Engenharia Civil e Engenharia Mecânica

Funções

Profª. Me. Samanta Santos da Vara Vanini

Objetivos

Conceituar e testar se uma função é injetora, sobrejetora ou bijetora

Definir e representar graficamente uma função

Gerar funções compostas

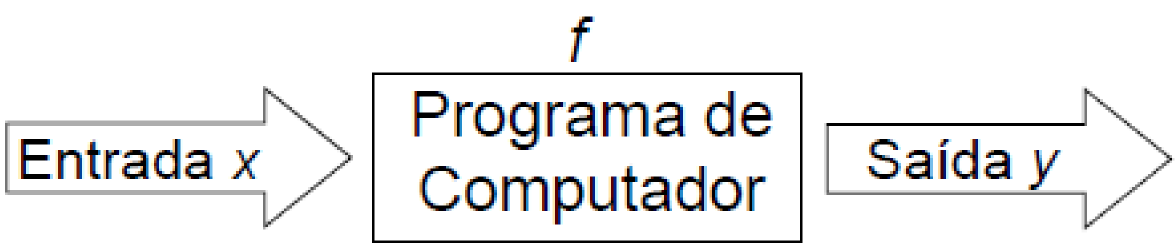
Determinar o domínio, contradomínio e a imagem de uma função

Decidir se uma função tem inversa e, caso tenha, encontrá-la

Funções

O conceito de funções é um dos mais importantes na matemática e envolve muitos conteúdos visto na informática.

Leibniz (1673) utilizou o termo <u>**“função”**</u> para indicar a <u>dependência</u> de uma quantidade em relação a uma outra.



Funções

O conceito básico de função é o seguinte: toda vez que temos dois conjuntos e algum tipo de associação entre eles, que faça corresponder **a todo** elemento do primeiro conjunto **um único** elemento do segundo, ocorre uma função.

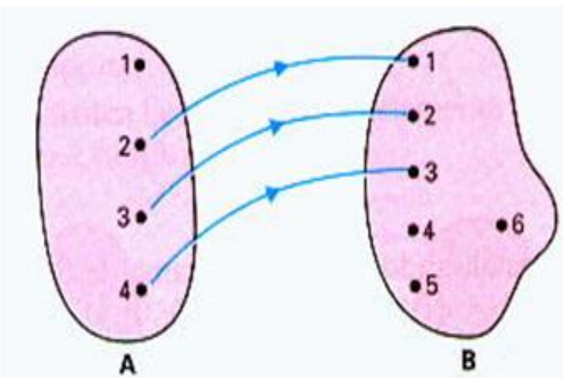
Definição: Dados dois conjuntos A e B, e uma relação entre eles, dizemos que essa relação é uma função de A em B ($f : A \rightarrow B$), se e somente se, para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ de modo que x se relacione com y.

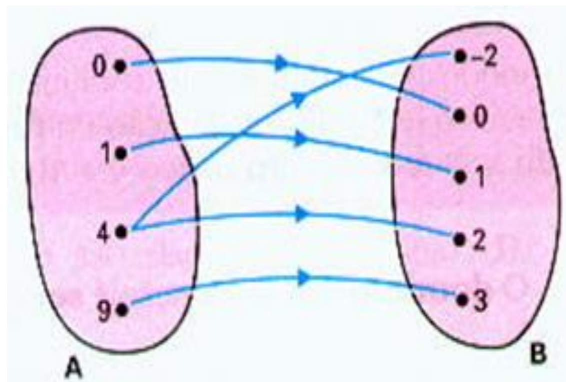
Ou seja: $$f : A \rightarrow B \Leftrightarrow \left(\forall x \in A, \exists! y \in B / \left(x, y \right) \in f \right)$$

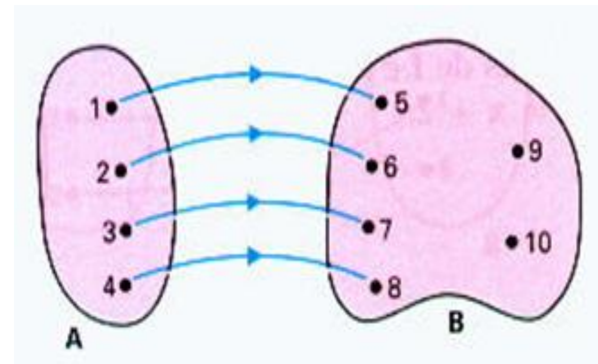
Notação: (lê-se "*f* função de *A* em *B*").

Funções

Observe, por exemplo, o diagrama das relações abaixo:







A relação acima **não** é uma função, pois existe o elemento **1** no conjunto **A**, que não está associado a nenhum elemento do conjunto **B.**

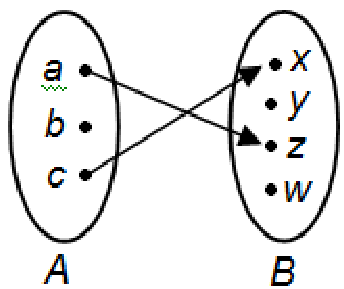
A relação acima **também não** é uma função, pois existe o elemento **4** no conjunto **A**, que está associado a mais de um elemento do conjunto **B**.

A relação acima **é** uma função, pois todo elemento do conjunto **A**, está associado **a somente um** elemento do conjunto **B**.

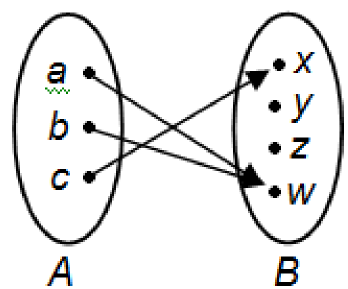
Funções

Exemplo: Diga qual das relações abaixo representam uma função de A ={a,b,c} em B = {x,y,z,w}

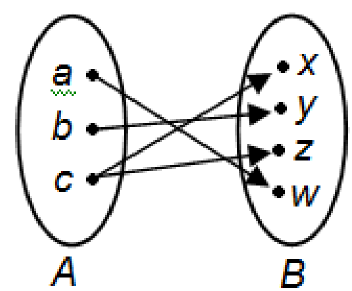
a)



b)



c)



Exemplo: Dados os conjuntos A = {0,1,2,3} e B = {-1,0,1,2,3}. Avalie se as relações binárias de A em B a seguir são ou não funções:

a) $R = \left\{ (x, y) \in A \times B \,/\, y = (x-1)^2 - 1 \right\}$

b) $S = \left\{ (x, y) \in A \times B \,/\, y = x + 1 \right\}$

c) $T = \left\{ (x, y) \in A \times B \,/\, y = 2 \right\}$

Representação

Uma função pode ser representada através de **tabelas**, **fórmulas**, **descritas por palavras**, **diagrama de setas** ou **gráficos**, como pode ser observado nos exemplos abaixo:

Tabela: A velocidade de qualificação *S* para a *pole* na corrida de 500 milhas de Indianápolis como uma função do ano *t*. Há exatamente um valor de *S* para cada valor de *t*.

