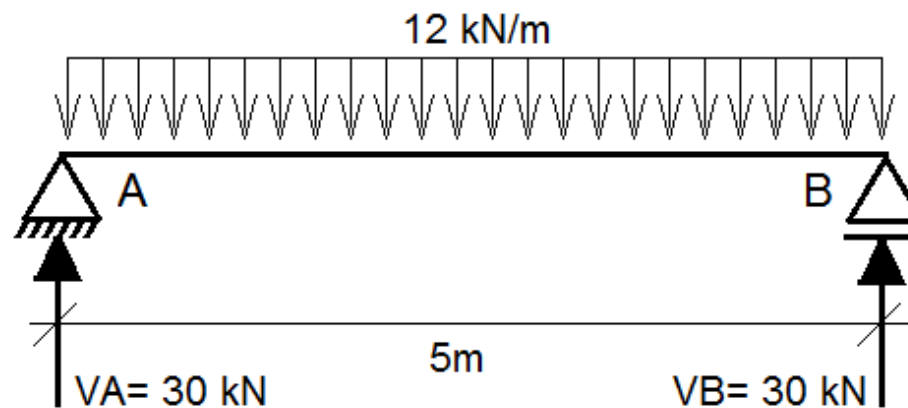
Exemplo 01 – Uma viga de 5 metros em balanço é construída em aço ($E=200$ GPa), possui um momento de inércia $I= 122 \cdot 10^6$ mm⁴ e está carregada conforme a figura. Aplicando o método da carga unitária, determine a inclinação e a deflexão do ponto A.



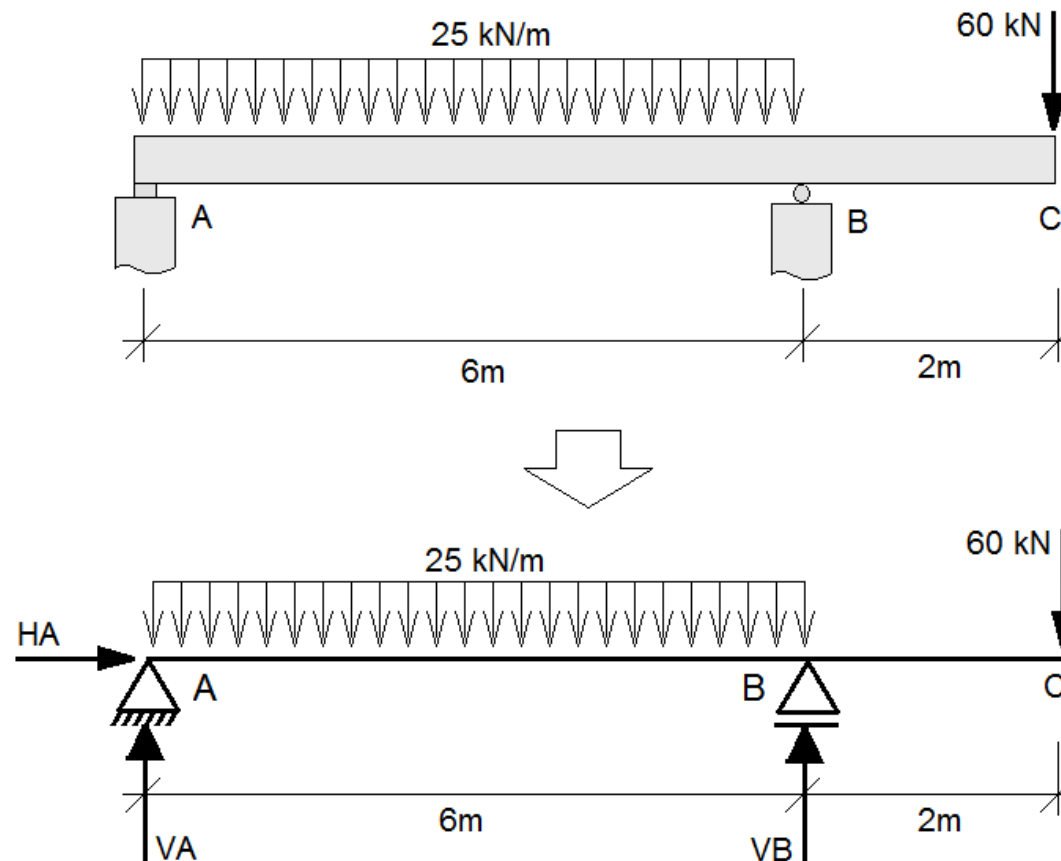
Exemplo 02 – Uma viga com seção transversal de 15x40 cm feita em concreto armado ($E=25$ GPa) está em balanço e carregada conforme ilustra a figura. Aplicando o método da carga unitária, determine a inclinação e a deflexão do ponto B.



