



# Engenharia Civil

## Elipse

**Elipse** é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.

Consideremos no plano dois pontos distintos,  $F_1$  e  $F_2$ , tal que  **$d(F_1, F_2) = 2c$** .

Seja um número real “a” tal que  $2a > 2c$ .

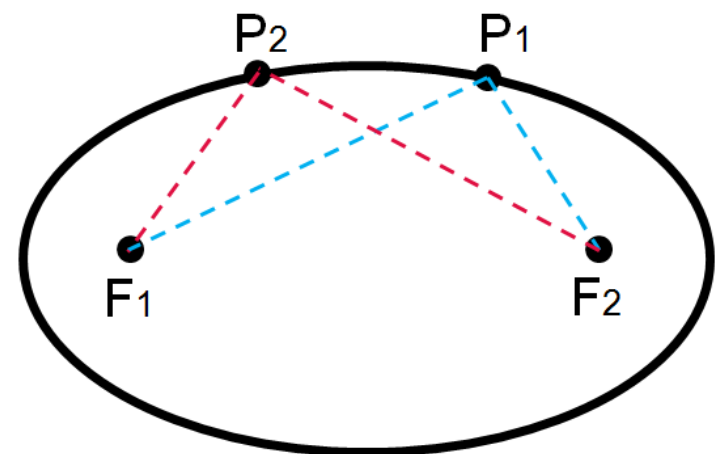
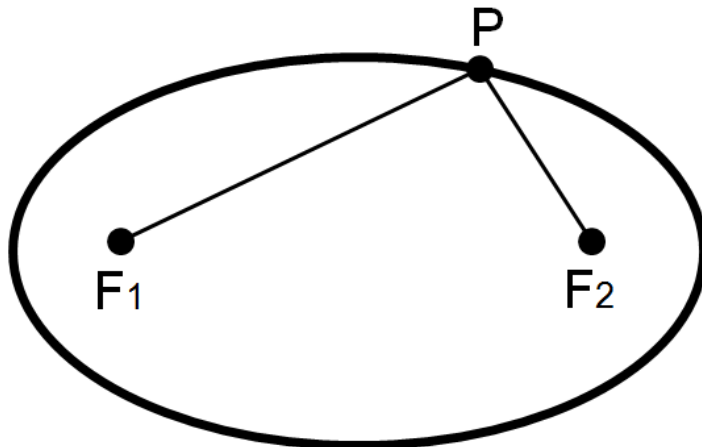


## Elipse

Ao conjunto de todos os pontos **P** do plano tais que:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \quad \text{ou} \quad |\overrightarrow{PF_1}| + |\overrightarrow{PF_2}| = 2a$$

dá-se o nome de **Elipse**.





---

## Elipse

**Observação:** quanto mais  $F_1$  se aproxima de  $F_2$ , mais a forma da Elipse se assemelha à da Circunferência, assim quando  $F_1=F_2$  obtém-se uma Circunferência.



