SISTEMAS DE COORDENADAS

Um sistema de coordenadas pode ser considerado como um dispositivo organizado para posicionar e localizar com relativa precisão, pontos, objetos, partículas, pessoas, equipamentos, como um avião numa viagem intercontinental, por exemplo, entre outros.

Um simples mapa cartográfico ou um sofisticado GPS (Sistema de Posicionamento Global) são exemplos, entre outros, de aplicações de sistemas de coordenadas.

Nosso estudo estará concentrado no sistema de coordenadas cartesianas (retangulares) de duas e três dimensões, por ser o sistema mais difundido. Entretanto, em alguns casos, torna-se melhor a utilização de outros modelos de sistema.

Podemos classificar os principais sistemas de coordenadas em:

Unidimensional: • Eixo ou Reta Real $\rightarrow R^1$

Bidimensional:
- Retangular ou Cartesiano $\rightarrow R^2$
- Polar

Tridimensional:
- Retangular ou Cartesiano $\rightarrow R^3$
- Cilíndrico
- Esférico

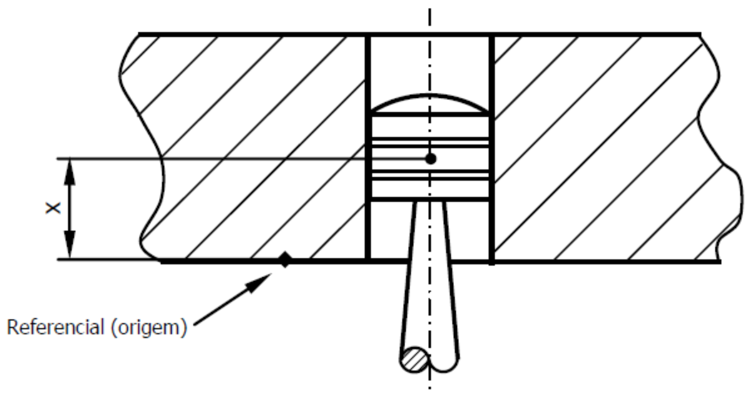
Sistemas de coordenadas retangulares (ou cartesianas)

Como nosso estudo estará baseado principalmente no sistema de coordenadas retangulares, vamos considerar algumas situações para melhor exemplificar a utilização dos sistemas de coordenadas, quanto às dimensões necessárias para cada caso. Vejamos a seguir:

1) Posição de um pistão no cilindro de um motor

O desenho abaixo representa de forma bastante simplificada, um pistão num cilindro de um motor de combustão interna. Considere que seja de interesse a posição deste cilindro durante o funcionamento do motor.

Observe que o sistema trabalha com **uma dimensão**, ou seja, para determinarmos a posição exata do pistão, necessitamos de apenas **uma coordenada**, considerando um referencial dado.



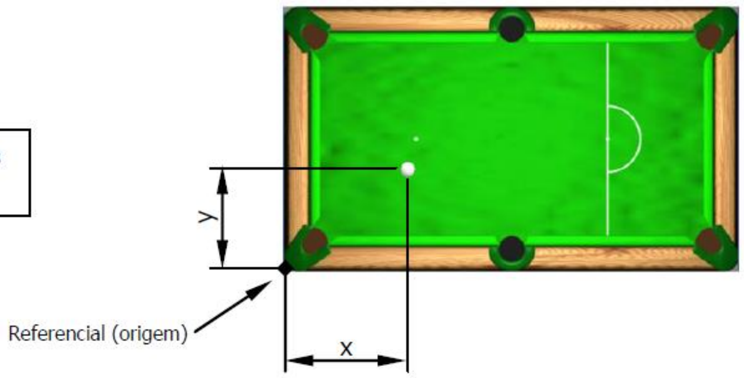
Sistema de Coordenadas Unidimensional

Matematicamente, podemos escrever a posição "P" do pistão com a medida "x" $\rightarrow$ **P (x)**.
A medida "x" é dita coordenada do ponto P, ou ainda, abscissa do ponto P.

2) Posição de uma bola de sinuca numa mesa

O desenho abaixo apresenta uma visão superior de uma mesa de sinuca. Considere que seja de interesse a posição da bola branca sobre a mesa (de maneira que esta esteja sempre em contato com a superfície de jogo da mesa).