Ano *t*	2000	2001	2002	2003	2004
Velocidade *S* (milhas/hora)	223,471	226,037	231,342	231,725	222,024

"A velocidade de qualificação em função do ano"

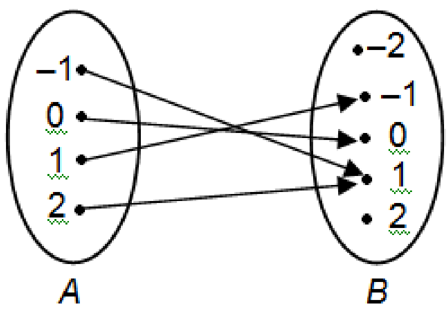
Fórmula: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ expressa o volume *V* de uma esfera como uma função do seu raio *r*.

OBS.: Nesse caso, **r** é dito variável **independente** e **V** é a variável **dependente**.

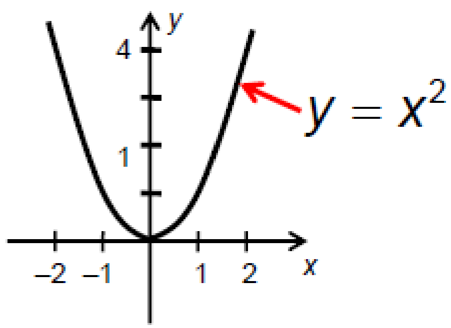
Representação

Descrição verbal: O valor a ser pago por uma corrida de táxi depende dos quilômetros rodados.

Diagrama de setas:

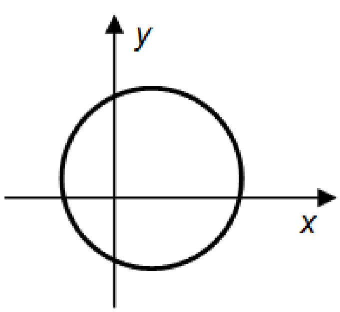


Gráficos:

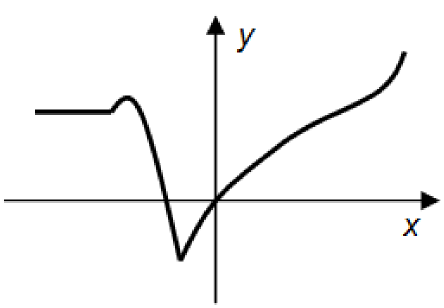


Exemplo: Quais dos gráficos a seguir são gráficos de funções de *x* e quais não são? Justifique sua resposta.

a)



b)

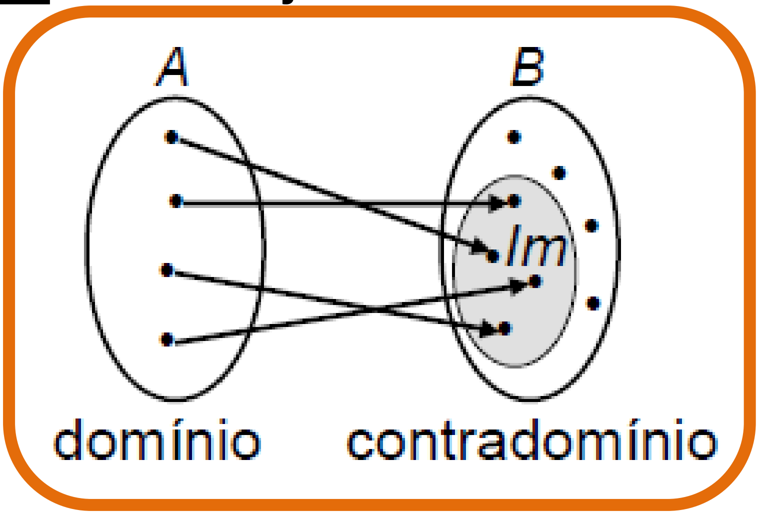


Domínio e Imagem

❖ **Domínio:** O domínio de uma função é sempre o próprio conjunto de partida, ou seja, D(f)= A.

❖ **Imagem:** Se um elemento $x \in A$ estiver associado a um elemento $y \in B$, dizemos que y é a imagem de x (indica-se y = f(x) e lê-se “y é igual a f de x”).

❖ **Contradomínio:** É o conjunto B.



Domínio e Imagem

Exemplo: Encontre o domínio e a imagem da função $f : R \rightarrow R$, onde $f(x) = x^2$.

Exemplo: Considere a função f: A →B representada pelo diagrama a seguir:

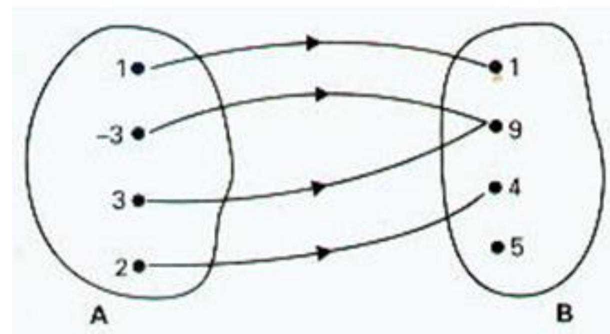
Determine:

a) O domínio de f;

b) f(1), f(-3), f(3) e f(2);

c) o conjunto imagem de f;

d) a lei de associação.



Exemplo: Dada a função IR → IR definida por: $f(x) = x^2 - 5x + 6$, calcule:

a) f(2), f(3) e f(0);

b) o valor de x cuja imagem vale 2.

Domínio e Imagem

O domínio é o subconjunto dos IR no qual todas as operações indicadas em y = f(x) são possíveis.

Vejamos alguns exemplos:

a) $f(x) = 3x + 2$ b) $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$ c) $p(x) = \sqrt[3]{2x-1}$

d) $q(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$ e) $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ f) $v(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-4}$

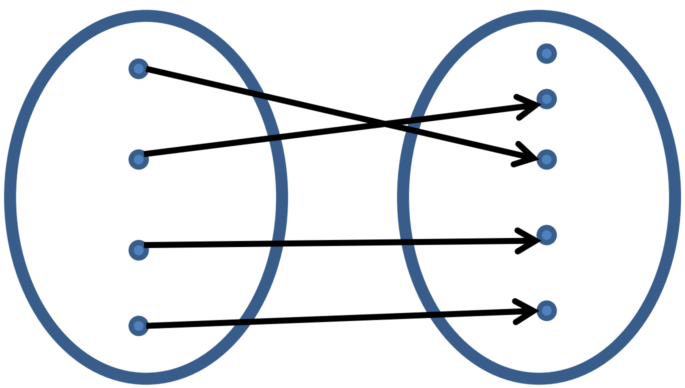
g) $f(x) = \sqrt{2x-4}$ h) $f(x) = \frac{5}{x+1}$ i) $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}}$

Propriedades de uma Função

➢ Vejamos algumas propriedades que caracterizam uma função **f: A→B:**

Função injetora: A função *f* : A → B é **injetora** se elementos distintos do domínio tiverem imagens distintas, ou seja, dois elementos não podem ter a mesma imagem.