# Engenharia Civil

## Elipse

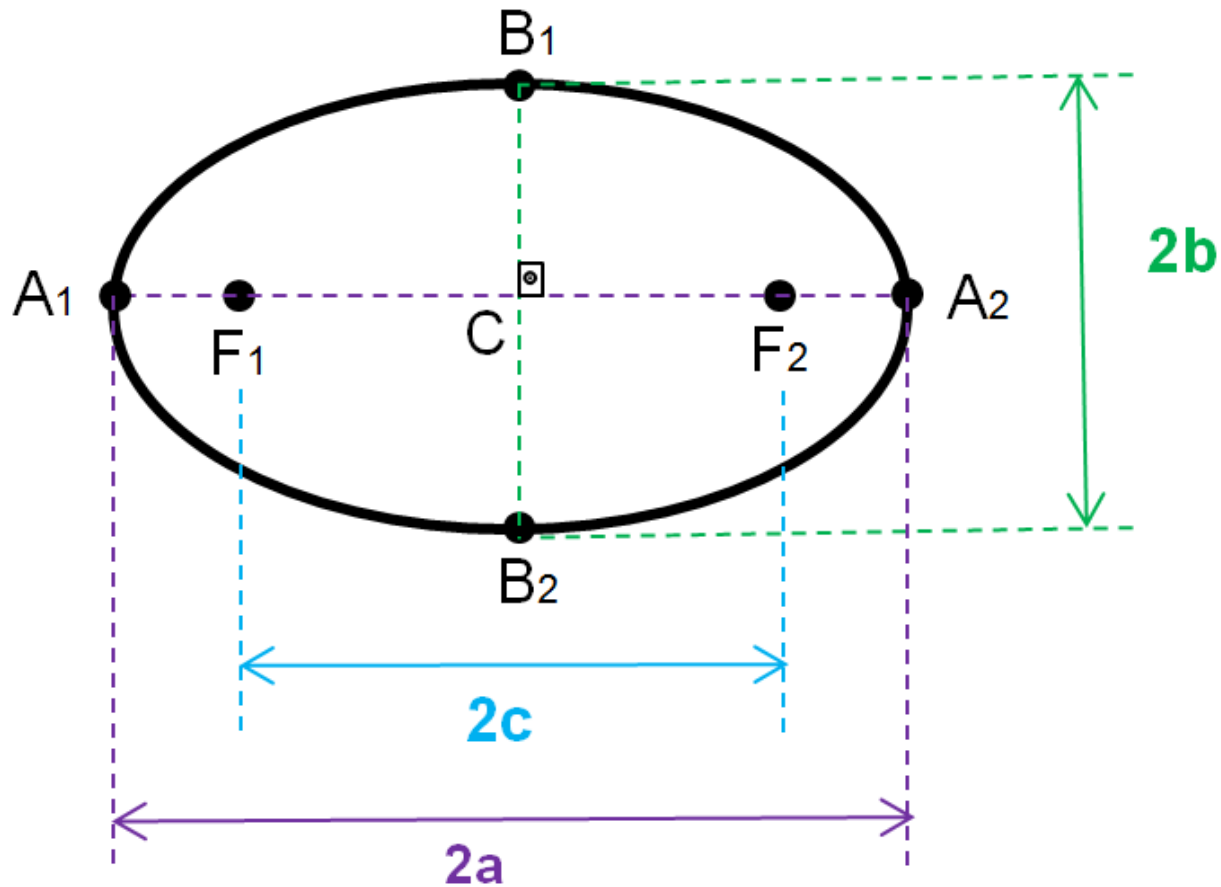
### Elementos:

- Focos: são os pontos  $F_1$  e  $F_2$ .
- Distância Focal: é a distância  $2c$  entre os focos.
- Centro: é o ponto médio  $C$  do segmento  $F_1F_2$ .
- Eixo maior: é o segmento  $A_1A_2$  de comprimento  $2a$ .
- Eixo menor: é o segmento  $B_1B_2$  de comprimento  $2b$ .
- Vértices: são os pontos  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  e  $B_2$ .



# Engenharia Civil

## Elipse





## Elipse

● Excentricidade: é o número “e” dado por

$$e = \frac{c}{a}$$

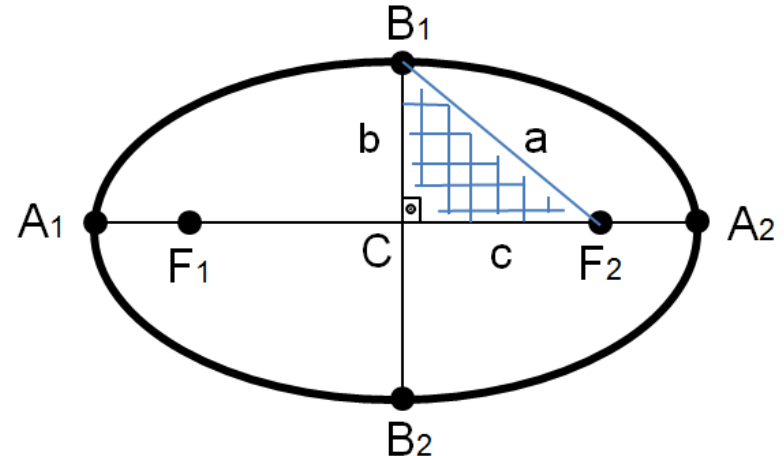
Tendo em vista que  $c < a$ , tem-se:

$$0 < e < 1.$$

**Observação:** Em toda a Elipse

vale a relação:

do Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo  $B_1CF_2$ .