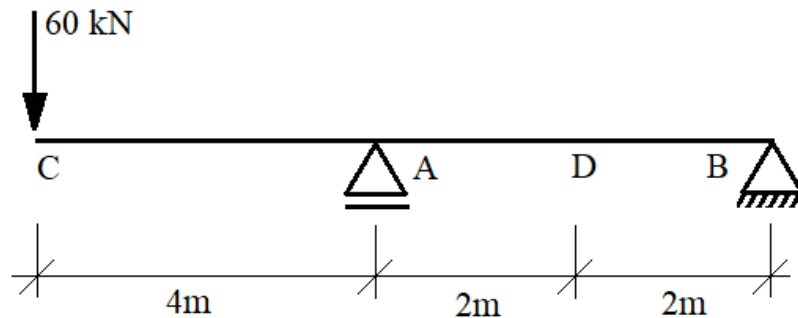
Exemplo 03 – Uma viga biapoiada em aço ($E=200$ GPa) possui momento de inércia $I=25,8 \cdot 10^6$ mm⁴ e está submetida a um carregamento como mostra a figura. Determinar a deflexão no centro do vão.



Exemplo 04 – A viga de seção transversal de 12x40 cm, em concreto armado ($E=23$ GPa), está carregada como ilustrado. Pelo método da carga unitária, a deflexão no ponto C.



Exercícios Propostos 01 – Para as vigas seguintes, determinar a inclinação (rotação) nos apoios A e B e a deflexão nos pontos C e D.



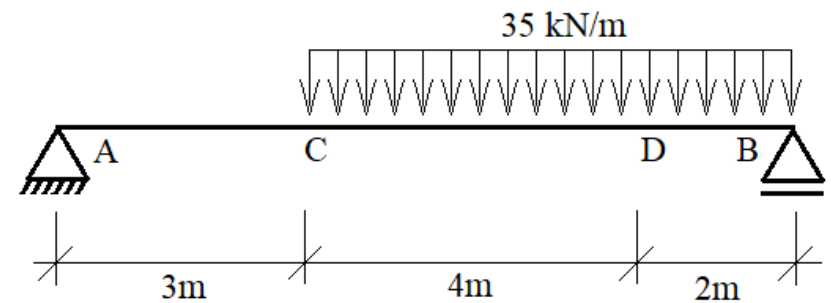
Aço
 $E = 200 \text{ GPa}$
 $I = 26,11 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$$\theta_A = 0,061279 \text{ rad}$$