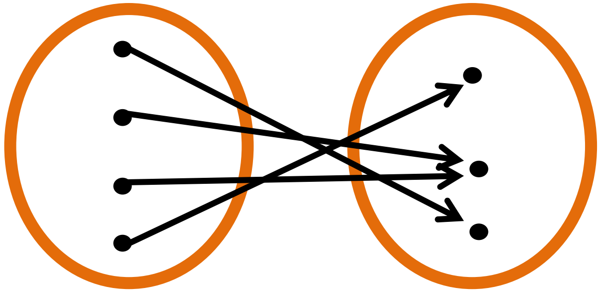
$$\forall x_1 \in A, \forall x_2 \in A, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



Injetora

Propriedades de uma Função

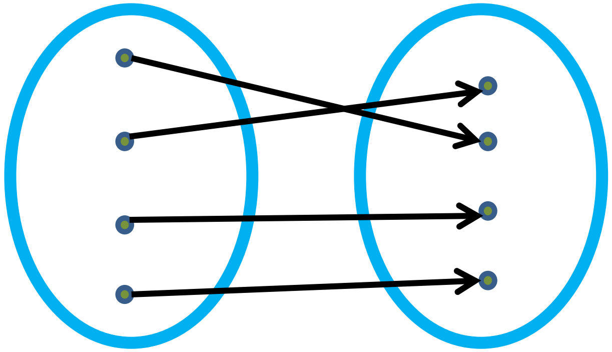
Função sobrejetora: Uma função *f* : A → B é **sobrejetora** se, e somente se, o conjunto imagem for igual ao contradomínio.



$$\forall y \in B,\ \exists x \in A / (x, y) \in f$$

Sobrejetora

Função Bijetora: Uma função *f* : A → B é **bijetora** quando ela é sobrejetora e injetora ao mesmo tempo.



Bijetora

Propriedades de uma Função

Exemplo: Determine quais das seguintes funções são injetoras, sobrejetoras e bijetoras.

a) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $g(x)=x^3$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x^2$

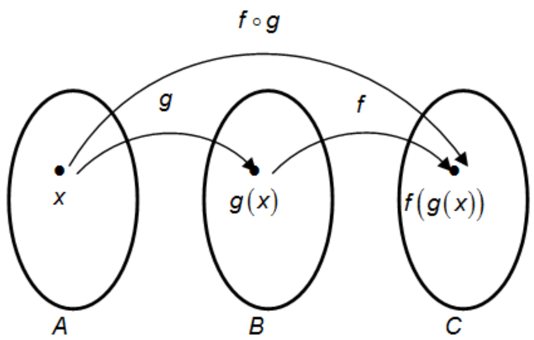
c) $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tal que $h(x)=x^2$

d) $r:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tal que $r(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x \text{ for ímpar}\\ 1 & \text{se } x \text{ for par}\end{cases}$

e) $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $p(x)=\begin{cases}x+1, & \text{se } x\geq 0\\ -1, & \text{se } x<0\end{cases}$

Composição de Funções

Definição: Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$. A Função Composta $f \circ g$ é a função de A em C definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.



- Por definição, o domínio da $f \circ g$ consiste em todo o x no domínio de *g* para o qual *g*(x) está no domínio de *f*.

Exemplo: Seja $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Determine:

a) $(f \circ g)(x)$ c) $(g \circ g)(x)$ e) $(g \circ f)(4)$
b) $(g \circ f)(x)$ d) $(f \circ f)(x)$ f) $(f \circ g)(7)$

Função Inversa

No dia-a-dia, o termo "*inverter*" tem a conotação de virar em sentido contrário. Em Matemática, o termo inverter descreve uma função que desfaz o efeito da outra.

Em um esquema de criptografia, um transmissor deseja que uma mensagem chegue com segurança a seu receptor. A criptografia é a transformação de um domínio de mensagem não cifradas para um domínio de mensagem criptografada aplicando uma **função bijetora**, de modo que se possa calcular sua inversa.

Função Inversa

O domínio de **f** é o conjunto imagem de f^{-1}, e o conjunto imagem de **f** é o domínio de $\mathbf{f^{-1}}$. Quando queremos, a partir da sentença y=f(x), obter a sentença de $f^{-1}(x)$, devemos dar os seguintes passos:

1°) Isolamos **x** na sentença **y=f(x)**;

2°) Pelo fato de ser usual a letra **x** como variável independente, trocamos **x** por **y** e **y** por **x**.

<u>Exemplo:</u> Determine, se existir, a inversa de f: lR→lR definida por y = 2x+1.

Função Inversa

OBS.:

- *f* tem inversa se, e somente se, *f* for uma função bijetora.
- Se *f* tem inversa, denotamos a inversa por f^{-1}.
- Frequentemente utilizamos a mesma variável independente para *f* e f^{-1}, isto é, $f(x)$ e $f^{-1}(x)$.
- O gráfico de uma função *f* e o da sua inversa f^{-1}, são simétricos em relação à reta $y = x$.

Exemplo: Encontre, se existir, a função inversa $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e esboce o gráfico de *f* e f^{-1} no mesmo plano cartesiano em cada caso.

a) $f(x) = 3x$

b) $f(x) = \dfrac{x-2}{3}$

Função Racional

Definição de Racional:

Uma ***função racional***, **y = f(x)**, é uma função que pode ser expressa como uma razão (quociente) de dois polinômios P(x) e Q(x).

$$\boxed{f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}}$$

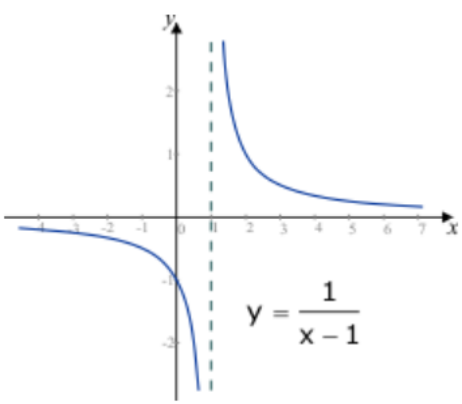
Função Racional

Algumas considerações

O domínio de uma ***função racional***, **consiste em todos os valores de x** tais que **Q(x) ≠ 0.**

Ao contrário dos polinômios, cujos gráficos são curvas contínuas, o gráfico de uma função racional pode apresentar interrupções nos pontos onde o denominador é igual a zero.

Exemplos: a)

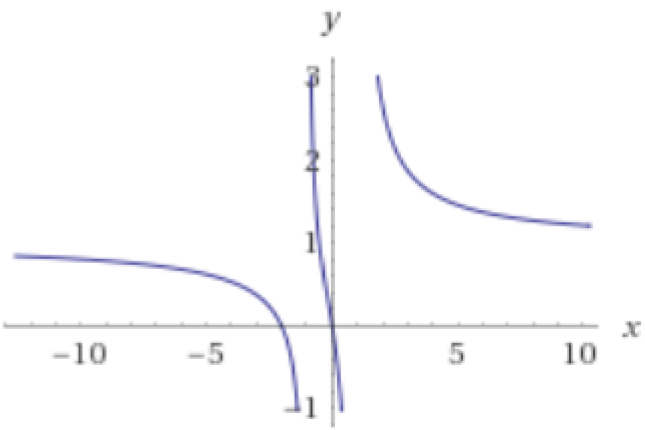


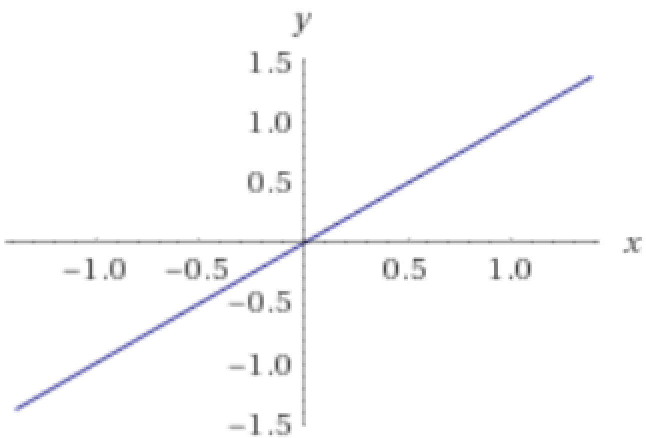
b) $y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$ c) $y = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$