Sistema de Coordenadas Bidimensional



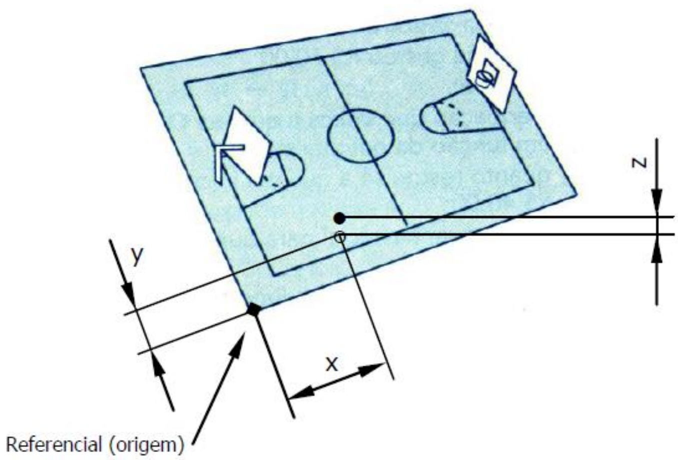
Observe que o sistema trabalha com **duas dimensões**, ou seja, para determinarmos a posição exata da bola, necessitamos de **duas coordenadas**, considerando um referencial dado.

Matematicamente podemos escrever a posição "P" da bola com as coordenadas "x" e "y" → **P (x , y)**.
As medidas "x" e "y" são ditas coordenadas do ponto P, ou ainda, "x" é a abscissa do ponto P e "y" é a ordenada do ponto P.

3) Posição de uma bola de basquete numa quadra [em jogo]

Abaixo, temos um desenho que representa esquematicamente uma quadra de basquete. Considere que seja de interesse a posição da bola em qualquer momento do jogo.

Sistema de Coordenadas Tridimensional



Observe que o sistema trabalha com **três dimensões**, ou seja, para determinarmos a posição exata da bola, necessitamos de **três coordenadas**, considerando um referencial dado.

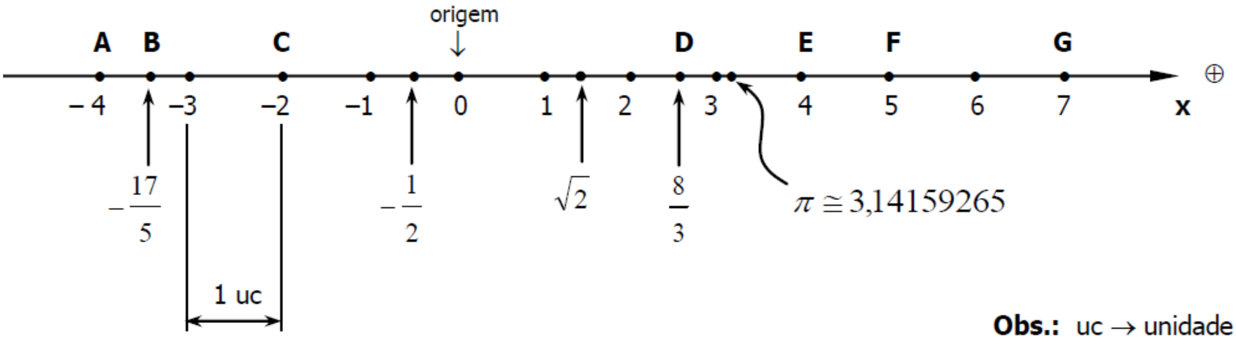
Matematicamente podemos escrever a posição "P" da bola com as coordenadas "x", "y" e "z" → **P (x , y , z)**.
As medidas "x", "y" e "z" são ditas coordenadas do ponto P, ou ainda, "x" é a abscissa do ponto P, "y" é a ordenada do ponto P e "z" é a cota do ponto P.

SISTEMA DE COORDENADAS UNIDIMENSIONAL [$\mathbb{R}^1$ ou E_1]

Vamos fazer um breve estudo sobre este sistema de coordenadas, que na verdade dará origem aos outros que veremos em seguida ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, sendo este último o nosso campo de maior interesse).