# Engenharia Civil

## Elipse

### Equação da Elipse

#### 1) Centro na origem do sistema.

##### *1.1) o eixo maior está sobre o eixo dos x*

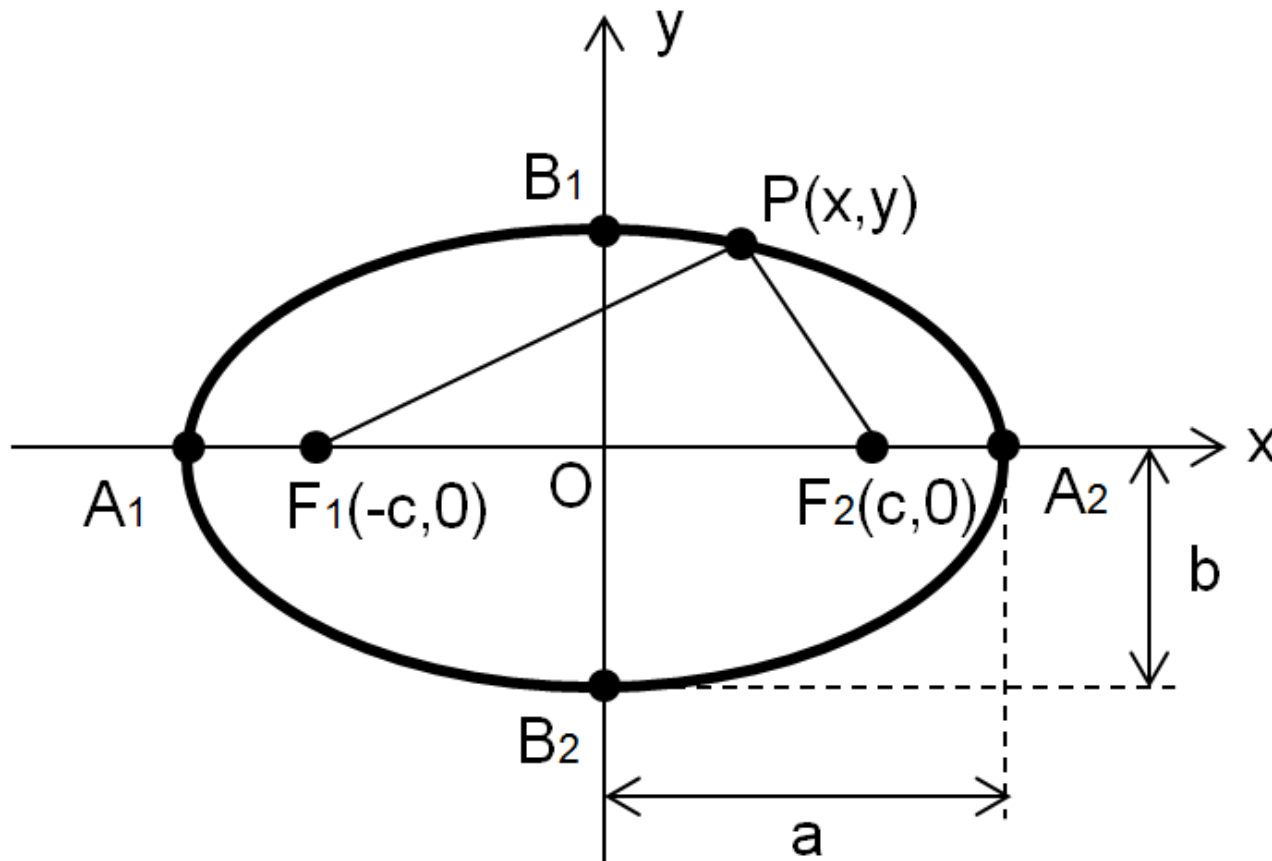
Seja P (x,y) um ponto qualquer de uma elipse de focos

$F_1(-c,0)$  e  $F_2(c,0)$ .