Função Racional

b) $y = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$

c) $y = \dfrac{x^2 + 2x}{x + 2}$





Função Exponencial

Definição de Exponencial:

Chamamos de função exponencial a toda função do tipo

$f(x) = a^x$, definida para todo x real com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Exemplos:

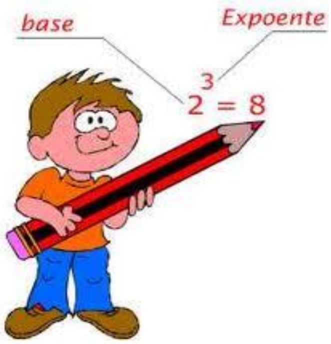
a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = (1/2)^x$

Função Exponencial

Resolução de uma equação exponencial:

Vamos tomar como exemplo a igualdade: $2^3 = 8$ onde o número 2 é a base, o número 3 o expoente e o 8 a potência. A operação que associa os números 2 e 3 (base e expoente, respectivamente) ao número 8 chama-se potenciação. Podemos considerar que dessa operação derivem duas outras operações. Observe as seguintes questões:



Função Exponencial

1) Conhecendo a potência e o expoente, encontrar o valor da base x, ou seja: $x^3 = 8$

A esta operação vamos atribuir a seguinte notação:

$\sqrt[3]{8} = x$, onde $x = 2$, pois $2^3 = 8$

2) Conhecendo a potência e a base, encontrar o valor do expoente x, ou seja: $2^x = 8$

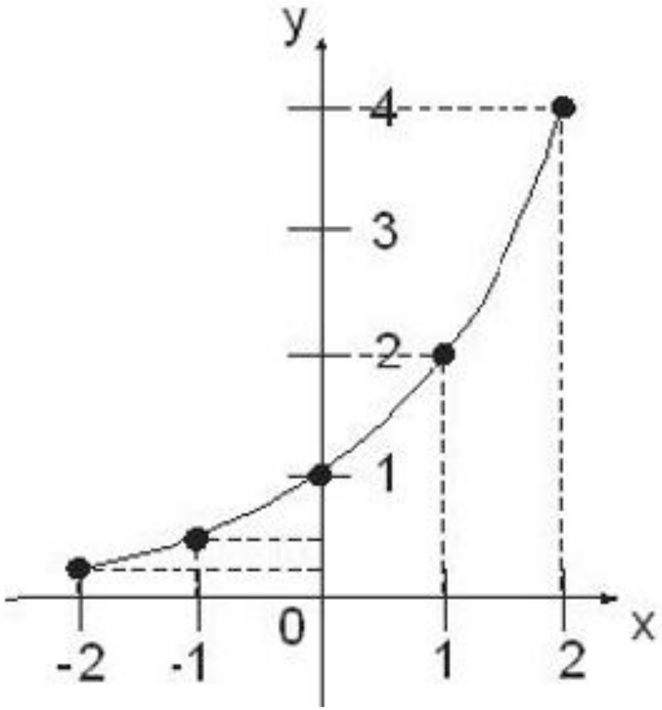
Fatorar o 8: $2^x = 2^3$, ou seja, $x = 3$

Função Exponencial

Gráfico de uma função exponencial:

1º Caso: $f(x) = 2^x$. Onde a base é um número real maior que 1:

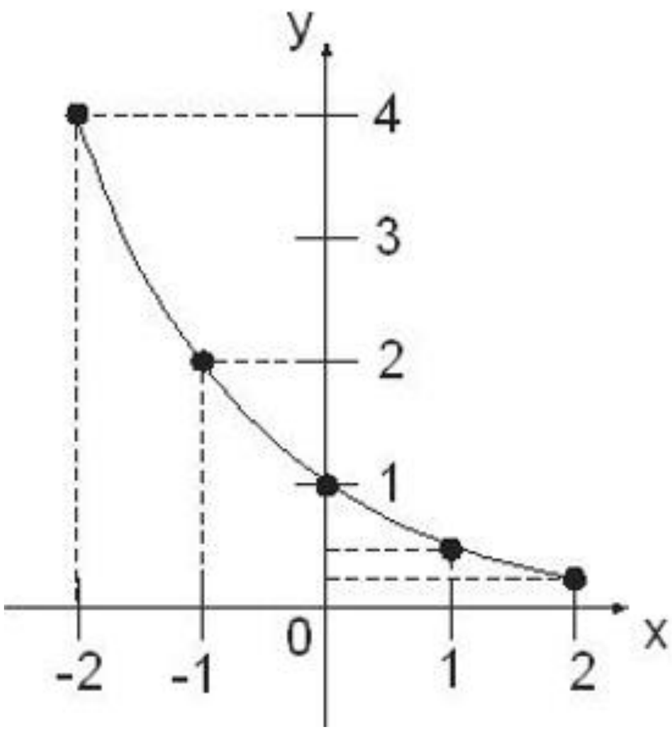
a > 1.



Função Exponencial

Gráfico de uma função exponencial:

2º Caso: $f(x) = (1/2)^x$. Onde a base é um número real, maior que 0 e menor que 1: **0 < a < 1**



Função Exponencial

Características da função exponencial:

Dos exemplos estudados, podemos tirar as seguintes conclusões:

1) A curva da função $f(x) = a^x$ passa pelo ponto (0,1);

2) O seu domínio é o conjunto dos reais D = R

3) O seu conjunto imagem são os reais positivos sem o zero;

4) A função é crescente para a base *a* maior que 1 ($a > 1$);

5) A função é decrescente para a base *a* maior que 0 e menor que 1($0 < a < 1$).

Função Exponencial

Exemplos:

1) Esboçar o gráfico da função dada por $y = 3 - 2^x$, classificando-a em crescente ou decrescente.

2) Resolva as seguintes exponenciais:

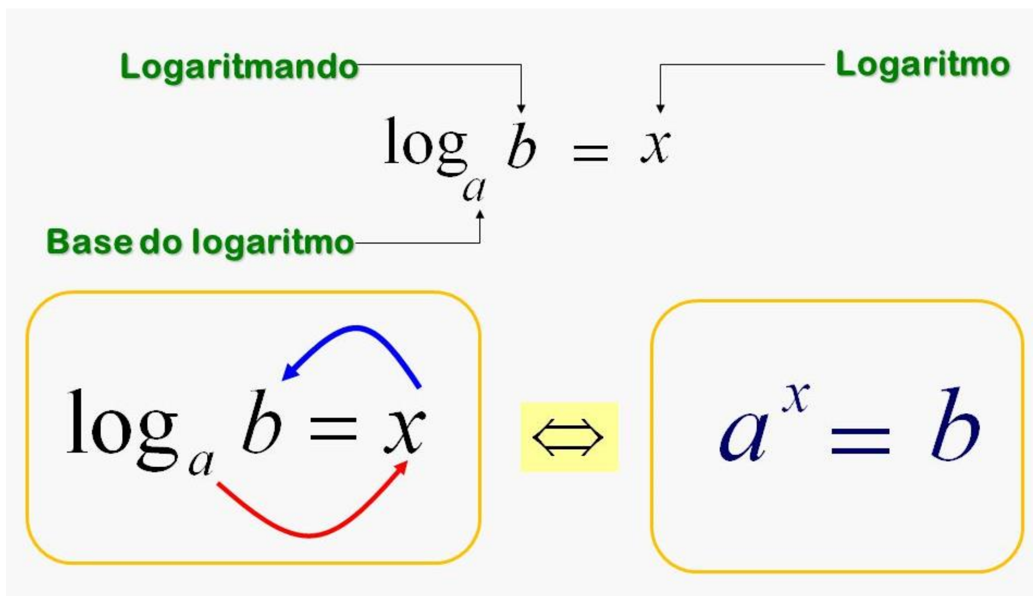
$$\left(\frac{1}{9}\right)^{3-x} = 27 \qquad \frac{9^x + 27}{4} = 3^{x+1} \qquad 3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 360$$

