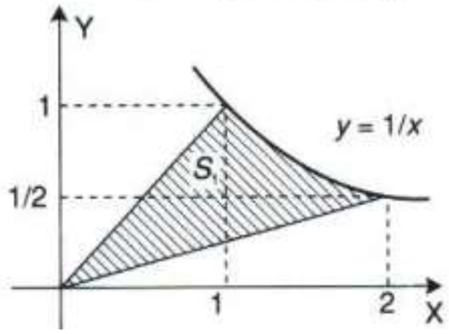
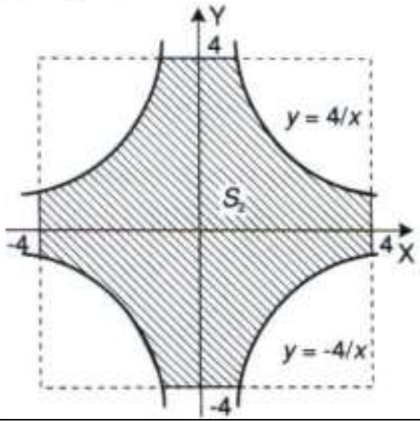
Lista de exercícios 4

1) Encontrar a área das regiões S_1 e S_2, vistas na figura a seguir:

a)



b)



---

2) Esboce a região delimitada pelas curvas $x = y^2 + 1$ e $x + y = 7$ e calcule sua área.

---

3) Esboce a região delimitada pelas curvas $y = \cos x$ e $y = \cos^2 x$ entre $x = 0$ e $x = \pi$. Calcule área dessa região. (Utilize o *Geogebra* para visualizar a região.)

---

4) Usando o cálculo integral, encontre a área do triângulo com vértices nos pontos (0, 0), (3, 1) e (1,2).

---

5) Sabendo que a integral de uma taxa de variação é a variação total: $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$, ou seja, se $F'(x)$ representa a taxa de variação de $y = F(x)$ em relação a x, então $F(b)$ - $F(a)$ é a variação total de y quando x muda de a para b. Resolva o seguinte problema:
Um tanque de armazenamento de petróleo sofre uma ruptura em t = 0 e o petróleo vasa do tanque a uma taxa de $r(t) = 100e^{-0,01t}$ litros por minuto. Quanto petróleo vazou na primeira hora?

---

6) Uma partícula se move em linha reta com a função de velocidade $v(t) = sen(\omega t)\cos^2(\omega t)$. Encontre a sua função de posição $s = f(t)$ se $f(0) = 0$.

---

7) Em uma certa cidade, a temperatura em °C, t horas depois das 9h foi aproximada pela função $T(t) = 20 + 6sen\left(\frac{\pi t}{12}\right)$. Calcule a temperatura média durante o período entre 9h e 21h.

(Definimos o valor médio de f no intervalo $[a, b]$ como $f_{med} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.)

---

8) Use a fórmula do comprimento de arco para encontrar o comprimento da curva $y = 2x - 5$, $-1 \le x \le 3$. Verifique o seu resultado observando que a curva é um segmento de reta e calculando seu comprimento pela fórmula da distância.

---

9) Encontre o comprimento das curvas:

a) $y = 1 + 6x^{3/2}$, $0 \le x \le 1$

b) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$, $1 \le x \le 2$

c) $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}(y-3)$, $1 \le y \le 9$

d) $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \le x \le 1/2$

---

10) Determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x, da região delimitada pelos gráficos das equações dadas.

a) $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} x$, $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{4}$

b) $y = x^3$, $x = -1$, $x = 1$ e $y = 0$

---

11) Determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo y, da região delimitada pelos gráficos das equações dadas.

a) $y = \ln x$, $y = -1$, $y = 2$ e $x = 0$

b) $x = y^2 + 1$, $x = \frac{1}{2}$, $y = -2$ e $y = 2$

12) Determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno dos eixos dados, da região delimitada pelos gráficos das equações dadas.

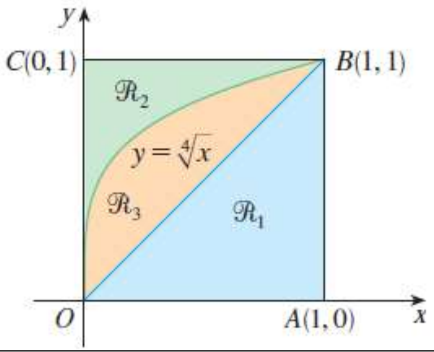
a) $y = 2x^2$, $x = 1$, $x = 2$ e $y = 2$; ao redor do eixo $y = 2$

b) $y = x^{2/3}$ e $y = 4$; ao redor dos eixos $x = -9$, $y = 0$ e $x = 0$

13) Encontre os volumes dos sólidos obtidos pela rotação da região delimitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$ em torno das seguintes retas:

(a) O eixo x (b) O eixo y (c) $y = 2$

14) Veja a figura e encontre o volume gerado pela rotação da região ao redor da reta especificada.



a) $\mathscr{R}_1$ em torno de OA
b) $\mathscr{R}_1$ em torno de AB
c) $\mathscr{R}_2$ em torno de OA
d) $\mathscr{R}_2$ em torno de AB
e) $\mathscr{R}_3$ em torno de OA
f) $\mathscr{R}_3$ em torno de AB

15) Usando integral, encontre a expressão do volume da esfera de raio r.

16) Usando integral, encontre a expressão da área da superfície de uma esfera de raio r.

17) Encontre a área da superfície obtida pela rotação da curva sobre o eixo x.

a) $y = x^3$, $0 \leq x \leq 2$ b) $y = \sqrt{1 + 4x}$, $1 \leq x \leq 5$

18) Calcular a área da superfície do cone gerado pela revolução do segmento de reta $y = 4x$, $0 \leq x \leq 2$:

(a) ao redor do eixo dos x; (b) ao redor do eixo dos y.

19) Considere o toro obtido pela rotação da região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$ em torno da reta $y = -2$.

a) Escreva a integral que fornece o volume do toro.

b) Calcule a área da superfície do toro.

Respostas:

1) a) ln2 b) 16(1 + 2ln2)

2) 125/6

3) 2

4) 5/2

5) Aproximadamente 4512 litros.

6) $s(t)=\frac{1}{3\omega}\left[1-\cos^3\left(\omega t\right)\right]$

7) Aproximadamente 24°C.

8) $4\sqrt{5}$

9) a) $\frac{2}{243}\left(82\sqrt{82}-1\right)$ b) $\frac{59}{24}$ c) $\frac{32}{3}$ d) $\ln 3-\frac{1}{2}$

10) a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{2\pi}{7}$

11) a) $\frac{\pi}{2}\left(e^4-\frac{1}{e^2}\right)$ b) $\frac{397\pi}{15}$

12) a) $\frac{3\pi}{2}$ b) $\frac{2304\pi}{5}$; $\frac{1024\pi}{7}$; 64π

13) (a) $2\pi/15$ (b) $\pi/6$ (c) $8\pi/15$

14) a) $\pi/3$ b) $\pi/3$ c) $\pi/3$
d) $13\pi/45$ e) $\pi/3$ f) $17\pi/45$

15) $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

16) $A=4\pi r^2$

17) a) 1/27 π(145√145-1) b) 98π/3

18) a) $16\sqrt{17}\pi$ b) $4\sqrt{17}\pi$

19) a) $V=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$, para resolver essa integral é preciso saber que:

$$\int\sqrt{a^2-u^2}\,du=\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}arcsen\frac{u}{a}+c$$

b) $8\pi^2$