Nas rodovias podemos observar no acostamento pequenas placas chamadas de "marcos quilométricos". Elas determinam a sua posição na rodovia a partir de um referencial (origem), o "quilômetro zero", que numa rodovia federal, localiza-se na divisa de um estado com o outro. Apesar da rodovia não ser uma linha reta, podemos dizer que os marcos quilométricos correspondem a um sistema de coordenadas unidimensional, pois com uma única informação quilométrica poderemos determinar a posição de um veículo com problemas mecânicos, por exemplo. Matematicamente, teremos:

Eixo Real [ou eixo das abscissas]



Obs.: uc → unidade de comprimento

Temos que a abscissa (ou coordenada) do ponto **A** é -4. Podemos escrever então: **A**(-4).

Daí, temos que: **B**$\left(-\frac{17}{5}\right)$, **C**$(-2)$, **D**$\left(\frac{8}{3}\right)$, **E**$(4)$, **F**$(5)$ e **G**(7).

• Estudo do Ponto no $\mathbb{R}^1$

Distância entre dois Pontos:

No caso do $\mathbb{R}^1$, torna-se simples determinarmos a distância entre dois pontos. Veremos intuitivamente através de algumas perguntas...

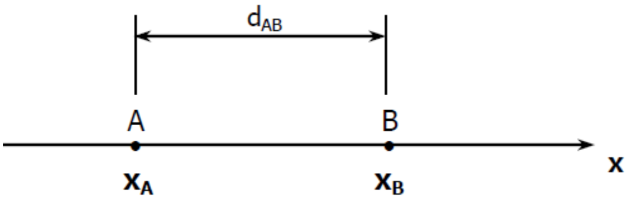
a) Qual a distância entre os pontos F e E? **Resposta:** 1 uc

b) Qual a distância entre E e G? **Resposta:** 3 uc

c) Qual a distância entre A e F? **Resposta:** 9 uc, que podemos escrever d(A,F) = 9 uc

d) Qual a distância entre B e D?

Antes de responder esta pergunta, faremos uma generalização matemática. Veja:

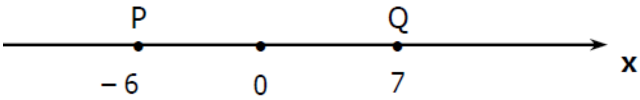


Logo: $\boxed{\mathbf{d_{AB} = |\, x_B - x_A \,|}}$

↳ Distância entre dois pontos na reta $\mathbb{R}^1$, ou comprimento do segmento de reta AB.

Obs.: Note que $\mathbf{d_{AB} = d_{BA}}$.

Veja:



$d_{PQ} = | x_P - x_Q |$ ou $d_{QP} = | x_Q - x_P |$

$d_{PQ} = | -6 - 7 |$ $d_{QP} = | 7 - (-6) | = | 7 + 6 |$

$d_{PQ} = | -13 |$ $d_{QP} = | 13 |$

$\boxed{d_{PQ} = 13 \text{ uc}} \longleftrightarrow \boxed{d_{QP} = 13 \text{ uc}}$

Observe que a distância entre dois pontos quaisquer é sempre um valor absoluto, ou seja, **positivo**.
Agora, podemos retornar a pergunta "**d**", que ficou em aberto, e respondê-la:

d) Qual a distância entre B e D?

Então temos:

$$d_{BD} = | x_D - x_B | \quad \Rightarrow \quad d_{BD} = \left| -\frac{17}{5} - \frac{8}{3} \right| \quad \Rightarrow$$

$$d_{BD} = \left| \frac{-51 - 40}{15} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{BD} = \left| \frac{-91}{15} \right| \quad \Rightarrow \quad d_{BD} = \frac{91}{15}$$

Portanto: $\boxed{d_{BD} \cong 6{,}07 \ uc}$

SISTEMA DE COORDENADAS BIDIMENSIONAL

Sistema Cartesiano Ortogonal [$\mathbb{R}^2$]

O Sistema Cartesiano Ortogonal, também conhecido como Plano Cartesiano é um sistema **bidimensional** de **coordenadas** [**retangulares**], formado por dois eixos reais, perpendiculares (ortogonais) entre si, gerando quatro regiões denominadas quadrantes. O **eixo "x"** também é dito eixo das **abscissas** e o **eixo "y"** também é dito eixo das **ordenadas**. A intersecção dos eixos coordenados determina um ponto único, denominado "origem do sistema". Cada ponto nesse plano é determinado por um **par (ou dupla) ordenado(a)** na forma **(x , y)**, sendo que "x" e "y" formam as **coordenadas** de um ponto.