3) O domínio e a imagem da função $f(x) = 3^x - 2$

Função Logarítmica

Definição de Logaritmo:

O logaritmo de um número positivo b, na base a, positiva e diferente de um, é o expoente x ao qual se deve elevar a para se obter b.



Função Logarítmica

Vamos tomar como exemplo a igualdade: $2^3 = 8$ onde o número 2 é a base, o número 3 o expoente e o número 8 é a potência. A operação que associa os números 2 e 3 (base e expoente, respectivamente) ao número 8 chama-se potenciação. Podemos considerar que dessa operação derivem duas outras operações. Observe as seguintes questões:

Função Logarítmica

1) Conhecendo a potência e o expoente, encontrar o valor da base x, ou seja: $x^3 = 8$

A esta operação vamos atribuir a seguinte notação:

$\sqrt[3]{8} = x$, onde $x = 2$, pois $2^3 = 8$

2) Conhecendo a potência e a base, encontrar o valor do expoente x, ou seja: $2^x = 8$

A esta operação vamos atribuir a seguinte notação:

$\log_2 8 = x$, onde $x = 3$ pois $2^3 = 8$

Função Logarítmica

A operação é denominada logaritmação e o expoente x, logaritmo.

Sendo a e b números reais positivos, com $b \neq 1$, chamamos de logaritmos de a na base b o expoente real x ao qual se eleva b para obter a:

$$\log_b a = x \rightarrow b^x = a, \text{ com } a > 0,\ b > 0 \text{ e } b \neq 1$$

$$\log_b a$$

Função Logarítmica

Exemplos:

1) $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$

2) $\log_{10} 100 = 2$, pois $10^2 = 100$

Observação: Quando a base é 10, por convenção, omitimos a base, ou seja, $\mathbf{\log_{10} x = \log x}$

Para que $\log_b a = x$ tenha significado, para todo x real, precisamos impor $b > 0$, $b \neq 1$ e $a > 0$.

Função Logarítmica

Assim, não existem, por exemplo:

1) $\log_2(-8)$, pois não existe x tal que $2^x = -8$

2) $\log_1 3$, pois não existe x tal que $1^x = 3$

Os logaritmos possuem várias aplicações na Matemática e em diversas áreas do conhecimento. Iremos através de exemplos demonstrar a utilização das técnicas de logaritmos na busca de resultados para as variadas situações em questão.

Função Logarítmica

Exemplo:

Em uma determinada cidade, a taxa de crescimento populacional é de 3% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população desta cidade irá dobrar, se a taxa de crescimento continuar a mesma?

População do ano-base = P0
População após um ano = P0 **.** (1,03) = P1
População após dois anos = P0 **.** $(1,03)^2$= P2
População após x anos = P0 **.** $(1,03)^x$ = Px
Vamos supor que a população dobrará em relação ao ano-base após x anos, sendo assim, temos:
Px = 2 **.** P0
P0 **.** $(1,03)^x$ = 2 **.** P0
$1,03^x = 2$
Aplicando logaritmo
$\log 1,03^x = \log 2$
x **.** log 1,03 = log2
x **.** 0,0128 = 0,3010
x = 0,3010 / 0,0128
x = 23,5
A população dobrará em aproximadamente 23,5 anos.

Função Logarítmica

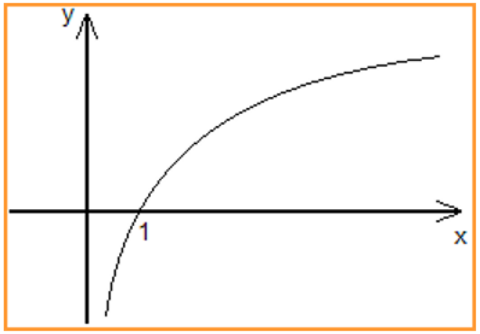
Representação gráfica de um logaritmo

A representação gráfica pode ser de duas formas:

Veja os gráficos abaixo mostrando as duas formas para a função $y = \log_b x$

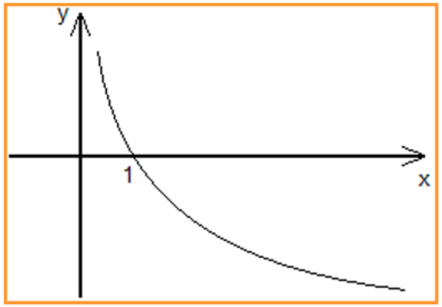
Nestes gráficos devemos observar que os cortes no eixo x, em ambos os gráficos, ocorre no ponto 1. Isso está de acordo, pois logaritmo de 1, em qualquer base, é ZERO.

Crescente:



b > 0

Decrescente:

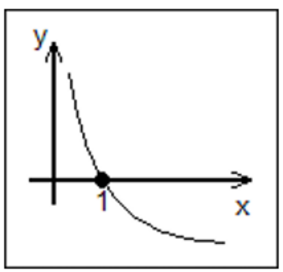


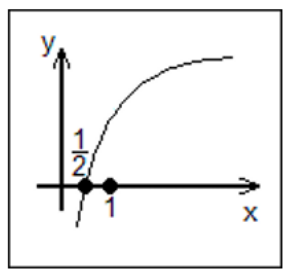
0 < b < 1

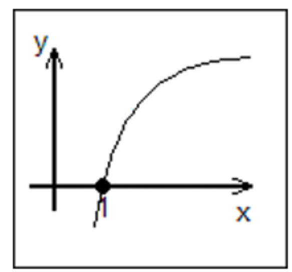
Função Logarítmica

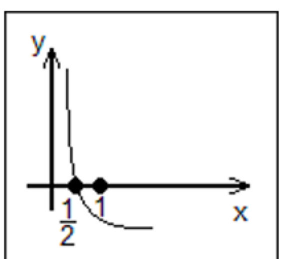
Exemplo:

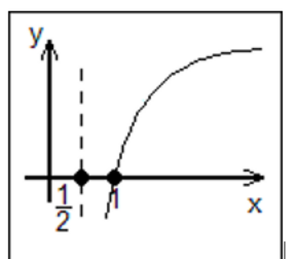
A representação geométrica que melhor representa o gráfico da função real de variável real x, dada por $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, é:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Função Logarítmica

Propriedades

Logaritmos e suas Propriedades

Com a e b números Reais positivos e a ≠ 1, temos:

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

Consequências da definição

Logaritmo de 1

O logaritmo de 1 é SEMPRE zero, pois todo número elevado a zero é igual a 1.

$$\log_b 1 = 0 \text{ porque } b^0 = 1.$$

Logaritmo de b na base b

O logaritmo de um número b na base b é igual a 1 pois $b^1 = b$.

$$\log_b b = 1, \text{ porque } b^1 = b.$$

b elevado ao logaritmo de M na base b

Um número b elevado ao log de M na base b é igual ao prório M.

$$b^{\log_b M} = M$$

Propriedades

Logaritmo do Produto

O log de de dois números multiplicados é igual a soma dos logaritmos desses números.