$$\theta_B = -0,03064 \text{ rad}$$

$$\delta_{VC} = -490,23 \text{ mm}$$

$$\delta_{VD} = 45,96 \text{ mm}$$



Concreto
 $E = 23 \text{ GPa}$
 Seção 20x60 cm

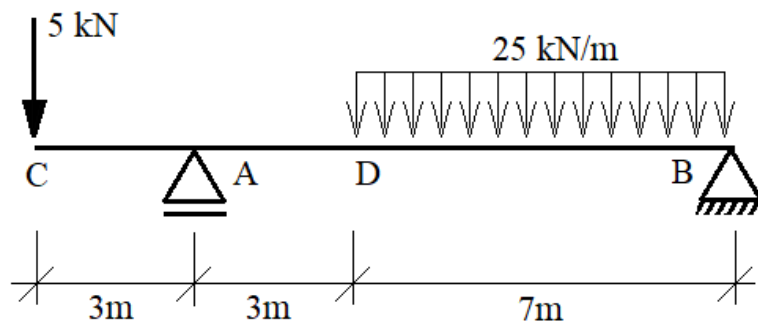
$$\theta_A = -0,0089 \text{ rad}$$

$$\theta_B = 0,01015 \text{ rad}$$

$$\delta_{VC} = -22,83 \text{ mm}$$

$$\delta_{VD} = -18,32 \text{ mm}$$





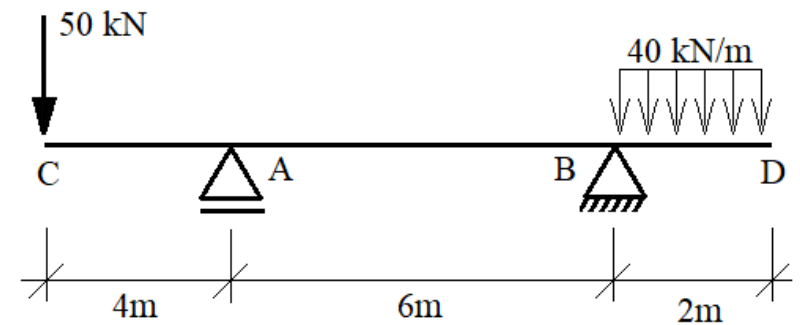
Aço
 $E = 200 \text{ GPa}$
 $I = 65,70 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$$\theta_A = -0,05485 \text{ rad}$$

$$\theta_B = 0,063745 \text{ rad}$$

$$\delta_{VC} = 161,13 \text{ mm}$$

$$\delta_{VD} = -148,20 \text{ mm}$$



Aço
 $E = 200 \text{ GPa}$
 $I = 29,39 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$$\theta_A = 0,08166 \text{ rad}$$

$$\theta_B = -0,061245 \text{ rad}$$

$$\delta_{VC} = -508,11 \text{ mm}$$

$$\delta_{VD} = -136,10 \text{ mm}$$



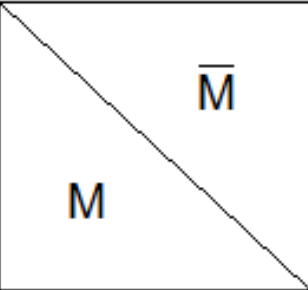
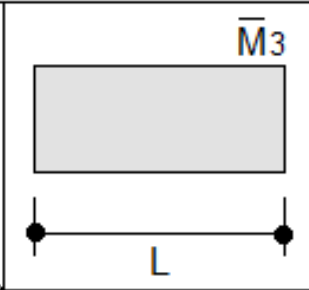
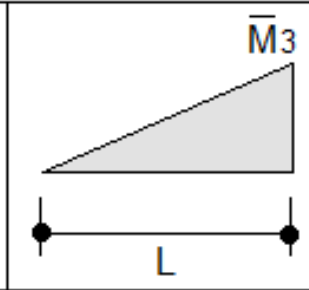
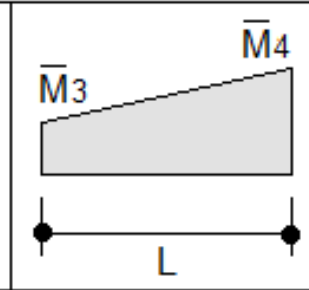
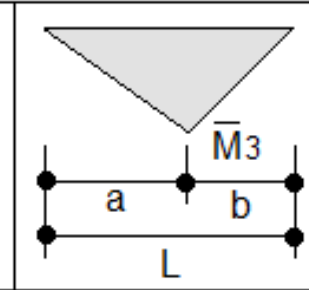
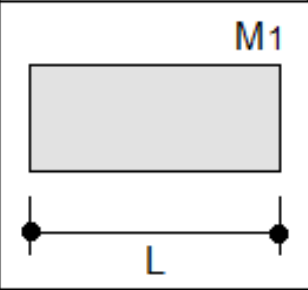
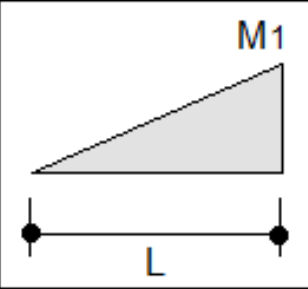
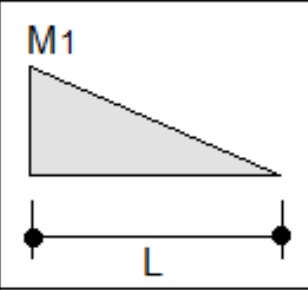
Método da carga unitária com o uso de tabelas