Localizando no sistema ao lado, os pontos indicados a seguir, temos:

$\boldsymbol{A}(4\,,\,5)$

$\boldsymbol{B}(-4\,,\,5)$

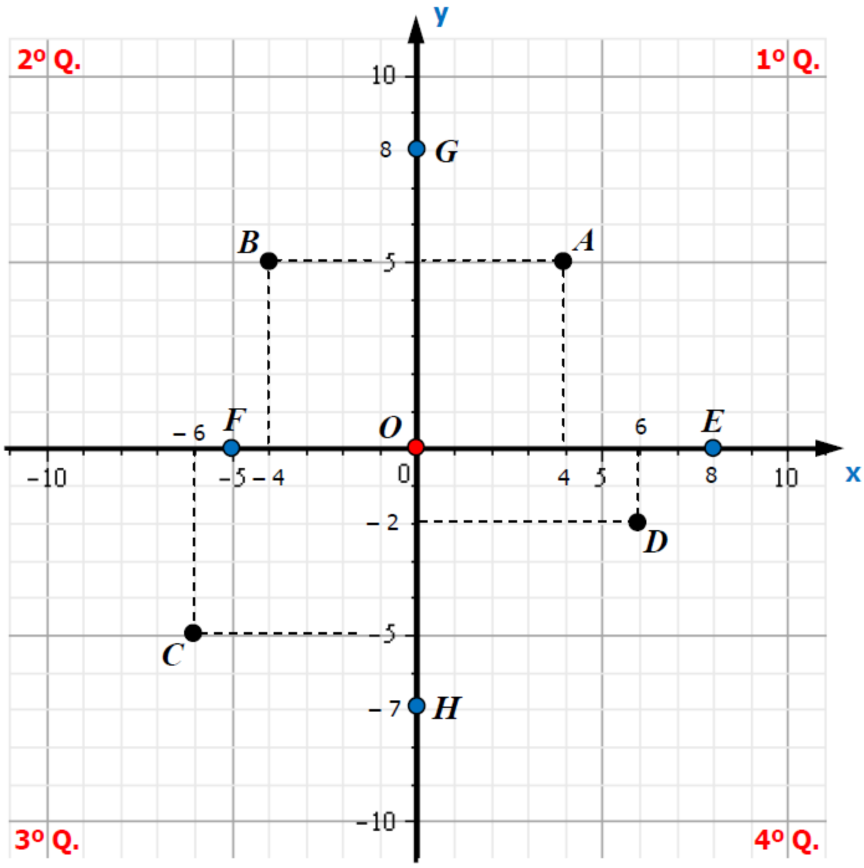
$\boldsymbol{C}(-6\,,\,-5)$

$\boldsymbol{D}(6\,,\,-2)$

$$✱ \begin{cases} \boldsymbol{E}(8\,,0) \\ \boldsymbol{F}(-5\,,0) \end{cases}$$

$$\star \begin{cases} \boldsymbol{G}(0\,,8) \\ \boldsymbol{H}(0\,,-7) \end{cases}$$

$\boldsymbol{O}(0\,,\,0) \rightarrow$ **Origem** do sistema



Observações:

✱ Todo ponto pertencente ao **eixo das abscissas** terá ordenada nula, ou seja, será da forma: **(x , 0)**.

★ Todo ponto pertencente ao **eixo das ordenadas** terá abscissa nula, ou seja, será da forma: **(0 , y)**.