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Logaritmo do Quociente

O logaritmo de dois números dividios é igual a subtração dos logs desses números

$$\log_a(b \div c) = \log_a b - \log_a c$$

Logaritmo da Potência

O logaritmo de uma potência é igual ao valor da potência multiplicado pelo log.

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Logaritmo com uma potência na base

O logaritmo com uma potência na base é dado pela multiplicação do inverso do expoente dessa potência pelo log.

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m}\log_a b$$

$$\log_b M = \frac{\log_c M}{\log_c b}$$

Mudança de Base

Função Logarítmica

Exemplo:

Resolva os seguintes logaritmos:

$$\log_2 16 + \log_3 243 - \log_{\sqrt{5}} 3125$$

$$\log_{49} \sqrt{7} + \log_9 729 - \log_{\frac{3}{10}} 0{,}027$$

$$\log_2 \left[\log_{\frac{25}{4}} \left(\log_{\sqrt{2}} \sqrt[4]{32} \right) \right]$$

$$\log_2 (4 - x) = \log_2 (x + 1) + 1$$

$$\log_2 \sqrt{x - 4} + \log_4 (x - 4) = \log_2 \frac{1}{4}$$

Função Trigonométrica

As funções trigonométricas, também chamadas de **funções circulares**, estão relacionadas com as demais voltas no ciclo trigonométrico.

As **principais funções trigonométricas** são:

Função Seno

Função Cosseno

Função Tangente

No **círculo trigonométrico** temos que cada número real está associado a um ponto da circunferência.

Função Trigonométrica

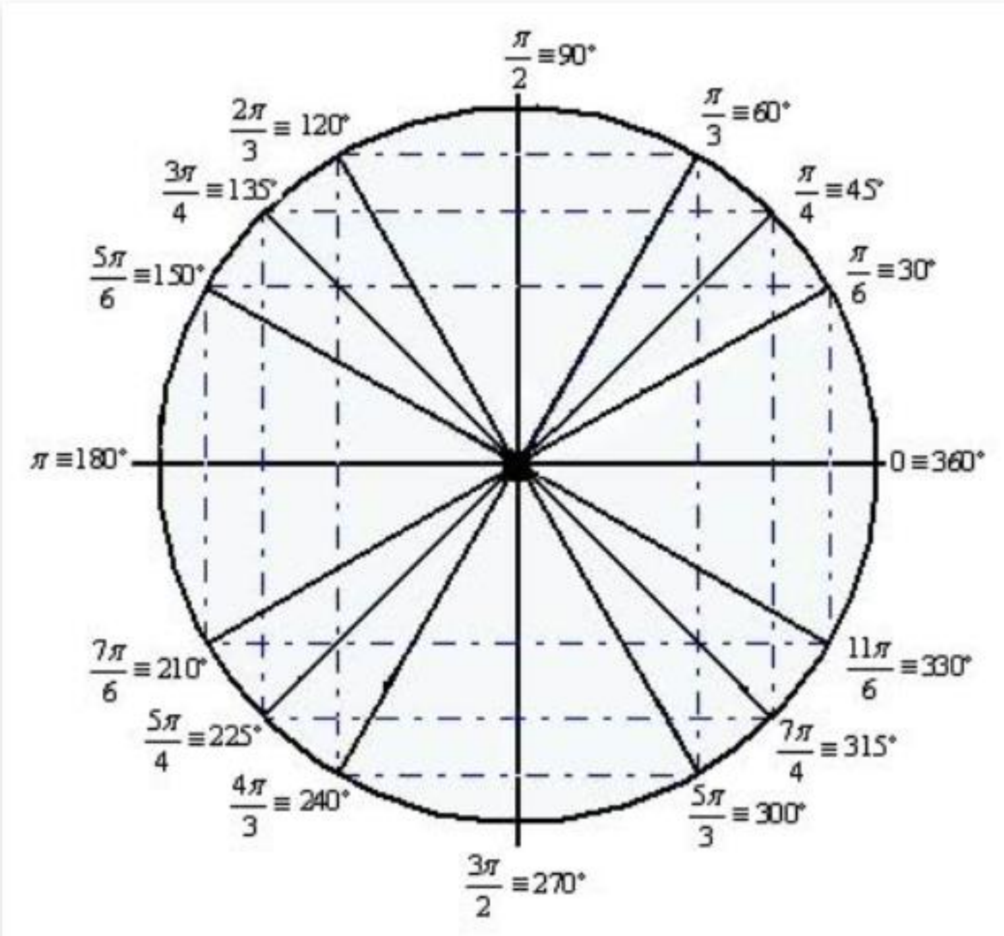


Figura do Círculo Trigonométrico dos ângulos expressos em graus e radianos

Função Trigonométrica

Funções Periódicas

As funções periódicas são funções que possuem um **comportamento periódico**. Ou seja, que ocorrem em determinados intervalos de tempo.

O **período** corresponde ao menor intervalo de tempo em que acontece a repetição de determinado fenômeno.

Uma função f: A → B é periódica se existir um número real positivo *p* tal que

$$f(x) = f\,(x+p),\ \forall\ x \in A$$

O menor valor positivo de *p* é chamado de período de *f*.
Note que as funções trigonométricas são exemplos de funções periódicas visto que apresentam certos fenômenos periódicos.

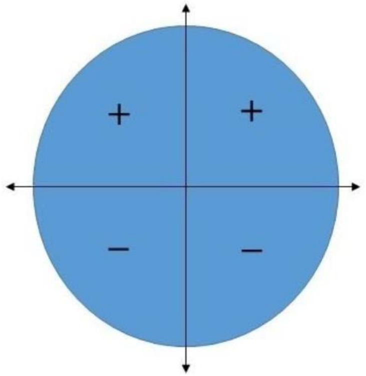
Função Trigonométrica

Função Seno

A função seno é uma função periódica e seu período é **2π**. Ela é expressa por: **função f(x) = sen x**

No círculo trigonométrico, o **sinal da função seno** é positivo quando *x* pertence ao primeiro e segundo quadrantes.

Já no terceiro e quarto quadrantes, o sinal é negativo.