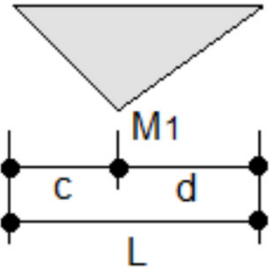
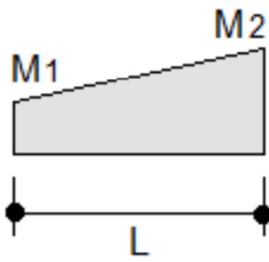
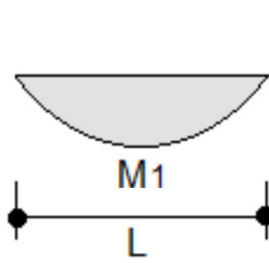
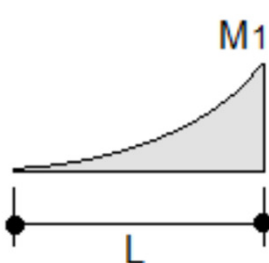
A determinação dos deslocamentos em sistemas estruturais é possível através do emprego de tabelas para o cálculo das integrais. Este procedimento é empregável no caso de estruturas compostas por barras retas e com inércia constante e dispensa a necessidade das equações que representam a variação dos esforços, bastando apenas o conhecimento dos diagramas.

$$\delta = \sum \frac{1}{EI_c} \left| \left(\frac{I_c \cdot}{I_{barra}} \int_0^l M \overline{M} dx \right) \right|_{Tabelado}$$

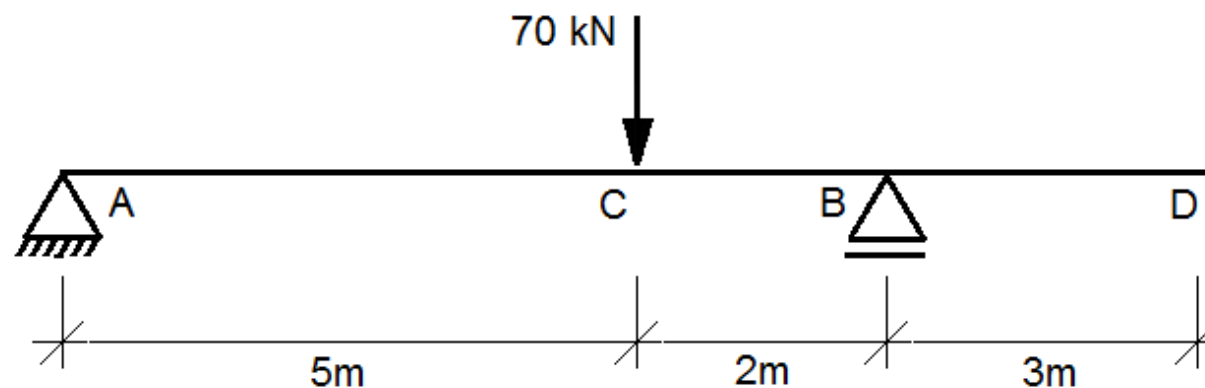
$$\frac{I_{barra} \cdot}{l_{barra}} = \frac{I_c \cdot}{L} \rightarrow L = l \frac{I_c \cdot}{I}$$