Logo: 
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



## Elipse







# Engenharia Civil

## Elipse

### Equação da Elipse

#### 1) Centro na origem do sistema.

#### *1.2) o eixo maior está sobre o eixo dos y*

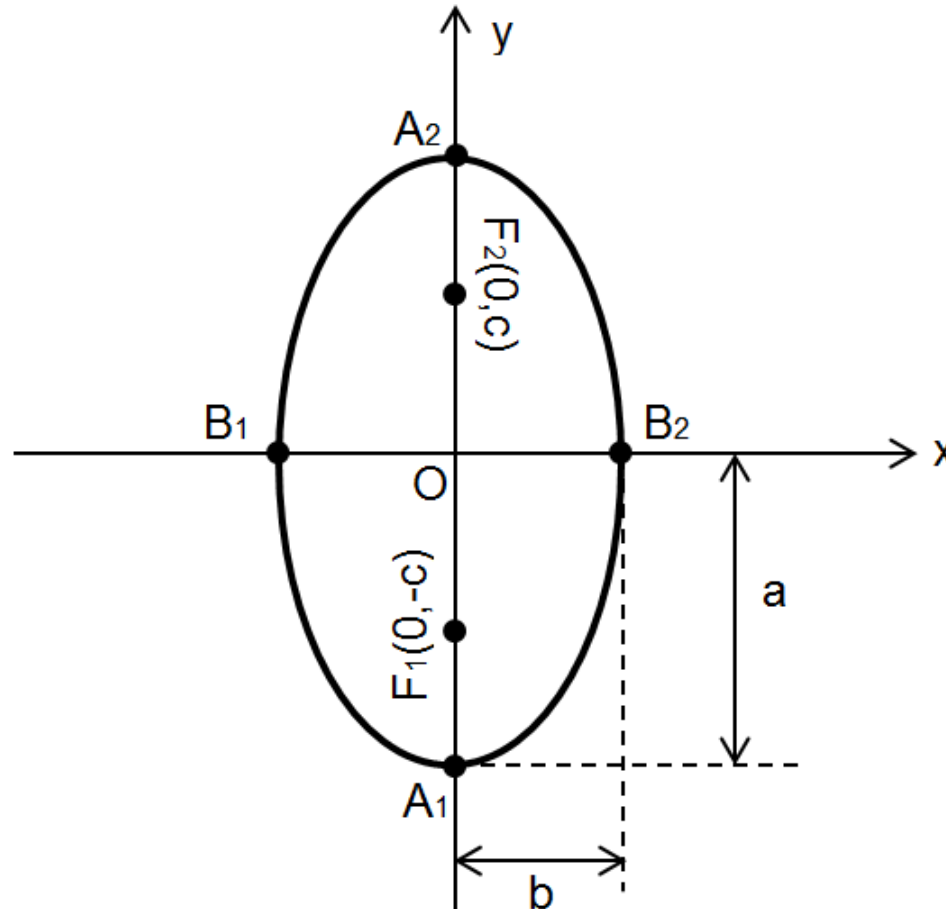
Seja P (x,y) um ponto qualquer de uma elipse de focos

$F_1(0,-c)$  e  $F_2(0,c)$ .

Logo: 
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



## Elipse





# Engenharia Civil

## Elipse

### Observação:

Tendo em vista  $a^2 = b^2 + c^2$ , segue que:

$$a^2 > b^2 \text{ e daí } a > b$$

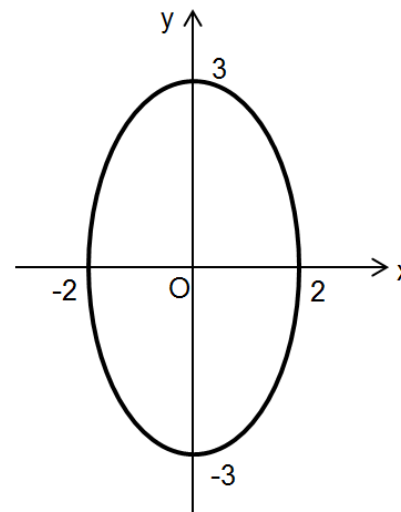
Então, sempre o maior dos denominadores na equação reduzida representa o número  $a^2$ , onde “a” é a medida do semi-eixo maior.



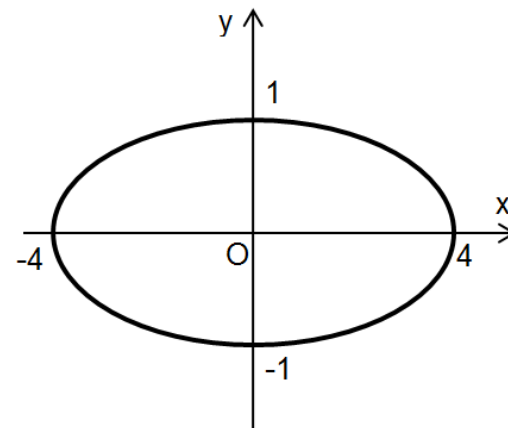
## Elipse

### Exemplos:

1) A equação reduzida da Elipse ao lado é:



2) A equação reduzida da Elipse ao lado é:





# Engenharia Civil

## Elipse

### Exemplos:

3) Determinar, em cada uma das elipses a seguir, a medida dos semi-eixos, um esboço do gráfico, os focos e a excentricidade.

a)  $9x^2 + 25y^2 = 225$

b)  $4x^2 + y^2 - 16 = 0$

c)  $x^2 + y^2 - 9 = 0$



# Engenharia Civil

## Elipse

### Equação da Elipse

#### 2) Centro fora da origem do sistema.

##### *2.1) o eixo maior é paralelo ao eixo dos x*

Consideremos uma Elipse de centro  $C (h,k)$  e seja  $P (x,y)$  um ponto qualquer da mesma.