Função Trigonométrica

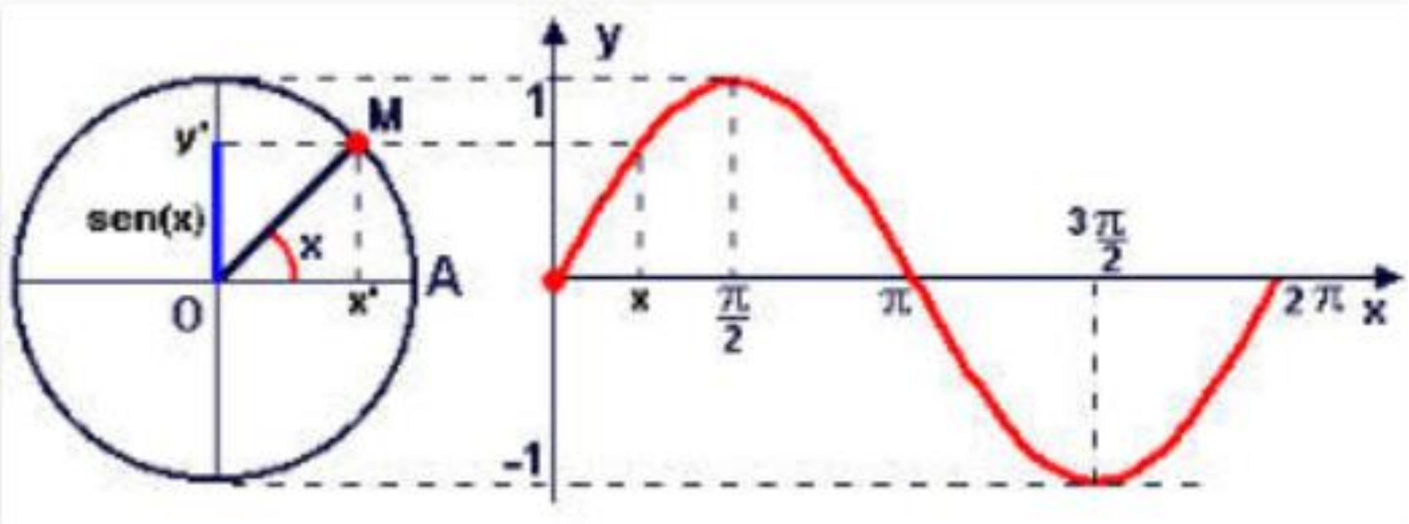
O **domínio** e o **contradomínio** da função seno são iguais a R. Ou seja, ela está definida para todos os valores reais: D(sen)=R.

Já o conjunto da **imagem da função** seno corresponde ao intervalo real [-1, 1]: $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$.

Função Trigonométrica

Em relação à simetria, a função seno é uma **função ímpar**: sen(-x) = -sen(x).

O gráfico da função seno f(x) = sen x é uma curva chamada de **senoide**:



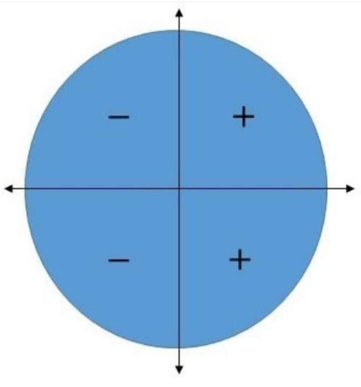
Função Trigonométrica

Função Cosseno

A função cosseno é uma função periódica e seu período é **2π**. Ela é expressa por: **função f(x) = cos x**

No círculo trigonométrico, o **sinal da função cosseno** é positivo quando *x* pertence ao primeiro e quarto quadrantes.

Já no segundo e terceiro quadrantes, o sinal é negativo.



Função Trigonométrica

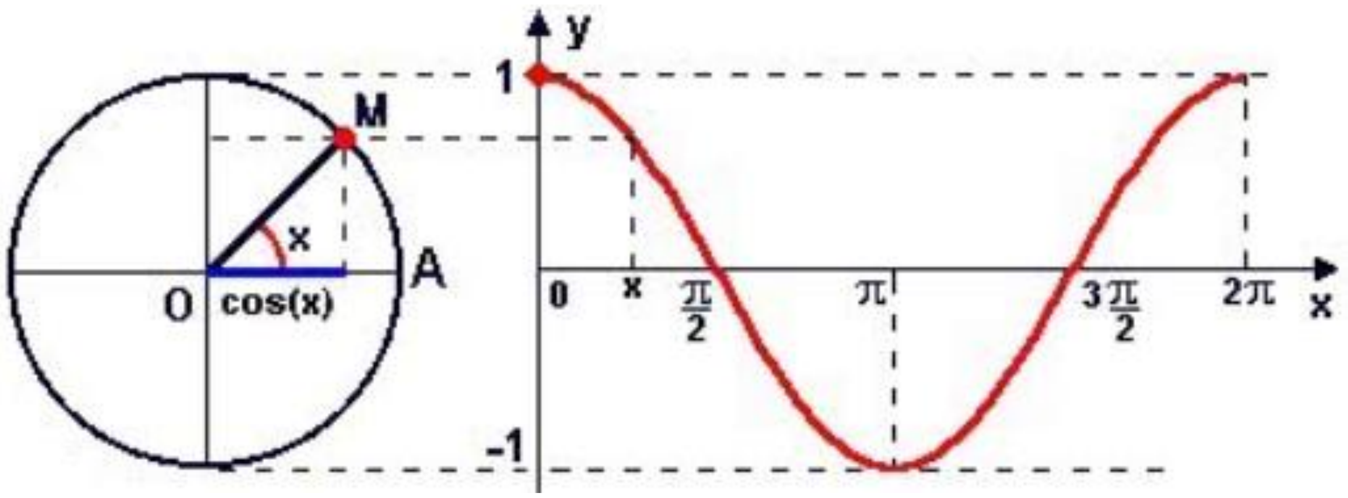
O **domínio** e o **contradomínio** da função cosseno são iguais a R. Ou seja, ela está definida para todos os valores reais: D(cosx)=R.

Já o conjunto da **imagem da função** cosseno corresponde ao intervalo real [-1, 1]: $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Função Trigonométrica

Em relação à simetria, a função cosseno é uma **função par**: cos(-x) = cos(x).

O gráfico da função cosseno f(x) = cos x é uma curva chamada de **cossenoide**:



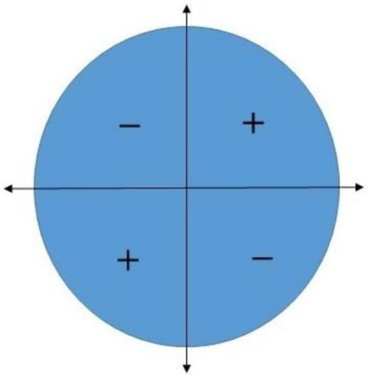
Função Trigonométrica

Função Tangente

A função Tangente é uma função periódica e seu período é **π**. Ela é expressa por: **função f(x) = tg x**

No círculo trigonométrico, o **sinal da função tangente** é positivo quando *x* pertence ao primeiro e terceiro quadrantes.

Já no segundo e quarto quadrantes, o sinal é negativo.