M	M3	M3	M3	M4	M3
	$M_1 M_3 \cdot L$	$\frac{1}{2} M_1 M_3 \cdot L$	$\frac{1}{2} M_1 (M_3 + M_4) \cdot L$	$\frac{1}{2} M_1 M_3 \cdot L$	
	$\frac{1}{2} M_1 M_3 \cdot L$	$\frac{1}{3} M_1 M_3 \cdot L$	$\frac{1}{6} M_1 (M_3 + 2M_4) \cdot L$	$\frac{1}{6} M_1 M_3 (L + a)$	
	$\frac{1}{2} M_1 M_3 \cdot L$	$\frac{1}{6} M_1 M_3 \cdot L$	$\frac{1}{6} M_1 (2M_3 + M_4) \cdot L$	$\frac{1}{6} M_1 M_3 (L + b)$	
	$\frac{1}{2} M_1 M_3 \cdot L$	$\frac{1}{6} M_1 M_3 (L + c)$	$\frac{1}{6} M_1 M_3 (L + d) + \frac{1}{6} M_1 M_4 (L + c)$	Para $c \leq a$ $\left(\frac{1 - (a-c)^2}{3 \cdot 6ad} \right) M_1 M_3 \cdot L$	
	$\frac{1}{2} (M_1 + M_2) M_3 \cdot L$	$\frac{1}{6} (M_1 + 2M_2) M_3 \cdot L$	$\frac{1}{6} (2M_1 + M_2) M_3 \cdot L + \frac{1}{6} (M_1 + 2M_2) M_4 \cdot L$	$\frac{1}{6} M_1 M_3 (L + b) + \frac{1}{6} M_2 M_3 (L + a)$	
	$\frac{2}{3} M_1 M_3 \cdot L$	$\frac{1}{3} M_1 M_3 \cdot L$	$\frac{1}{3} M_1 (M_3 + M_4) \cdot L$	$\frac{1}{3} M_1 M_3 (L + \frac{ab}{L})$	
	$\frac{1}{3} M_1 M_3 \cdot L$	$\frac{1}{4} M_1 M_3 \cdot L$	$\frac{1}{12} M_1 (M_3 + 3M_4) \cdot L$	$\frac{1}{12} M_1 M_3 (3a + \frac{a^2}{L})$	

