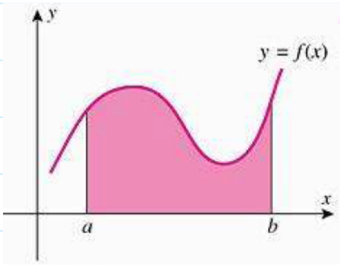
Integral definida

Motivação: Encontrar a área de uma região plana qualquer.

Problema: Seja f(x) um função contínua e não negativa no intervalo [a,b]. Encontrar a área da região R delimitada inferiormente pelo eixo x, lateralmente pelas retas verticais x = a e x = b e superiormente pela curva y = f(x).



Ideia: Aproximar a figura por polígonos cujas áreas possam ser calculadas pelos métodos da geometria elementar.

- Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais inserindo $n - 1$ pontos igualmente espaçados entre a e b e denotamos esses pontos por

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$$

(Figura 6.4.3). Cada um desses subintervalos tem comprimento $(b - a)/n$, que costuma ser denotado por

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

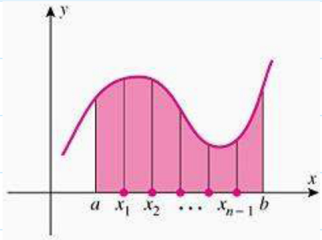


Figura 6.4.3

- Acima de cada subintervalo construímos um retângulo cuja altura é o valor de f em um ponto arbitrariamente selecionado no subintervalo. Assim, se

$$x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$$

denotam os pontos selecionados nos subintervalos, então os retângulos têm alturas $f(x_1^*), f(x_2^*), \dots, f(x_n^*)$ e áreas

$$f(x_1^*)\Delta x, \quad f(x_2^*)\Delta x, \dots, \quad f(x_n^*)\Delta x$$

(Figura 6.4.4).

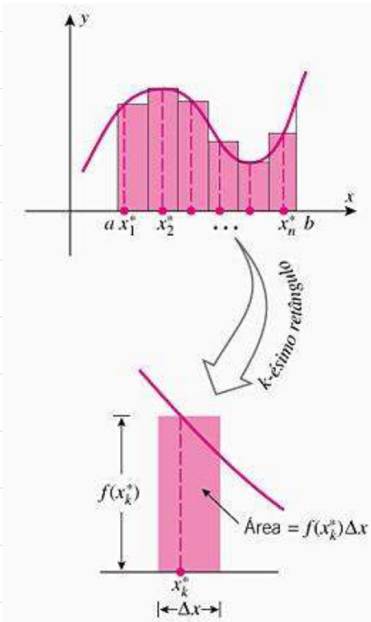


Figura 6.4.4

- A união dos retângulos forma uma região R_n, cuja área pode ser considerada como uma aproximação da área A da região R; ou seja,

$$A = \text{área}\,(R) \approx \text{área}\,(R_n) = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x$$

(Figura 6.4.5). Isso pode ser expresso mais compactamente na notação sigma como

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$$

Esta soma é chamada *soma de Riemann* da função $f(x)$.

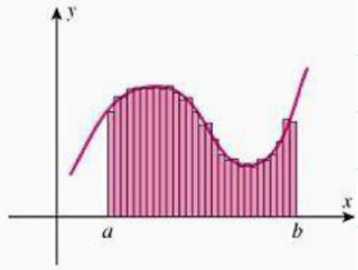


Figura 6.4.5 área $(R_n) \approx$ área (R)

- Repetimos o processo usando cada vez mais subintervalos e definimos a área R como o "limite" das aproximações dadas pelas áreas das regiões R_n quando n cresce sem parar. Assim, definimos a área A por

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$$

Isso nos diz para parar quando k = n

Isso nos diz para somar

Isso nos diz para começar com k = m

$$\sum_{k=m}^{n} f(x_k)\,\Delta x$$

Resumindo, temos a definição seguinte.

DEFINIÇÃO (***Área Sob uma Curva***) Se a função f for contínua em $[a, b]$ e se $f(x) \geq 0$ para cada x em $[a, b]$, então a ***área*** sob a curva $y = f(x)$ e acima do intervalo $[a, b]$ é definida por

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$$

https://www.geogebra.org/m/uatN4wYP

Esse mesmo tipo de limite ocorre em uma grande variedade de situações, mesmo quando f não é necessariamente uma função positiva. Ele aparece quando tentamos encontrar a distância percorrida por um objeto, o comprimento de curvas, volumes de sólidos, centros de massa, forças por pressão da água e trabalho, entre outras quantidades.
Portanto, a esse limite damos nome e notação especial.