Função Trigonométrica

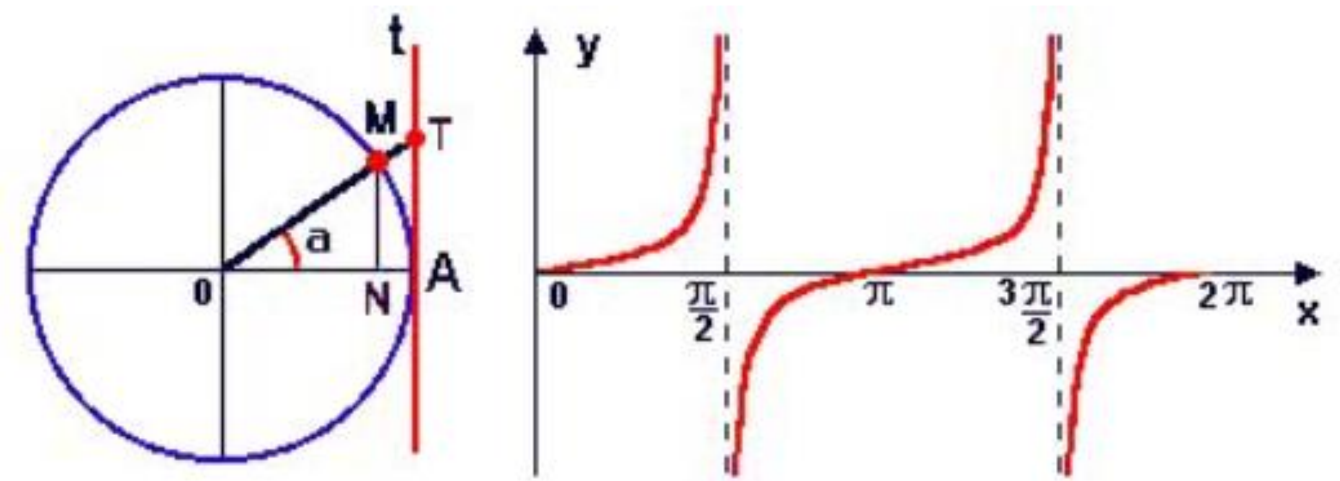
O **domínio** da função tangente é: $D(\tan x)=\{x \in R \mid x \neq$ de $\pi/2 + k\pi;\ K \in Z\}$. Assim, não definimos tg x, se $x = \pi/2 + k\pi$.

Já o conjunto da **imagem da função** tangente corresponde a R, ou seja, o conjunto dos números reais.

Função Trigonométrica

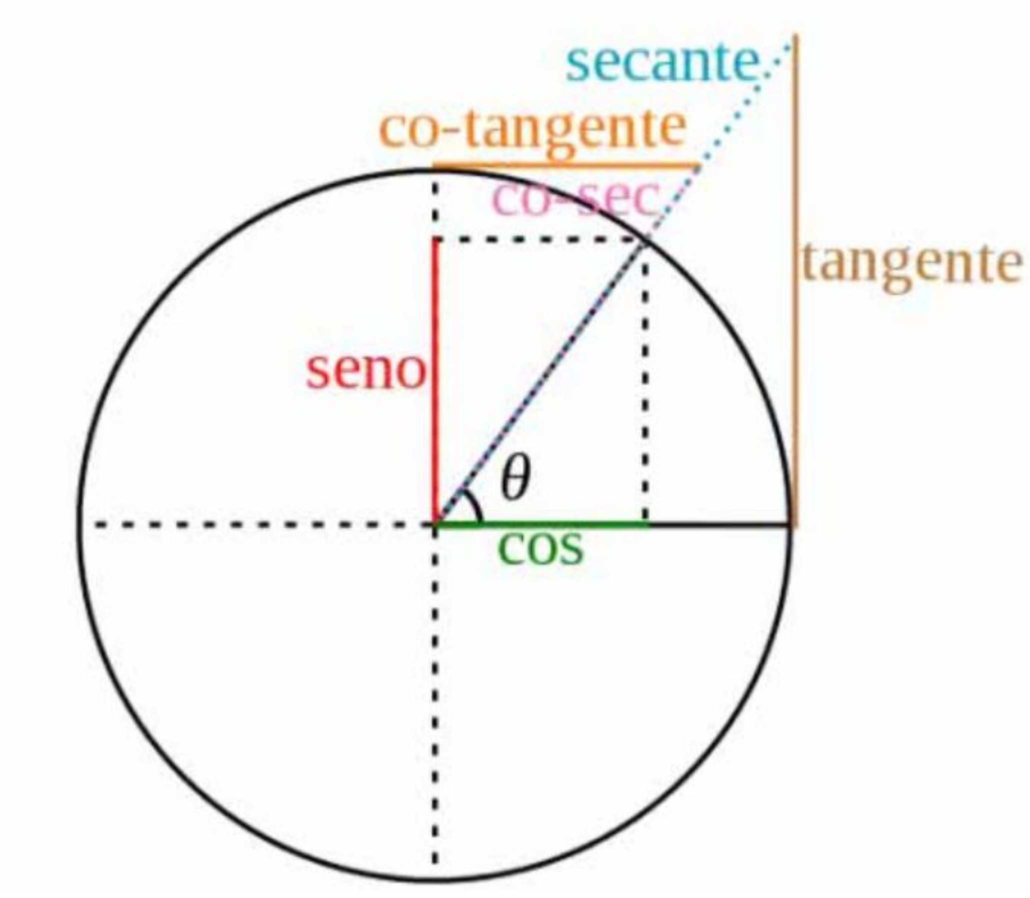
Em relação à simetria, a função tangente é uma **função ímpar**: tg(-x) = -tg(-x).

O gráfico da função tangente f(x) = tg x é uma curva chamada de **tangentoide**:



Função Trigonométrica

Círculo Trigonométrico



Função Trigonométrica

Relações Trigonométricas

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ - Identidade fundamental da trigonometria

$$\text{tg}\ x = \frac{\text{sen}\ x}{\cos x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{cossec}\ x = \frac{1}{\text{sen}\ x}$$

$$\text{cotg}\ x = \frac{1}{\text{tg}\ x} = \frac{\cos x}{\text{sen}\ x}$$

$$\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sec^2 x - \text{tg}^2 x = 1$$

$$\text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x - 1$$

$$\text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x$$

Função Trigonométrica

Relações Trigonométricas

ARCOS DUPLOS

$$\operatorname{sen} 2x = 2.\operatorname{sen} x.\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\cos 2x = 2.\cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2.\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

ADIÇÃO DE ARCOS

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a.\cos b + \operatorname{sen} b.\cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b$$

$$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a.\cos b - \operatorname{sen} b.\cos a$$

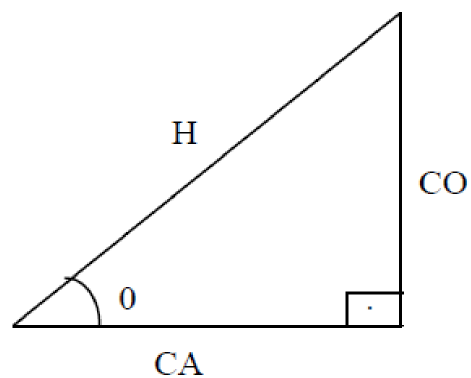
Relações Trigonométricas

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{CO}{H} \qquad \cos\theta = \frac{CA}{H}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{CO}{CA} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{CA}{CO}$$

$$\sec\theta = \frac{H}{CA} \qquad \operatorname{cossec}\theta = \frac{H}{CO}$$



PRODUTOS DE SENOS E COSSENOS

$$\operatorname{sen} u.\cos u = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2u$$

$$\operatorname{sen} u.\cos v = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)\right]$$

$$\cos u.\cos v = \frac{1}{2}\left[\cos(u+v) + \cos(u-v)\right]$$

$$\cos u.\operatorname{sen} v = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(u+v) - \operatorname{sen}(u-v)\right]$$

$$\operatorname{sen} u.\operatorname{sen} v = \frac{1}{2}\left[\cos(u-v) - \cos(u+v)\right]$$