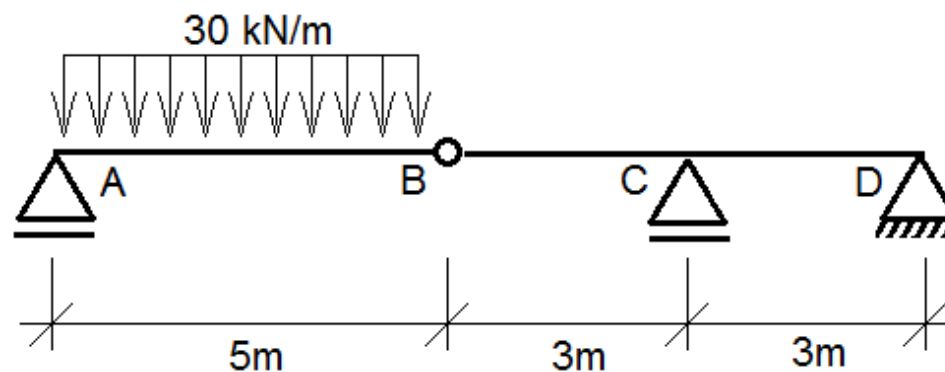
				
	$M_1 \bar{M}_3 L$	$\frac{1}{2} M_1 \bar{M}_3 L$	$\frac{1}{2} M_1 (\bar{M}_3 + \bar{M}_4) L$	$\frac{1}{2} M_1 \bar{M}_3 L$
	$\frac{1}{2} M_1 \bar{M}_3 L$	$\frac{1}{3} M_1 \bar{M}_3 L$	$\frac{1}{6} M_1 (\bar{M}_3 + 2\bar{M}_4) L$	$\frac{1}{6} M_1 \bar{M}_3 (L + a)$
	$\frac{1}{2} M_1 \bar{M}_3 L$	$\frac{1}{6} M_1 \bar{M}_3 L$	$\frac{1}{6} M_1 (2\bar{M}_3 + 2\bar{M}_4) L$	$\frac{1}{6} M_1 \bar{M}_3 (L + b)$

	$\frac{1}{2} M_1 \bar{M}_3.L$	$\frac{1}{6} M_1 \bar{M}_3 (L+c)$	$\frac{1}{6} M_1 \bar{M}_3 (L+d) + \frac{1}{6} M_1 \bar{M}_4 (L+c)$	Para $c \leq a$ $\left(\frac{1-(a-c)^2}{3 \cdot 6ad} \right) M_1 \bar{M}_3.L$
	$\frac{1}{2} (M_1+M_2) \bar{M}_3.L$	$\frac{1}{6} (M_1+2M_2) \bar{M}_3.L$	$\frac{1}{6} (2M_1+M_2) \bar{M}_3.L + \frac{1}{6} (M_1+2M_2) \bar{M}_4.L$	$\frac{1}{6} M_1 \bar{M}_3 (L+b) + \frac{1}{6} M_2 \bar{M}_3 (L+a)$
	$\frac{2}{3} M_1 \bar{M}_3.L$	$\frac{1}{3} M_1 \bar{M}_3.L$	$\frac{1}{3} M_1 (\bar{M}_3 + \bar{M}_4).L$	$\frac{1}{3} M_1 \bar{M}_3 (L + \frac{ab}{L})$
	$\frac{1}{3} M_1 \bar{M}_3.L$	$\frac{1}{4} M_1 \bar{M}_3.L$	$\frac{1}{12} M_1 (\bar{M}_3 + 3\bar{M}_4).L$	$\frac{1}{12} M_1 \bar{M}_3 (3a + \frac{a^2}{L})$

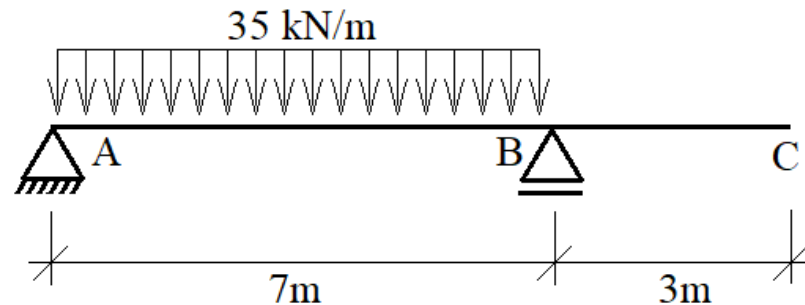
Exemplo 05 – A viga da Figura 8.47 possui seção transversal de 15x50 cm em concreto armado ($E=24$ GPa) e está carregada como ilustrado. Empregando a Tabela para o cálculo das integrais, determine o deslocamento vertical do ponto D.



Exemplo 06 –A viga Gerber da Figura será construída em concreto armado, com módulo de elasticidade $E = 23 \text{ GPa}$ e seus elementos possuem uma seção transversal de 20×60 . Usando a Tabela para o cálculo das integrais, determine o deslocamento vertical do ponto B e a rotação do nó A.