Analogamente ao caso da parábola, quando o vértice não estava no ponto  $(0,0)$ , aqui ocorre a translação dos eixos e

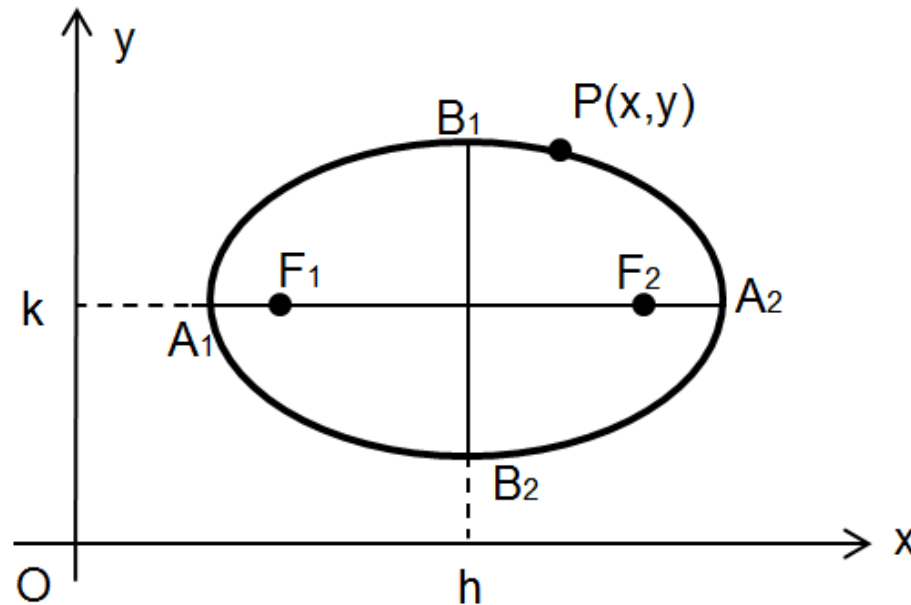
teremos:



# Engenharia Civil

## Elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$





## Elipse

### Equação da Elipse

#### 2) Centro fora da origem do sistema.

##### **2.2) o eixo maior é paralelo ao eixo dos $y$**

Consideremos uma Elipse de centro  $C (h,k)$  e seja  $P (x,y)$  um ponto qualquer da mesma.

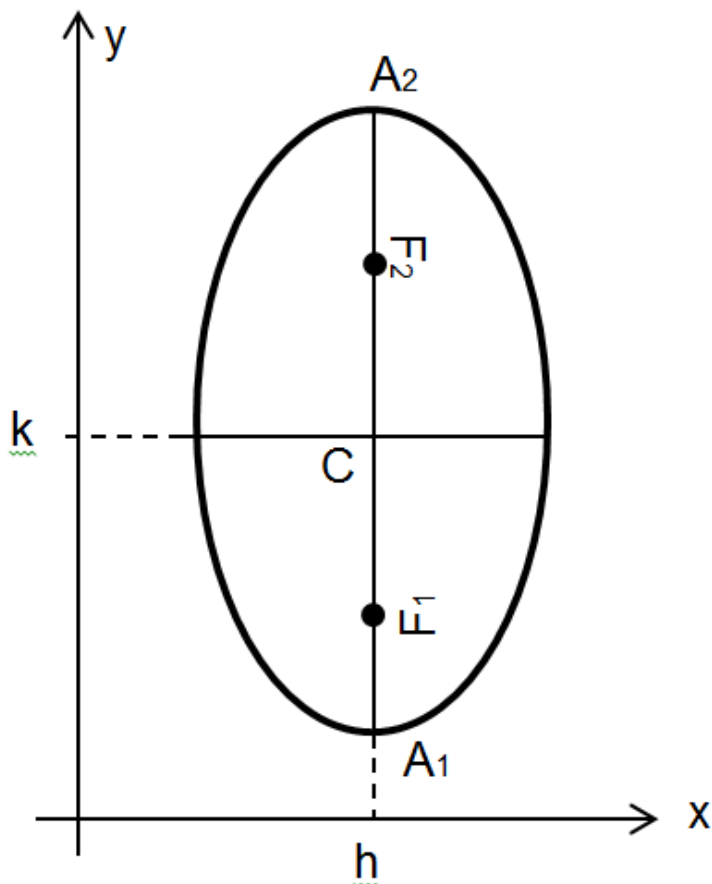
De forma análoga **teremos:**





# Engenharia Civil

## Elipse



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$
$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



## Elipse

### Exemplos:

**a)** Uma elipse, cujo eixo maior é paralelo ao eixo dos  $y$ , tem centro  $C (4, -2)$ , excentricidade  $e = 1/2$  e o eixo menor de medida 6. Qual a equação desta Elipse?

**b)** Determinar o centro, os vértices, os focos e a excentricidade da elipse de equação:  $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$