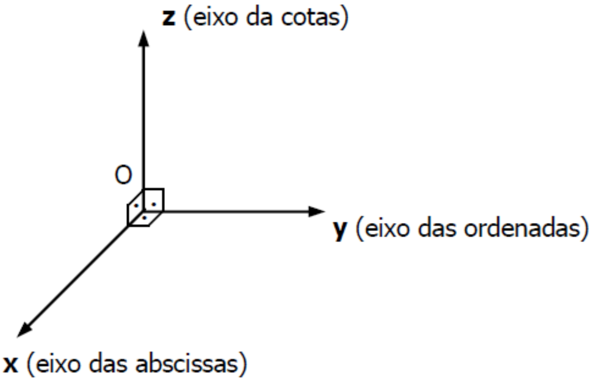
Notas:

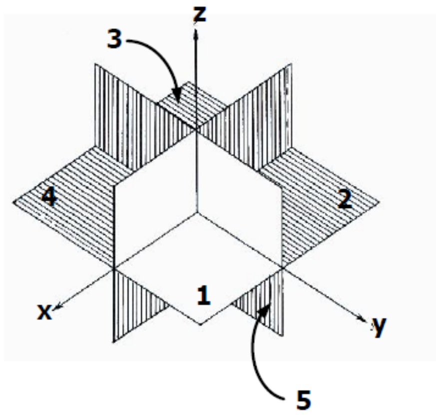
- O Sistema Cartesiano Ortogonal também é conhecido como **Plano** $\mathbb{R}^2$, **Espaço** $\mathbf{E_2}$, ou ainda, **Espaço** $\mathbb{R}^2$. Trataremos aqui na Geometria Analítica simplesmente por $\mathbb{R}^2$.
- O "Sistema Polar", que também é um Sistema Bidimensional, será estudado em momento oportuno.

SISTEMA DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAL

Sistema Cartesiano Ortogonal: O Espaço $\mathbb{R}^3$ [ou E_3]

Consideramos como sendo o espaço cartesiano $\mathbb{R}^3$ (ou E_3), o conjunto dado por três eixos reais perpendiculares dois a dois, denotados por "x" , "y" e "z", que se interceptam em uma origem (ponto O), com orientação conforme abaixo:



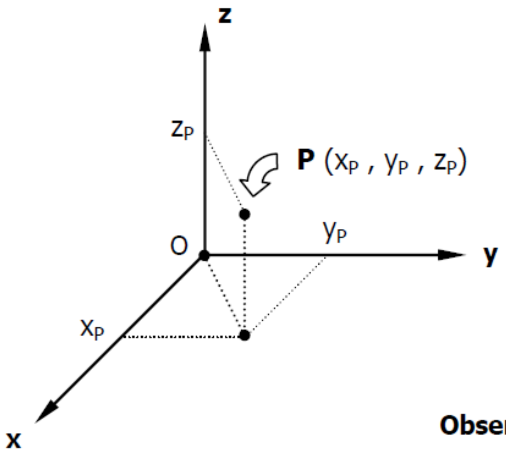


Os três planos do $\mathbb{R}^3$: yOz, xOy e xOz, geram oitos regiões (sub-espaços) chamadas de **octantes** (ou oitantes) que podem ser observados na figura acima e a direita (os números identificam cada octante).

Os valores reais contidos nos três eixos estão ordenados de forma crescente conforme indicação das setas dos respectivos eixos. No espaço tridimensional, a cada **terna** ou **tripla ordenada** de números reais **(x, y, z)**, associamos um único ponto; assim:

Lembrete:

Além do $\mathbb{R}^3$, existem outros sistemas de coordenadas com três dimensões, como por exemplo, o sistema cilíndrico e o sistema esférico.

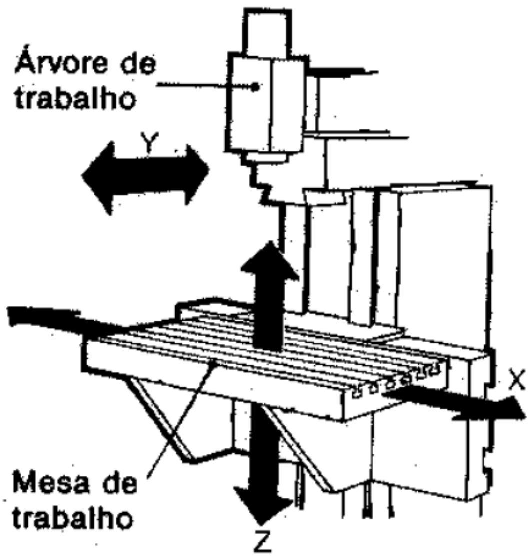


Observação: Origem → **O** (0 , 0 , 0)