Exercícios Propostos 02 – Empregando a Tabela, determinar a inclinação (rotação) nos apoios A e B e o deslocamento vertical do ponto C para as vigas seguintes.

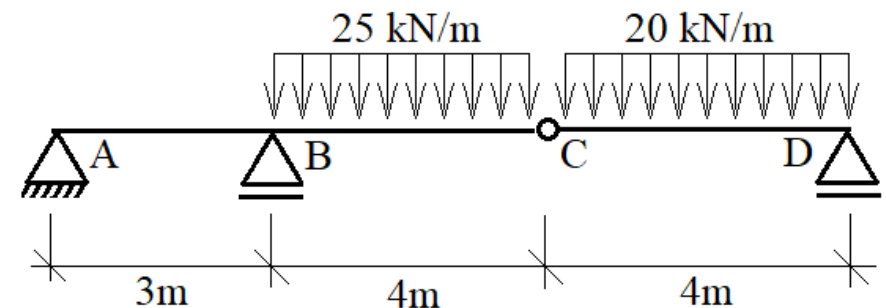


Concreto
 $E = 24 \text{ GPa}$
 Seção = 15x40 cm

$$\theta_A = -0,02605 \text{ rad}$$

$$\theta_B = 0,02605 \text{ rad}$$

$$\delta_{VC} = 78,16 \text{ mm}$$



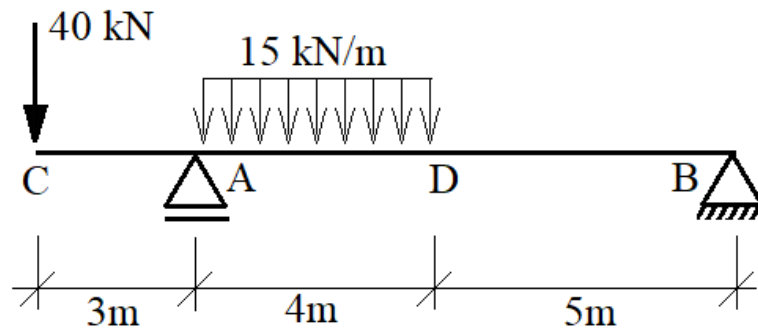
Aço
 $E = 200 \text{ GPa}$
 $I = 29,39 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$$\theta_A = 0,03062 \text{ rad}$$

$$\theta_B = -0,06125 \text{ rad}$$

$$\delta_{VC} = -526,26 \text{ mm}$$



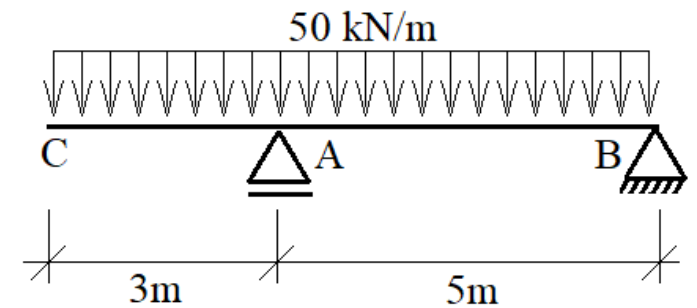


Aço
 $E = 200 \text{ GPa}$
 $I = 65,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$$\theta_A = -0,01082 \text{ rad}$$

$$\theta_B = -0,001353 \text{ rad}$$

$$\delta_{VC} = -59,87 \text{ mm}$$



Concreto
 $E = 23 \text{ GPa}$
 Seção = 20x45 cm

$$\theta_A = -0,00328 \text{ rad}$$

$$\theta_B = 0,002087 \text{ rad}$$

$$\delta_{VC} = -24,33 \text{ mm}$$





EDUCAÇÃO
PÚBLICA
100%
GRATUITA

MUITO OBRIGADO

Prof. Rodrigo Bordignon
Engenheiro Civil, Dr.

*www.ifsul.edu.br
rodrigobordignon@ifsul.edu.br*