Definição de integral definida: Seja f uma função definida em $[a, b]$ e seja P uma partição qualquer de $[a, b]$. Então, a integral definida de f de a até b é:

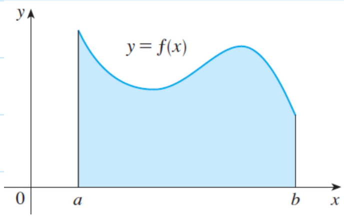
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x}$$

desde que o limite exista. Se ele existir, dizemos que f é integrável em $[a, b]$.

OBSERVAÇÃO 1 O símbolo $\int$ foi introduzido por Leibniz e é denominado **sinal de integral**. Ele é um S alongado e foi assim escolhido porque uma integral é um limite de somas. Na notação $\int_a^b f(x)\,dx$, a e b são ditos **limites de integração**, a é o **limite inferior**, b, o **limite superior**.

OBSERVAÇÃO 2 A integral definitiva $\int_a^b f(x)\,dx$ é um número.

Interpretação geométrica da integral definida:
Quando f é contínua e não negativa em $[a, b]$, a integral definida representa a área da região sob o gráfico da f de a até b.



Definição

(*a*) Se $a > b$, então: $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

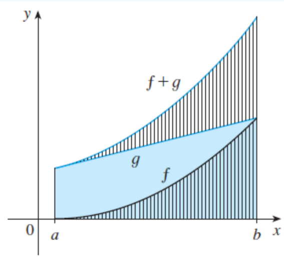
se a integral à direita existir.

(*b*) Se $a = b$ e $f(a)$ existe, então: $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Teorema Se f é contínua sobre $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.

Propriedades da Integral Definida

Sejam f e g funções integráveis e k uma constante qualquer, então:

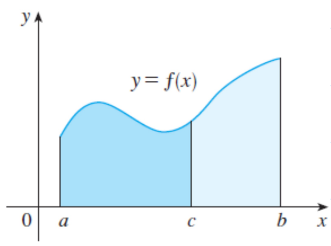


(i) $$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

(ii) $$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

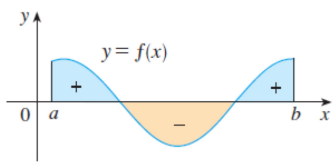
Proposição Se $a < c < b$ e f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$, então f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$



Proposição Se f integrável e se $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$, então:

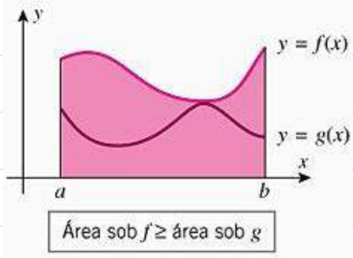
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$



$\int_a^b f(x)\,dx$ é a área resultante.

Proposição Se f e g são integráveis em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$



Área sob $f \geq$ área sob g

O Teorema Fundamental do Cálculo

O Teorema Fundamental do cálculo permite relacionar as operações de derivação e integração.

Teorema Fundamental do Cálculo Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Ele nos diz que, conhecendo uma primitiva da função contínua em um intervalo, podemos calcular a sua integral definida facilmente.
Com isso, obtemos uma maneira rápida e simples de resolver inúmeros problemas que envolvem o cálculo da integral definida.

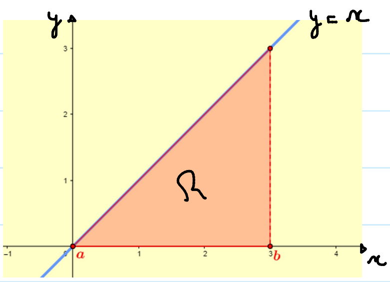
Obs: Costuma-se escrever $F(x)|_a^b$ para indicar F(b) - F(a), como segue

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).}$$

Exemplo: Calcule a integral definida de f(x) = x no intervalo [0,3] e faça a interpretação geométrica.

$$\int_0^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2}$$

$$= \frac{9}{2}$$



Interpretação geométrica:
$\int_0^3 x\,dx = \frac{9}{2}$ é a área da região R

localizada sob o gráfico da função $f(x) = x$
entre 0 e 3.
Neste caso, corresponde à área do triângulo
de base 3 e altura 3.

Exemplo: Calcule as integrais definidas usando o Teorema Fundamental do Cálculo.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

$\displaystyle = \operatorname{arc\,sen} x \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \operatorname{arc\,sen}(0)$

$\displaystyle = \frac{\pi}{4} - 0$

$\displaystyle = \frac{\pi}{4}$

b) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{3} 5e^x\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^4 f(x)\, dx$, onde $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 2x, & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$