Lista de exercícios 2 – Técnicas de integração

1) Calcule $\int senx \cos xdx$ por quatro métodos:

a) substituição $u = \cos x$;
b) substituição $u = senx$;
c) identidade $sen2x = 2senx\cos x$;
d) integração por partes.
Verifique que as soluções encontradas são equivalentes, utilizando identidades trigonométricas.

2) a) Prove a seguinte fórmula de redução

$$\int \cos^n(x)dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}(x)sen(x) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)dx .$$

(Dica: use integração por partes fazendo $u = \cos^{n-1} x$ e $dv = \cos xdx$)

b) Usando a fórmula acima, calcule $\int \cos^4 xdx$.

3) Mostrar que $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 5x \cos 2x \, dx = 0$

(*Sugestão:* Usar a fórmula $\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x]$

onde m e n são dois números inteiros quaisquer.)

4) Calcule as seguintes integrais, utilizando a técnica adequada.

a) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \operatorname{sen} x \cos x \, dx$ b) $\int_{-2}^{0} \frac{v^2 dv}{(v^3-2)^2}$

c) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} dx$ d) $\int \frac{(x+1)}{\sqrt{4-x^2}} dx$

e) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}$ f) $\int_1^3 r^3 \ln r \, dr$

g) $\int (\ln x)^2 dx$ h) $\int_0^1 t \cosh t \, dt$

i) $\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}} dy$ j) $\int senh^2 x \cosh x \, dx$

5) Calcule as seguintes integrais, utilizando identidades trigonométricas quando necessário.

a) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \, dx$ b) $\int tg^2 xdx$

c) $\int e^{2x} \cos^2(e^{2x}-1) dx$ d) $\int \frac{\operatorname{cotg}(1/x)}{x^2} dx$

6) Decomponha a função dada em uma soma de frações parciais. Não determine os valores numéricos dos coeficientes.

a) $\frac{1+6x}{(4x-3)(2x+5)}$ b) $\frac{10}{5x^2-2x^3}$

c) $\frac{x^4+1}{x^5+4x^3}$ d) $\frac{1}{(x^2+9)^2}$

e) $\frac{x^6}{x^2-4}$ f) $\frac{x^4}{(x^2-x+1)(x^2+2)^2}$

g) $\dfrac{4x^2-2x+7}{(x-2)^3(2x+3)(2x^2+5x+7)^2}$

7) Usando frações parciais, determine as integrais abaixo:

a) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x-1}dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{2x^2+3x+1}dx$

c) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}dx$

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)}dy$

e) $\displaystyle\int \frac{x^3+4}{x^2+4}dx$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}dx$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+3}dx$

Respostas

2) b) $\frac{1}{4}\cos^3 x senx+\frac{3}{8}\cos x senx+\frac{3}{8}x+c$

4) a) 0

b) $2/15$

c) $\ln|\sqrt{e^{2x}+1}+e^x|+C$

d) $-\sqrt{4-x^2}+\operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{2}+c$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)$

f) $\frac{81}{4}\ln 3-5$

g) $x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+c$

h) $1-\frac{1}{e}$

i) $\frac{1}{4}-\frac{3}{4}e^{-2}$

j) $\frac{1}{3}senh^3 x+c$

5) a) $\dfrac{\pi}{4}$

b) $tgx-x+c$

c) $\dfrac{1}{4}(e^{2x}-1)+\dfrac{1}{8}\operatorname{sen}(2e^{2x}-2)+c$

d) $-\ln|\operatorname{sen} 1/x|+c$

6) a) $\dfrac{A}{4x-3}+\dfrac{B}{2x+5}$

b) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{5-2x}$

c) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x^3}+\dfrac{Dx+E}{x^2+4}$

d) $\dfrac{A}{x+3}+\dfrac{B}{(x+3)^2}+\dfrac{C}{x-3}+\dfrac{D}{(x-3)^2}$

e) $x^4+4x^2+16+\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x-2}$

f) $\dfrac{Ax+B}{x^2-x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2}+\dfrac{Ex+F}{(x^2+2)^2}$

g) $\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}+\dfrac{C}{(x-2)^3}+\dfrac{D}{(2x+3)}+\dfrac{Ex+F}{(2x^2+5x+7)}+\dfrac{Gx+H}{(2x^2+5x+7)^2}$

7) a) $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x-1|+c$

b) $2\ln\frac{3}{2}$

c) $\frac{7}{6}+\ln\frac{2}{3}$

d) $\frac{27}{5}\ln 2-\frac{9}{5}\ln 3$

e) $\frac{1}{2}x^2-2\ln\left(x^2+4\right)+2arctg\left(\frac{x}{2}\right)+c$

f) $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right)-\dfrac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$

g) $\frac{1}{4}\ln\frac{8}{3}$