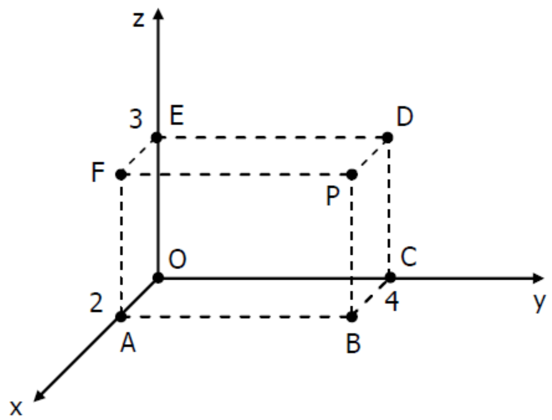
Máquinas operatrizes, sistemas automatizados e sistemas de robótica utilizam, na sua grande maioria, um sistema de 3 eixos cartesianos, como no exemplo da fresadora ao lado:

Por questões técnicas, as posições dos eixos coordenados podem diferir das usadas no estudo científico (na geometria analítica e outras áreas de aplicabilidade da matemática).

A figura apresenta os "eixos de deslocamento" de uma fresadora.



Para melhor exemplificação, tomemos o paralelepípedo da figura abaixo, onde temos **P**(2 , 4 , 3).

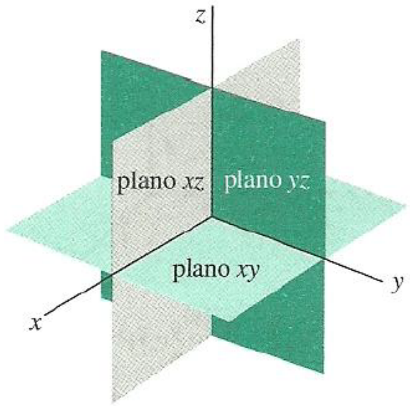


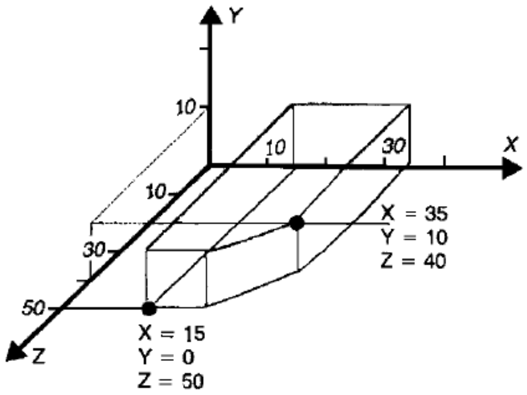
Com base na figura ao lado, e levando em consideração que um ponto qualquer (x , y , z) está no:

→ eixo "x" quando y = 0 e z = 0, tem-se **A**(2 , 0 , 0);
→ eixo "y" quando x = 0 e z = 0, tem-se **C**(0 , 4 , 0);
→ eixo "z" quando x = 0 e y = 0, tem-se **E**(0 , 0 , 3);

→ plano "xy" quando z = 0, tem-se **B**(2 , 4 , 0);
→ plano "xz" quando y = 0, tem-se **F**(2 , 0 , 3);
→ plano "yz" quando x = 0, tem-se **D**(0 , 4 , 3).

Assim, a figura à direita destaca os 3 planos do sistema $\mathbb{R}^3$.





Ao lado (esquerdo) podemos observar uma representação usual de dois pontos (e suas coordenadas) para um sistema cartesiano de uma máquina operatriz com CNC (comando numérico computadorizado). Vale observar que, neste caso, temos os eixos x, y e z em posições diferentes daquelas que farão parte de nosso estudo. Este fato não interfere no entendimento da posição dos pontos, pois mesmo assim, a marcação e identificação dos pontos são processos análogos aos que estudamos aqui.

Para marcar um ponto no espaço, como por exemplo, o ponto A(3 , –2 , 4), sugerimos o seguinte procedimento:

1º) marca-se o ponto A'(3 , –2 , 0) no plano "xy";
2º) desloca-se A' paralelamente ao eixo "z", 4 unidades para cima (se fosse – 4, seriam 4 unidades para baixo) para se obter então o ponto A desejado.

A figura ao lado ilustra este procedimento.